Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Корнев, Про- p -группы с конечным числом концов,
Матем. заметки, 2004, том 76, выпуск 4, 531–538

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm129>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 12:45:08

УДК 512.546.37

ПРО- p -ГРУППЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ КОНЦОВ

А. А. Коренев

В статье дается определение числа концов для про- p -группы. Адекватность этого определения подтверждена полученными про- p аналогами результатов, имеющих место для числа концов абстрактных групп. В частности, показано, что, как и в абстрактном случае, про- p -группа может иметь только 0, 1, 2 или бесконечное число концов, получена классификация про- p -групп с двумя концами и достаточное условие того, что про- p -группа имеет ровно один конец.

Библиография: 6 названий.

Теорема Столлинга о разложении для групп с бесконечным числом концов без сомнения является одним из наиболее важных и широко применяемых результатов одномерной комбинаторной теории абстрактных групп. Поэтому весьма досадным обстоятельством является отсутствие ее аналога в достаточно развитой к настоящему времени комбинаторной теории про- p -групп. Основная причина этого видится в том, что до сих пор не понятно, что следует считать концами проконечных графов (которые являются компактными по определению). Тем не менее, можно надеяться получить правильное определение числа концов про- p -группы, основываясь на чисто формальных соображениях.

Целью настоящей статьи является получение про- p аналогов нескольких классических результатов о числе концов группы, подтверждающих естественность следующего определения, предложенного О.В. Мельниковым. Для про- p -группы G число концов $e(G)$ определим следующим образом:

$$e(G) = 1 - d_0 + d_1, \quad (1)$$

где $d_i = \dim_{\mathbb{F}_p} H^i(G, \mathbb{F}_p[[G]])$, $i = 0, 1$.

Здесь $\mathbb{F}_p[[G]]$ – пополненная групповая алгебра G над полем $\mathbb{F}_p$ из p элементов, $H^0(G, A) = A^G$ – группа неподвижных точек левого проконечного G -модуля A , $H^1(G, A)$ – группа классов непрерывных скрещенных гомоморфизмов из G в A (подробнее см. ниже).

Доказано, как и в абстрактном случае, что у соизмеримых про- p -групп число концов совпадает (см. следствие 1).

Основным результатом статьи являются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Если число концов $e(G)$ про- p -группы G конечно, то $e(G) = 0, 1$ или 2 .*

Легко показать, что $e(G) = 0$ тогда и только тогда, когда G – конечная p -группа (см. следствие 2). Класс про- p -групп с одним концом слишком широк для того, чтобы надеяться на его описание. В частности, он содержит все про- p -группы с обобщенной двойственностью Пуанкаре (или, в терминологии [1], группы Коэна–Маколея) размерности ≥ 2 . Следующая теорема дает достаточное условие того, что про- p -группа имеет ровно один конец.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть G – про- p -группа. Если G обладает бесконечным конечно порожденным нормальным делителем N бесконечного индекса в G , то G имеет один конец.*

Теорема 3 описывает про- p -группы с двумя концами.

ТЕОРЕМА 3. *Класс про- p -групп G , для которых $e(G) = 2$, состоит из расширений конечного нормального делителя N с помощью факторгруппы G/N , изоморфной группе целых p -адических чисел $\mathbb{Z}_p$ или, если $p = 2$, – бесконечной диэдральной про-2-группе $\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$.*

В действительности мы докажем более сильное утверждение, чем теорема 1. Отметим, что группа $H^1(G, \mathbb{F}_p[[G]])$ естественным образом наделяется структурой правого G -модуля. Она индуцируется действием G на группе 1-коциклов. А именно, для скрещенного гомоморфизма $d: G \rightarrow \mathbb{F}_p[[G]]$ и элемента $g \in G$ положим $d \cdot g$ равным отображению $x \mapsto d(x)g, x \in G$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть G – бесконечная про- p -группа. Тогда, если G -модуль $H^1(G, \mathbb{F}_p[[G]])$ обладает ненулевым конечным подмодулем, то*

$$H^1(G, \mathbb{F}_p[[G]]) \cong \mathbb{F}_p.$$

Приступим к доказательству сформулированных выше результатов.

