Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Добровольский, А. Л. Рощеня, О числе точек решетки в гиперболическом кресте, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 3, 363–369

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1290>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 14:16:21

УДК 511.9

О ЧИСЛЕ ТОЧЕК РЕШЕТКИ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ КРЕСТЕ

Н. М. Добровольский, А. Л. Рошня

В работе получена асимптотическая формула для числа точек произвольной решетки в гиперболическом кресте.

Библиография: 2 названия.

Пусть $s \geq 2$ и $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$ – полная решетка. Гиперболическим крестом называется область $K(T) = \{\vec{x} \mid \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_s \leq T\}$, где для вещественного x обозначаем $\bar{x} = \max(1, |x|)$. Пусть $D(T \mid \Lambda)$ – количество ненулевых точек решетки Λ в гиперболическом кресте $K(T)$. Цель данной работы – доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Для любой решетки Λ при $T \geq 3$ справедливо асимптотическое равенство

$$D(T \mid \Lambda) = \frac{2^s T \ln^{s-1} T}{(s-1)! \det \Lambda} + \Theta C(\Lambda) \frac{T \ln^{s-2} T}{\det \Lambda},$$

где $C(\Lambda) = 2^s e(a_0 + 2)^s$ и $|\Theta| \leq 1$.

1. Обозначения. Пусть $\vec{\lambda}_j = (\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{js})$ ($j = 1, \dots, s$) – произвольный фиксированный базис решетки Λ и

$$A = A(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s) = \max_{1 \leq j \leq s} \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^s |\lambda_{\nu j}|; \quad (1)$$

$\vec{\lambda}_j^* = (\lambda_{j1}^*, \dots, \lambda_{js}^*)$ ($j = 1, \dots, s$) – взаимный базис взаимной решетки Λ^* (как известно [1], взаимный базис задается соотношениями

$$(\vec{\lambda}_i, \vec{\lambda}_j^*) = \sum_{\nu=1}^s \lambda_{i\nu} \lambda_{j\nu}^* = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

а взаимная решетка Λ^* однозначно определяется решеткой Λ).

Определим следующие области:

$$\Pi(T \mid \Lambda) = \left\{ \vec{t} : \prod_{j=1}^s \sum_{\nu=1}^s \lambda_{\nu j} t_{\nu} + \sum_{\nu=1}^s \lambda_{\nu j} \left(\frac{1}{2} - \left\{ t_{\nu} + \frac{1}{2} \right\} \right) \leq T \right\},$$

для целого вектора $\vec{m}$

$$\Pi(\vec{m}) = \left\{ \vec{t} : \left[t_\nu + \frac{1}{2} \right] = m_\nu, \nu = 1, \dots, s \right\},$$

$$\Pi^*(T | \Lambda) = \left\{ \vec{y} : \overline{\prod_{j=1}^s y_j + \sum_{\nu=1}^s \lambda_{\nu j} \left(\frac{1}{2} - \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^s y_k \lambda_{\nu k}^* \right\} \right)} \leq T \right\},$$

при $a \geq 0$

$$\Pi_1(T, a) = \left\{ \vec{y} : \prod_{j=1}^s \overline{|y_j| + a} \leq T \right\}, \quad \Pi_2(T, a) = \left\{ \vec{y} : \prod_{j=1}^s u(y_j, a) \leq T \right\},$$

где

$$u(y, a) = \begin{cases} 1 & \text{при } |y| \leq a + 1, \\ |y| - a & \text{при } |y| \geq a + 1. \end{cases}$$

Заметим, что $\Pi_1(T, 0) = \Pi_2(T, 0) = K(T)$. Пусть при $a \geq 0, T \geq 0$

$$I_s(a, T) = \int_{\substack{\prod_{j=1}^s (y_j + a) \leq T \\ y_1, \dots, y_s \geq 0}} d\vec{y}, \quad J_s(a, T) = \int_{\substack{\prod_{j=1}^s u(y_j, a) \leq T \\ y_1, \dots, y_s \geq 0}} d\vec{y}.$$

2. Вспомогательные леммы.