Группу когомологий $H^1(G, A)$ с коэффициентами в левом проконечном G -модуле A определим как факторгруппу группы $Z^1(G, A)$ непрерывных скрещенных гомоморфизмов по подгруппе $B^1(G, A)$ главных скрещенных гомоморфизмов. При этом $Z^1(G, A)$ будем считать снабженной компактно-открытой топологией, в которой, по определению, базис окрестностей нуля состоит из множеств вида

$$\{d \in Z^1(G, A) \mid d(G) \subseteq V\},$$

где V пробегает некоторый базис окрестностей нуля G -модуля A . Отметим, что подгруппа

$$B^1(G, A) = \{x \mapsto xa - a \mid a \in A\}$$

является непрерывным образом A . Следовательно, $B^1(G, A)$ компактна, а факторгруппа по ней хаусдорфова в индуцированной топологии.

ЛЕММА 1. Пусть $A = \varprojlim_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, где A_λ – конечные фактормодули A . Тогда имеет место топологический изоморфизм

$$H^1(G, A) \cong \varprojlim_{\lambda \in \Lambda} H^1(G, A_\lambda), \quad (2)$$

где $H^1(G, A_\lambda)$ – обычные одномерные группы когомологий про- p -группы G , рассматриваемые с дискретной топологией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha_\lambda: A \rightarrow A_\lambda$ – канонические сюръекции. Для $d \in Z^1(G, A)$ положим $\varphi(d)$ равным элементу $(\alpha_\lambda d)_{\lambda \in \Lambda}$ из $\varprojlim_{\lambda \in \Lambda} Z^1(G, A_\lambda)$. Легко проверить, что φ – топологический изоморфизм $Z^1(G, A)$ на $\varprojlim_{\lambda \in \Lambda} Z^1(G, A_\lambda)$ и что φ индуцирует нужный изоморфизм (2).

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда про- p -группа G конечно порождена, группы $H^1(G, A_\lambda)$ конечны и из существования (2) вытекает компактность $H^1(G, A)$. В частности, G -модуль $H^1(G, \mathbb{F}_p[[G]])$ является двойственным по Понтрягину G -модулю $D_1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ из письма Тейта в [1] для любой конечно порожденной про- p -группы G .

ЛЕММА 2. Пусть U – открытая подгруппа про- p -группы G . Тогда

$$H^1(G, \mathbb{F}_p[[G]]) \cong H^1(U, \mathbb{F}_p[[U]]).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{M}$ – некоторый базис окрестностей единицы группы G , состоящий из открытых нормальных подгрупп. По лемме Шапиро $H^1(G, \mathbb{F}_p(G/V)) \cong H^1(V, \mathbb{F}_p)$, где V – открытая нормальная подгруппа G . Тогда из формулы (2) следует изоморфизм

$$H^1(G, \mathbb{F}_p[[G]]) \cong \varprojlim_{V \in \mathfrak{M}} H^1(V, \mathbb{F}_p) \quad (3)$$

для любой про- p -группы G .

Если U – открытая подгруппа G , то можно выбрать $\mathfrak{M}$ – базис окрестностей единицы группы G , состоящий из открытых нормальных подгрупп группы G , содержащихся в U . Тогда $\mathfrak{M}$ является базисом окрестностей единицы U и формула (3) дает требуемый изоморфизм.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть G и H – соизмеримые про- p -группы, т.е. существует гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow H$ с конечным ядром $\ker \varphi$ и с конечным индексом $|H: \varphi(G)|$. Тогда $e(G) = e(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу конечности $\ker \varphi$ найдется такая открытая подгруппа U в G , что $U \cap \ker \varphi = 1$. Тогда U изоморфна открытой подгруппе $V = \varphi(U)$ группы H . Применяя лемму 2 к парам $U \subseteq G$ и $V \subseteq H$, получаем требуемое утверждение.

Пусть H – подгруппа про- p -группы G . Через $\mathbb{F}_p[[G/H]]$ обозначим свободную абелеву группу экспоненты p над пространством левых смежных классов G/H . Регулярное действие G на G/H определяет на $\mathbb{F}_p[[G/H]]$ структуру левого G -модуля.

Отметим, что если $H \trianglelefteq G$, то $\mathbb{F}_p[[G/H]]$ совпадает с пополненным групповым кольцом группы G/H . Кроме того, стандартным образом устанавливается модульный изоморфизм

$$\mathbb{F}_p[[G/H]] \cong \mathbb{F}_p[[G]] \otimes_H \mathbb{F}_p, \quad (4)$$

где $\otimes_H$ означает пополненное тензорное произведение над $\mathbb{F}_p[[H]]$.

Следующая лемма является частным случаем леммы 3 из [3].