ЛЕММА 1. *Справедливо равенство*

$$\sum_{\prod_{j=1}^s \overline{\lambda_{1j} m_1 + \dots + \lambda_{sj} m_s} \leq T} \int_{\Pi(\vec{m})} d\vec{t} = \int_{\Pi(T | \Lambda)} d\vec{t}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых целых неравных векторов $\vec{n}$ и $\vec{m}$ области $\Pi(\vec{n})$ и $\Pi(\vec{m})$ не пересекаются. С другой стороны, если $m_\nu = [t_\nu + 1/2]$ ($\nu = 1, \dots, s$), то

$$\sum_{\nu=1}^s \lambda_{\nu j} t_\nu + \sum_{\nu=1}^s \lambda_{\nu j} \left(\frac{1}{2} - \left\{ t_\nu + \frac{1}{2} \right\} \right) = \sum_{\nu=1}^s \lambda_{\nu j} m_\nu$$

и, значит,

$$\Pi(T | \Lambda) = \bigcup_{\prod_{j=1}^s \overline{\lambda_{1j} m_1 + \dots + \lambda_{sj} m_s} \leq T} \Pi(\vec{m}).$$

Отсюда в силу аддитивности интеграла следует утверждение леммы.

ЛЕММА 2. *Справедливы равенства*

$$\int_{\Pi(T | \Lambda)} d\vec{t} = \frac{1}{\det \Lambda} \int_{\Pi^*(T | \Lambda)} d\vec{y}, \quad (2)$$

$$\int_{\Pi_1(T, a)} d\vec{y} = 2^s I_s(a, T) \quad \text{при } a \geq 1, \quad (3)$$

$$\int_{\Pi_2(T, a)} d\vec{y} = 2^s J_s(a, T) \quad \text{при } a \geq 0. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\vec{y} = (y_1, \dots, y_s) = t_1 \vec{\lambda}_1 + \dots + t_s \vec{\lambda}_s. \quad (5)$$

Тогда

$$y_\nu = \sum_{j=1}^s t_j \lambda_{j\nu} \quad (\nu = 1, \dots, s), \quad t_j = (\vec{y}, \vec{\lambda}_j^*) = \sum_{\nu=1}^s y_\nu \lambda_{j\nu}^*.$$

Сделав замену переменных (5), получим $d\vec{t} = (\det \Lambda)^{-1} d\vec{y}$,

$$\begin{aligned} \int_{\Pi(T|\Lambda)} d\vec{t} &= \frac{1}{\det \Lambda} \int_{\Pi_{j=1}^s \frac{y_j + \sum_{\nu=1}^s \lambda_{\nu j} (1/2 - \{1/2 + \sum_{k=1}^s y_k \lambda_{\nu k}^*\}) \leq T}{y_1, \dots, y_s \geq 0}} d\vec{y} \\ &= \frac{1}{\det \Lambda} \int_{\Pi^*(T|\Lambda)} d\vec{y}, \end{aligned}$$

и равенство (2) доказано.

При $a \geq 1$ имеем $|y| + a = \overline{|y| + a}$ и, следовательно, в силу симметрии области $\Pi_1(T, a)$ имеем

$$\int_{\Pi_1(T, a)} d\vec{y} = 2^s \int_{\substack{\Pi_{j=1}^s (y_j + a) \leq T \\ y_1, \dots, y_s \geq 0}} d\vec{y} = 2^s I_s(a, T),$$

что доказывает равенство (3). Наконец, равенство (4) следует из симметрии области $\Pi_2(T, a)$ при любом $a \geq 0$.

ЛЕММА 3. При $a > 0$, $T \geq a^s$ справедливо равенство

$$I_s(a, T) = (-1)^{s+1} (T - a^s) + T \sum_{n=1}^{s-1} \frac{(\ln T - s \ln a)^n (-1)^{s-1-n}}{n!}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего установим для $I_s(a, T)$ рекуррентное соотношение. Имеем

$$\begin{aligned} I_s(a, T) &= \int_0^{T/a^{s-1}-a} dy_s \int_{\substack{\Pi_{j=1}^{s-1} (y_j + a) \leq \frac{T}{y_s + a} \\ y_1, \dots, y_{s-1} \geq 0}} dy_1 \cdots dy_{s-1} \\ &= \int_0^{T/a^{s-1}-a} I_{s-1}\left(a, \frac{T}{y+a}\right) dy = \int_a^{T/a^{s-1}} I_{s-1}\left(a, \frac{T}{y}\right) dy. \end{aligned} \quad (7)$$

Далее проведем индукцию по s , используя (7). При $s = 1$ имеем

$$I_1(a, T) = \int_0^{T-a} dy = T - a$$

и равенство (6) выполнено. Из (7) и предположения индукции для $s - 1$ получим

$$\begin{aligned} I_s(a, T) &= \int_a^{T/a^{s-1}} \left((-1)^s \left(\frac{T}{y} - a^{s-1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{T}{y} \sum_{n=1}^{s-2} \frac{(\ln(T/y) - (s-1) \ln a)^n (-1)^{s-2-n}}{n!} \right) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^s T (\ln T - (s-1) \ln a - \ln a) + (-1)^{s+1} a^{s-1} \left(\frac{T}{a^{s-1}} - a \right) \\
&\quad + T \int_{\ln a}^{\ln T - (s-1) \ln a} \sum_{n=1}^{s-2} \frac{(\ln T - u - (s-1) \ln a)^n (-1)^{s-2-n}}{n!} du \\
&= (-1)^{s+1} (T - a^s) + (-1)^s T (\ln T - s \ln a) + T \sum_{n=1}^{s-2} \frac{(-1)^{s-2-n}}{n!} \int_0^{\ln T - s \ln a} t^n dt \\
&= (-1)^{s+1} (T - a^s) + T \sum_{n=1}^{s-2} \frac{(-1)^{s-2-n}}{n!} \frac{(\ln T - s \ln a)^{n+1}}{n+1} + (-1)^s T (\ln T - s \ln a) \\
&= (-1)^{s+1} (T - a^s) + T \sum_{n=1}^{s-1} \frac{(-1)^{s-1-n} (\ln T - s \ln a)^n}{n!},
\end{aligned}$$

что и доказывает утверждение леммы.

ЛЕММА 4. При $a \geq 0$, $T \geq 1$, $s \geq 1$ справедливо равенство

$$J_s(a, T) = a^s + \sum_{n=0}^{s-1} \frac{T \ln^n T}{n!} \sum_{k=0}^{s-1-n} C_s^k C_{s-k-1}^n a^k. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения $J_s(a, T)$ имеем

$$\begin{aligned}
J_s(a, T) &= \int_0^{a+1} dy_s \int_{u(y_1, a) \cdots u(y_{s-1}, a) \leq T}^{y_1, \dots, y_{s-1} \geq 0} dy_1 \cdots dy_{s-1} \\
&\quad + \int_{a+1}^{T+a} dy_s \int_{u(y_1, a) \cdots u(y_{s-1}, a) \leq T/(y-a)}^{y_1, \dots, y_{s-1} \geq 0} dy_1 \cdots dy_{s-1} \\
&= (a+1) J_{s-1}(a, T) + \int_1^T J_{s-1}\left(a, \frac{T}{y}\right) dy. \quad (9)
\end{aligned}$$

Далее проведем индукцию по s , используя рекуррентное равенство (9).

При $s = 1$ имеем

$$J_1(a, T) = \int_{u(y, a) \leq T}^{y \geq 0} dy = \int_0^{a+1} dy + \int_{a+1}^{T+a} dy = a+1 + T-1 = a+T$$

и равенство (8) выполнено.

Пусть

$$Q_{s,n}(a) = \sum_{k=0}^{s-1-n} C_s^k C_{s-k-1}^n a^k, \quad J_s(a, T) = a^s + \sum_{n=0}^{s-1} \frac{T \ln^n T}{n!} Q_{s,n}(a).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 J_{s+1}(a, T) &= (a+1)J_s(a, T) + \int_1^T J_s\left(a, \frac{T}{y}\right) dy \\
 &= (a+1)a^s + \sum_{n=0}^{s-1} \frac{T \ln^n T}{n!} Q_{s,n}(a)(a+1) + \int_1^T \left(a^s + \sum_{n=0}^{s-1} \frac{T/y \cdot \ln^n(T/y)}{n!} Q_{s,n}(a) \right) dy \\
 &= a^{s+1} + a^s + Ta^s - a^s + \sum_{n=0}^{s-1} \frac{T \ln^n T}{n!} Q_{s,n}(a)(a+1) + \sum_{n=0}^{s-1} \frac{T}{n!} Q_{s,n}(a) \frac{\ln^{n+1} T}{n+1} \\
 &= a^{s+1} + T(a^s + Q_{s,0}(a)(a+1)) \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{s-1} \frac{T \ln^n T}{n!} (Q_{s,n}(a)(a+1) + Q_{s,n-1}(a)) + \frac{T \ln^s T}{s!} Q_{s,s-1}(a) \\
 &= a^{s+1} + \sum_{n=0}^s \frac{T \ln^n T}{n!} Q_{s+1,n}(a),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 Q_{s+1,0}(a) &= a^s + (a+1) \sum_{k=0}^{s-1} C_s^k a^k = \sum_{k=1}^s C_s^{k-1} a^k + \sum_{k=0}^{s-1} C_s^k a^k + a^s \\
 &= sa^s + \sum_{k=1}^{s-1} (C_s^{k-1} + C_s^k) a^k + 1 = \sum_{k=0}^s C_{s+1}^k a^k = \sum_{k=0}^{s-1-0} C_{s+1}^k C_{s+1-k-1}^0 a^k, \\
 Q_{s+1,s}(a) &= Q_{s,s-1}(a) = 1 = \sum_{k=0}^{(s+1)-1-s} C_{s+1}^k C_{s+1-k-1}^s a^k,
 \end{aligned}$$