ЛЕММА 3. Если H – подгруппа бесконечного индекса про- p -группы G , то $\mathbb{F}_p[[G/H]]^G = \{0\}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для про- p -группы G число концов $e(G) = 0$ тогда и только тогда, когда G конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как хорошо известно, если $|G| < \infty$, то $\mathbb{F}_p[[G]]^G \cong \mathbb{F}_p$. Кроме того, в этом случае $\mathbb{F}_p[[G]]$ – коиндуцированный модуль и, следовательно, $H^1(G, \mathbb{F}_p[[G]]) = \{0\}$. Поэтому $e(G) = 0$.

Если G бесконечна, то по лемме 3, $\mathbb{F}_p[[G]]^G = \{0\}$. В этом случае формула (1) принимает вид

$$e(G) = 1 + \dim_{\mathbb{F}_p} H^1(G, \mathbb{F}_p[[G]])$$

и, следовательно, $e(G) \geq 1$.

Начиная с этого места, будем рассматривать только бесконечные про- p -группы G .

Пусть X – некоторое множество образующих G . В правом свободном G -модуле $\prod_X \mathbb{F}_p[[G]]$ ранга $|X|$ построим циклический подмодуль S , порожденный элементом $(x - 1)_{x \in X}$. Положим

$$M(G, X) = \left(\prod_X \mathbb{F}_p[[G]] \right) / S.$$

ЛЕММА 4. Пусть X – множество образующих про- p -группы G . Тогда существует непрерывный инъективный гомоморфизм

$$\rho_X: H^1(G, \mathbb{F}_p[[G]]) \rightarrow M(G, X)$$

правых G -модулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение

$$\tilde{\rho}_X: Z^1(G, \mathbb{F}_p[[G]]) \rightarrow \prod_X \mathbb{F}_p[[G]]$$

определим, положив $\tilde{\rho}_X(d) = (d(x))_{x \in X}$, где $d \in Z^1(G, \mathbb{F}_p[[G]])$. Легко видеть, что $\tilde{\rho}_X$ – непрерывное G -модульное отображение. Так как скрещенный гомоморфизм однозначно определяется значениями на образующих, то $\tilde{\rho}_X$ инъективное отображение. В силу определения отображения $\tilde{\rho}_X$, образ $B^1(G, \mathbb{F}_p[[G]])$ при действии $\tilde{\rho}_X$ равняется S . Таким образом, $\tilde{\rho}_X$ индуцирует непрерывное инъективное отображение правых G -модулей $\rho_X: H^1(G, \mathbb{F}_p[[G]]) \rightarrow M(G, X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если про- p -группа G конечно порождена, то в силу компактности $H^1(G, \mathbb{F}_p[[G]])$ отображение ρ_X из леммы 4 является модульным изоморфизмом на свой образ $\text{Im } \rho_X$.

Следующая лемма в случае конечно порожденной группы G доказана (другим способом) в статье [3].

ЛЕММА 5. Пусть G – про- p -группа и X – множество образующих G . Тогда для любой подгруппы K бесконечного индекса в G правый K -модуль $M(G, X)$ свободен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\mu: \mathbb{F}_p[[G]] \rightarrow \prod_X \mathbb{F}_p[[G]]$$

– непрерывный гомоморфизм правых проконечных G -модулей, переводящий образующую e свободного G -модуля $\mathbb{F}_p[[G]]$ в элемент $(x-1)_{x \in X} \in \prod_X \mathbb{F}_p[[G]]$. Докажем, что для любой подгруппы K бесконечного индекса в G индуцированное отображение

$$\mu_K: \mathbb{F}_p[[G]] \otimes_K \mathbb{F}_p \rightarrow \left(\prod_X \mathbb{F}_p[[G]] \right) \otimes_K \mathbb{F}_p$$

инъективно. Действительно, учитывая приведенный выше стандартный изоморфизм (4), μ_K можно рассматривать как гомоморфизм $\mathbb{F}_p[[G/K]] \rightarrow \prod_X \mathbb{F}_p[[G/K]]$ левых G -модулей. Если $g \in \mathbb{F}_p[[G/K]]$ принадлежит $\ker \mu_K$, то $\mu_K(g) = ((x-1)g)_{x \in X} = 0$, т.е. для любого $x \in X$ выполнено равенство $xg = g$. Так как X – множество образующих G , то $g \in \mathbb{F}_p[[G/K]]^G$. В силу леммы 3 имеем $g = 0$.

Положив, в частности, $K = \{1\}$, получим инъективность гомоморфизма $\mu = \mu_{\{1\}}$. В дальнейшем будем рассматривать последовательность

$$0 \rightarrow \mathbb{F}_p[[G]] \xrightarrow{\mu} \prod_X \mathbb{F}_p[[G]] \rightarrow M(G, X) \rightarrow 0 \quad (5)$$

как точную последовательность правых K -модулей.

Нетрудно показать, что каждый правый свободный G -модуль является проективным, а следовательно, и свободным K -модулем. Поэтому длинная последовательность групп гомологий, соответствующая (5), дает точную последовательность

$$0 \rightarrow H_1(K, M(G, X)) \rightarrow \mathbb{F}_p[[G]] \otimes_K \mathbb{F}_p \xrightarrow{\mu_K} \left(\prod_X \mathbb{F}_p[[G]] \right) \otimes_K \mathbb{F}_p \rightarrow M(G, X) \otimes_K \mathbb{F}_p \rightarrow 0.$$

Учитывая доказанную выше инъективность отображений μ_K , получаем из нее, что

$$H_1(K, M(G, X)) = \{0\}.$$

Теперь, используя стандартные рассуждения, можно установить требуемую свободу K -модуля $M(G, X)$. Для этого возьмем такой правый свободный K -модуль P , что

$$P/P \cdot I(K) \cong M(G, X)/M(G, X) \cdot I(K),$$

где $I(K)$ – идеал аугментации в $\mathbb{F}_p[[K]]$. Поднимем этот изоморфизм до эпиморфизма $\xi: P \rightarrow M(G, X)$ и рассмотрим точную последовательность групп гомологий

$$\cdots \rightarrow H_1(K, M(G, X)) \rightarrow H_0(K, \ker \xi) \rightarrow H_0(K, P) \xrightarrow{\xi_0} H_0(K, M(G, X)) \rightarrow 0.$$

Так как по построению ξ_0 – изоморфизм, то получаем, что

$$\ker \xi / \ker \xi \cdot I(K) = H_0(K, \ker \xi) = \{0\}.$$

Отсюда следует, что $\ker \xi = \{0\}$, т.е. что $M(G, X)$ изоморфен P .

ЛЕММА 6. Если G – такая бесконечная про- p -группа, что $M(G, X)^G \neq \{0\}$ для некоторого множества образующих X , то любая ее бесконечная подгруппа K является открытой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 5, если индекс подгруппы K бесконечен, то $M(G, X) \cong \prod_{i \in I} \mathbb{F}_p[[K]]$ как K -модуль. Тогда

$$M(G, X)^K \supseteq M(G, X)^G \neq \{0\},$$

что невозможно для бесконечной K в силу леммы 3.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если F – свободная про- p -группа конечного ранга m , то

$$H^1(F, \mathbb{F}_p[[F]]) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_p & \text{при } m = 1, \\ \prod^{\aleph_0} \mathbb{F}_p & \text{при } m \geq 2 \end{cases}$$

как абелева про- p -группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – некоторая свободная система образующих группы F . Нетрудно показать, что любое отображение X в $\mathbb{F}_p[[F]]$ продолжается до скрещенного гомоморфизма (см. соответствующее доказательство для абстрактных групп в [4, § 3.1]). Отсюда вытекает сюръективность гомоморфизма ρ_X , который в силу замечания к лемме 4 дает изоморфизм

$$H^1(F, \mathbb{F}_p[[F]]) \cong M(F, X).$$

Если $|X| = m = 1$, то, как легко видеть, подмодуль S совпадает с идеалом аугментации $I(F)$. Следовательно, $M(\mathbb{Z}_p, \{1\}) \cong \mathbb{F}_p$.

Если $m \geq 2$, то в группе F существуют, очевидно, бесконечные подгруппы бесконечных индексов. Поэтому в силу леммы 6 $M(F, X)$ – бесконечная сепарабельная про- p -группа, абелева и экспоненты p . Хорошо известно, что все такие группы – прямые произведения счетного числа $\mathbb{F}_p$.

ЛЕММА 7. Пусть G – такая бесконечная про- p -группа, что любая ее бесконечная подгруппа имеет конечный индекс. Тогда G – расширение конечного нормального делителя с помощью группы, изоморфной $\mathbb{Z}_p$ или, в случае $p = 2$, диэдральной группе $\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, группа G должна быть конечно порождена. В противном случае факторгруппа $G/G^p[G, G] \cong \prod_{i \in I} \mathbb{F}_p$ бесконечна и, следовательно, представляется в виде $P \times Q$, где обе группы P и Q бесконечны. Тогда прообраз P в G был бы бесконечной подгруппой бесконечного индекса.