и при $1 \leq n \leq s-1$

$$\begin{aligned}
 Q_{s+1,n}(a) &= Q_{s,n}(a)(a+1) + Q_{s,n-1}(a) \\
 &= (a+1) \sum_{k=0}^{s-1-n} C_s^k C_{s-k-1}^n a^k + \sum_{k=0}^{s-1-(n-1)} C_s^k C_{s-k-1}^{n-1} a^k \\
 &= \sum_{k=1}^{s-n} C_s^{k-1} C_{s-(k-1)-1}^n a^k + \sum_{k=0}^{s-1-n} C_s^k (C_{s-k-1}^n + C_{s-k-1}^{n-1}) a^k + C_s^{s-n} C_{n-1}^{n-1} a^{s-n} \\
 &= \sum_{k=1}^{s-n} C_s^{k-1} C_{s-k}^n a^k + \sum_{k=0}^{s-n} C_s^k C_{s-k}^n a^k = \sum_{k=1}^{s-n} (C_s^{k-1} + C_s^k) C_{s-k}^n a^k + C_s^0 C_{s-0}^n a^0 \\
 &= \sum_{k=0}^{s-n} (C_{s+1}^k C_{(s+1)-1-k}^n) a^k
 \end{aligned}$$

и, значит, $J_{s+1}(a, T)$ удовлетворяет равенству (8), что доказывает лемму.

СЛЕДСТВИЕ 1. При $a > 1$, $T \geq 3$ справедливо неравенство

$$I_s(a, T) \geq \frac{T \ln^{s-1} T}{(s-1)!} - ea^s T \ln^{s-2} T - a^s. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned}
 I_s(a, T) &= (-1)^{s+1}(T - a^s) + T \sum_{n=1}^{s-1} \frac{(\ln T - s \ln a)^n (-1)^{s-1-n}}{n!} \\
 &= T \sum_{n=1}^{s-1} \frac{(-1)^{s-1-n}}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \ln^k T (-1)^{n-k} (s \ln a)^{n-k} + (-1)^{s+1} T + (-1)^s a^s \\
 &= (-1)^s a^s + T \sum_{k=1}^{s-1} \ln^k T \sum_{n=k}^{s-1} \frac{(-1)^{s-1-n} (-1)^{n-k}}{n!} C_n^k (s \ln a)^{n-k} \\
 &\quad + T \left((-1)^{s+1} + \sum_{n=1}^{s-1} \frac{(-1)^{s-1-n}}{n!} (-1)^n (s \ln a)^n \right) \\
 &= (-1)^s a^s + (-1)^{s+1} T \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(s \ln a)^n}{n!} + T \sum_{k=1}^{s-1} \ln^k T (-1)^{s-1-k} \sum_{n=0}^{s-k-1} \frac{(s \ln a)^n}{k! n!} \\
 &= \frac{T \ln^{s-1} T}{(s-1)!} + T \sum_{k=0}^{s-2} \frac{\ln^k T (-1)^{s-1-k}}{k!} \sum_{n=0}^{s-k-1} \frac{(s \ln a)^n}{n!} + (-1)^s a^s \\
 &\geq \frac{T \ln^{s-1} T}{(s-1)!} - T \ln^{s-2} T \sum_{k=0}^{s-2} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{s-k-1} \frac{(s \ln a)^n}{n!} - a^s \\
 &\geq \frac{T \ln^{s-1} T}{(s-1)!} - T \ln^{s-2} T \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{k!} a^s - a^s \geq \frac{T \ln^{s-1} T}{(s-1)!} - e a^s T \ln^{s-2} T - a^s,
 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Справедливо неравенство*

$$J_s(a, T) \leq \frac{T \ln^{s-1} T}{(s-1)!} + (a+2)^s T \ln^{s-2} T + a^s. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned}
 J_s(a, T) &= \frac{T \ln^{s-1} T}{(s-1)!} + \sum_{n=0}^{s-2} \frac{T \ln^n T}{n!} \sum_{k=0}^{s-1-n} \frac{s!(s-k-1)!}{k!(s-k)!n!(s-k-n-1)!} a^k + a^s \\
 &= \frac{T \ln^{s-1} T}{(s-1)!} + T \sum_{n=0}^{s-2} \frac{\ln^n T}{n!} C_s^n \sum_{k=0}^{s-1-n} \frac{s-n}{s-k} C_{s-n-1}^k a^k + a^s \\
 &\leq \frac{T \ln^{s-1} T}{(s-1)!} + T \sum_{n=0}^{s-2} \frac{\ln^n T}{n!} C_s^n \frac{s-n}{n+1} (a+1)^{s-n-1} + a^s \\
 &\leq \frac{T \ln^{s-1} T}{(s-1)!} + (a+2)^s T \ln^{s-2} T + a^s,
 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Из определения величины $D(T | \Lambda)$ следует, что

$$D(T | \Lambda) + 1 = \sum_{\substack{\vec{x} \in \Lambda \\ x_1 \dots x_s \leq T}} 1 = \sum_{\prod_{j=1}^s \lambda_{1j} m_1 + \dots + \lambda_{sj} m_s \leq T} 1 = \int_{\Pi(T | \Lambda)} d\vec{t}$$

в силу леммы 1.

Применяя лемму 2, получим

$$D(T | \Lambda) + 1 = \frac{1}{\det \Lambda} \int_{\Pi^*(T | \Lambda)} d\vec{t}.$$

Пусть $a = \overline{A}$, где A задано равенством (1). Тогда справедливы включения $\Pi_1(T, a) \subseteq \Pi^*(T | \Lambda) \subseteq \Pi_2(T, a)$, так как

$$\prod_{j=1}^s u(|y_j|, a) \leq \prod_{j=1}^s \overline{y_j + \sum_{\nu=1}^s \lambda_{\nu j} \left(\frac{1}{2} - \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^s y_k \lambda_{\nu k}^* \right\} \right)} \leq \prod_{j=1}^s (|y_j| + a).$$

Из этого включения и леммы 2 следуют неравенства

$$\frac{2^s I_s(a, T)}{\det \Lambda} \leq D(T | \Lambda) + 1 \leq \frac{2^s J_s(a, T)}{\det \Lambda}.$$

Применяя неравенства (10), (11), получим

$$\begin{aligned} \frac{2^s}{\det \Lambda} \left(\frac{T \ln^{s-1} T}{(s-1)!} - e a^s T \ln^{s-2} T - a^s \right) &\leq D(T | \Lambda) + 1 \\ &\leq \frac{2^s}{\det \Lambda} \left(\frac{T \ln^{s-1} T}{(s-1)!} + T \ln^{s-2} T (a+2)^s + a^s \right). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$D(T | \Lambda) = \frac{2^s T \ln^{s-1} T}{(s-1)! \det \Lambda} + C(\Lambda) \Theta \frac{T \ln^{s-2} T}{\det \Lambda}$$

с $C(\Lambda) = 2^s e(a_0 + 2)^s$ и $a_0 = \min \overline{A}(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s)$, где минимум берется по всем базисам решетки Λ .

Теорема полностью доказана.

Основной результат настоящей статьи анонсирован в тезисе [2]. Авторы выражают благодарность профессору Н. М. Коробову и профессору В. И. Нечаеву за внимание и полезное обсуждение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Титчмарш Э. Ч. Теория дзета-функции Римана. М., 1953.
- [2] Добровольский Н. М., Рошеня А. Л. О числе точек решетки в гиперболическом кресте // II Международная конференция "Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел". Тезисы докл. Воронеж: ВГУ, 1995. С. 53.