Далее, по теореме Зельманова [5], периодическая конечно порожденная про- p -группа конечна. Следовательно, в G существует подгруппа $A \cong \mathbb{Z}_p$. По условию, A открыта в G и поэтому, можем считать, что $A \trianglelefteq G$. Тогда в силу леммы 4.7 из [6] G имеет требуемый вид.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть W – ненулевой конечный подмодуль $H^1(G, \mathbb{F}_p[[G]])$. Тогда в силу леммы 4 G -модуль $M(G, X)$ содержит ненулевой конечный подмодуль $V = \rho_X(W)$. Как известно, для про- p -группы G из конечности V следует, что $V^G \neq \{0\}$. Так как $M(G, X)^G \supseteq V^G \neq \{0\}$, то получаем, используя леммы 6 и 7, что G содержит открытую подгруппу $A \cong \mathbb{Z}_p$. В силу леммы 2 и следствия 3 имеем

$$H^1(G, \mathbb{F}_p[[G]]) \cong H^1(\mathbb{Z}_p, \mathbb{F}_p[[\mathbb{Z}_p]]) \cong \mathbb{F}_p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Если $e(G) < \infty$, то по следствию 2 либо $e(G) = 0$, либо G бесконечна. В последнем случае из формулы 1 следует, что если $e(G) \neq 1$, то $H^1(G, \mathbb{F}_p[[G]])$ – ненулевой конечный G -модуль. Тогда рассуждения из доказательства теоремы 4 для $W = H^1(G, \mathbb{F}_p[[G]])$ дают $e(G) = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Из следствия 2 и формулы 1 получаем, что $e(G) = 2$ тогда и только тогда, когда $H^1(G, \mathbb{F}_p[[G]]) \cong \mathbb{F}_p$. Поэтому рассуждения из доказательства теоремы 4 вместе с леммами 6 и 7 показывают, что группа G с $e(G) = 2$ имеет требуемую структуру. Обратно, если G – про- p -группа, описанного в условии теоремы вида, то G содержит открытую подгруппу $A \cong \mathbb{Z}_p$ и, следовательно, $e(G) = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Так как группа N бесконечна, то $\mathbb{F}_p[[G]]^N = \{0\}$. Из точной последовательности

$$0 \rightarrow H^1(G/N, \mathbb{F}_p[[G]]^N) \rightarrow H^1(G, \mathbb{F}_p[[G]]) \xrightarrow{\text{res}} H^1(N, \mathbb{F}_p[[G]]),$$

которая легко проверяется на уровне скрещенных гомоморфизмов, получаем вложение

$$0 \rightarrow H^1(G, \mathbb{F}_p[[G]]) \xrightarrow{\text{res}} H^1(N, \mathbb{F}_p[[G]]).$$

Следовательно, для доказательства теоремы достаточно показать, что $\text{res} = 0$ или, что если $d: G \rightarrow \mathbb{F}_p[[G]]$ – скрещенный гомоморфизм, то $\text{res}_N^G d$ – внутренний скрещенный гомоморфизм, где $\text{res}_N^G d$ – ограничение d на N .

Обозначим

$$N_0 = N, \quad N_{k+1} = N_k^* = N_k^p[N_k, N_k].$$

Так как N – нормальный делитель G , то N_k – нормальный делитель G для любого целого неотрицательного k . Поскольку про- p -группа N конечно порождена, то N/N_k – конечная подгруппа группы G/N_k .

Пусть $d_k: G \rightarrow \mathbb{F}_p[[G/N_k]]$ – скрещенный гомоморфизм, являющийся композицией d и канонической сюръекции $\mathbb{F}_p[[G]] \rightarrow \mathbb{F}_p[[G/N_k]]$. Тогда $d = \varprojlim d_k$ и, следовательно, $\text{res}_N^G d = \varprojlim \text{res}_N^G d_k$. Таким образом, достаточно показать, что $\text{res}_N^G d_k$ – внутренний скрещенный гомоморфизм для любого целого неотрицательного k .

Так как $\mathbb{F}_p[[G/N_k]]$ – тривиальный N_k -модуль, то ограничение d_k на N_k является гомоморфизмом групп, и поэтому, аннулирует подгруппу $N_k^p[N_k, N_k] = N_{k+1}$ (и, следовательно, пропускается через факторгруппу по ней). Пусть $\tilde{d}_k: G/N_{k+1} \rightarrow \mathbb{F}_p[[G/N_k]]$ – скрещенный гомоморфизм такой, что $d_k = \tilde{d}_k \circ \varphi_{k+1}$, где через φ_m обозначен канонический гомоморфизм G на G/N_m . Поскольку N_k/N_{k+1} – конечный абелев нормальный делитель группы G/N_{k+1} , то его централизатор $V = C_{G/N_{k+1}}(N_k/N_{k+1})$ является открытым нормальным делителем группы G/N_{k+1} , содержащим N_k/N_{k+1} . Пусть U –

образ группы V при канонической сюръекции $\psi_k : G/N_{k+1} \rightarrow G/N_k$. Тогда группа U открыта в G/N_k и, так как группа G/N , а значит, и G/N_k , бесконечна, то U – бесконечная подгруппа группы G/N_k .

Для любых $v \in V$, $n \in N_k/N_{k+1}$ имеем

$$\begin{aligned}\tilde{d}_k(n) &= \tilde{d}_k(vnv^{-1}) = \psi_k(v) \cdot \tilde{d}_k(nv^{-1}) + \tilde{d}_k(v) \\ &= \psi_k(v) \cdot (\psi_k(n) \cdot \tilde{d}_k(v^{-1})) + \psi_k(v) \cdot \tilde{d}_k(n) + \tilde{d}_k(v) \\ &= \psi_k(v) \cdot \tilde{d}_k(v^{-1}) + \tilde{d}_k(v) + \psi_k(v) \cdot \tilde{d}_k(n) \\ &= \tilde{d}_k(1) + \psi_k(v) \cdot \tilde{d}_k(n) = \psi_k(v) \cdot \tilde{d}_k(n).\end{aligned}$$

Таким образом, $u \cdot \tilde{d}_k(n) = \tilde{d}_k(n)$ для любого $u \in U$ и, следовательно, $\tilde{d}_k(n) \in \mathbb{F}_p[[G/N_k]]^U$ для любого $n \in N_k/N_{k+1}$. Но $\mathbb{F}_p[[G/N_k]]$ как левый U -модуль изоморфен

$$\bigoplus_{|G/N_k : U|} \mathbb{F}_p[[U]]$$

и $\mathbb{F}_p[[U]]^U = \{0\}$ по лемме 3, в силу бесконечности группы U . Следовательно, ограничение $\tilde{d}_k$ на N_k/N_{k+1} равно нулю. Поэтому существует скрещенный гомоморфизм $\bar{d}_k : G/N_k \rightarrow \mathbb{F}_p[[G/N_k]]$ такой, что $d_k = \bar{d}_k \circ \varphi_k$. Ограничение $\bar{d}_k$ на конечную подгруппу N/N_k группы G/N_k является скрещенным гомоморфизмом в свободный левый N/N_k -модуль $\mathbb{F}_p[[G/N_k]]$. Поскольку $H^1(L, \mathbb{F}_p[[L]]) = \{0\}$ для любой конечной группы L , то $\text{res}_{N/N_k}^{G/N_k} \bar{d}_k$ – внутренний скрещенный гомоморфизм, где через $\text{res}_{N/N_k}^{G/N_k} \bar{d}_k$ обозначено ограничение $\bar{d}_k$ на N/N_k . Так как $d_k = \bar{d}_k \circ \varphi_k$, то $\text{res}_N^G d_k$ – тоже внутренний скрещенный гомоморфизм. Теорема доказана.

В заключение автор выражает свою признательность О. В. Мельникову за постановку задачи и многочисленные плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Серр Ж.-П. Когомологии Галуа. М.: Мир, 1968.
- [2] Мельников О. В. Фактор-группы проконечных групп с двойственностью Пуанкаре // Вести АН Беларуси. Сер. физ.-матем. 1996. № 3. С. 54–58.
- [3] Мельников О. В., Шишкевич А. А. Про- p -группы с виртуальной двойственностью Пуанкаре размерности 2 // Докл. НАН Беларуси. 2002. Т. 46. № 1. С. 13–15.
- [4] Gruenberg K. W. Cohomological Topics in Group Theory. Lecture Notes in Math. V. 143. Berlin: Springer-Verlag, 1970.
- [5] Zelmanov E. I. On periodic compact groups // Israel J. Math. 1992. V. 77. P. 83–95.
- [6] Мельников О. В. Асферические про- p -группы // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 11. С. 71–104.