Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Добрынский, Об отсутствии циклов у унимодальных отображений квадрата, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 3, 370–378

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1291>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 17:40:54

УДК 517.9

ОБ ОТСУТСТВИИ ЦИКЛОВ У УНИМОДАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ КВАДРАТА

В. А. Добрынский

Для специального вида унимодальных 2-эндоморфизмов единичного квадрата приведены условия отсутствия у них периодических точек.

Библиография: 4 названия.

Пусть T – некоторое подмножество квадрата $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ и F – отображение I^2 в себя. Через $\text{Int}(T)$ обозначим внутренность T , через $\Gamma(T) = T \setminus \text{Int}(T)$ – его границу, через $\text{NW}(F)$ – множество неблуждающих точек F , через $\text{Per}(F)$ – множество периодических точек F , через $\|DF\|$ и $\|D\Phi\|$ – якобианы F и Φ , где $\Phi = F(F(F(\cdot)))$. Положим

$$F^n = \underbrace{F(F(\dots F(\cdot) \dots))}_{n \text{ раз}}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $(x, y) \mapsto (\Psi(x, y), x)$ квадрата I^2 в себя называется *унимодальным*, если $\Psi(x, y)$ – C^1 -гладкая функция такая, что $\Psi(x, 0) = \Psi(x, 1) = \Psi(0, y) = \Psi(1, y) = 0$, и существует точка $(\bar{x}, \bar{y})$: $\Psi(\bar{x}, \bar{y}) > \Psi(x, y) > 0$ для любой точки $(x, y) \in \text{Int}(I^2)$ и $(\bar{x}, \bar{y})$ – единственная точка, в которой частные производные Ψ'_x и Ψ'_y одновременно обращаются в нуль [1], [2].

Ниже рассматривается семейство унимодальных отображений вида

$$F: (x, y) \mapsto (\lambda f(x)(g(y))^s, x). \quad (1)$$

Здесь λ и s , – параметры, $0 < \lambda \leq 1$, $s > 0$; $f(t)$ – C^1 -гладкая унимодальная на $[0, 1]$ функция такая, что $f(0) = f(1) = 0$, $f(q) = 1$, q – точка экстремума $f(t)$, $(t - q)f'(t) < 0$ на $[0, 1] \setminus \{q\}$ ($f'(t)$ – производная от $f(t)$); а $g(t) = h(f(t))$, где $h(t)$ – C^1 -дiffeоморфизм $[0, 1]$ такой, что $h(0) = 0$ и $h'(t) > 0$ на $[0, 1]$.

В [2] доказано, что в пространстве параметров λ и s существуют области таких их значений, что отображения вида (1) имеют бесконечно много периодических точек. Есть там также и оценка их числа. Настоящая работа дополняет [1], [2] в том смысле, что здесь указаны области значений параметров, при которых эти отображения не имеют (отличных от неподвижных) периодических точек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Замыкание множества $\{(x, y) \in \text{Int}(I^2) : \|DF\| = 0\}$ называется *критическим множеством* $K = K(F)$ отображения F .

Данное определение критического множества отличается от [3], но они связаны между собой. Выпишем в явном виде $K(F)$ и его первые два образа и прообраза:

$$\begin{aligned} K &= \{(x, y) \in I^2 : y = q, 0 \leq x \leq 1\}, & F(K) &= \{(x, y) \in I^2 : x = \lambda f(y), 0 \leq y \leq 1\}, \\ F^{-1}(K) &= \{(x, y) \in I^2 : x = q, 0 \leq y \leq 1\}, \\ F^2(K) &= \left\{ (x, y) \in I^2 : x = \lambda f(y) \left(h\left(\frac{y}{\lambda}\right) \right)^s, 0 \leq y \leq \lambda \right\}, \\ F^{-2}(K) &= \left\{ (x, y) \in I^2 : q = \lambda f(x) (h(f(y)))^s \right\}. \end{aligned}$$

Отметим, что $F^{-2}(K)$ существует при $\lambda > q$.

Обозначим $R = F^2(I^2)$. Несложно показать, что $R = \{(x, y) \in I^2 : \lambda f(y)(h(y/\lambda))^s \leq x \leq \lambda f(y), 0 \leq y \leq \lambda\}$. Так что при $h(t) = t$ $R = \{(x, y) \in I^2 : \lambda^{1-s} y^s f(y) \leq x \leq \lambda f(y), 0 \leq y \leq \lambda\}$.

Введем обозначения: $M_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq q, 0 \leq y \leq q\}$, $M_2 = \{(x, y) : q \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq q\}$, $M_3 = \{(x, y) : q \leq x \leq 1, q \leq y \leq 1\}$, $M_4 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq q, q \leq y \leq 1\}$.

Вычислением проверяется, что справедливы следующие соотношения:

$$F(M_1) = F(M_4) \subset M_1 \cup M_2, \quad F(M_2) = F(M_3) \subset M_3 \cup M_4, \quad F^2(M_i) = R, \quad i = \overline{1, 4}.$$

ЛЕММА 1. Если $\lambda \leq q$, то $\text{NW}(F) \subset M_1$.

Пусть λ^* – минимальное решение уравнения $tf(t) = q$ такое, что $\lambda^* > q$.

ЛЕММА 2. Пусть $\lambda \in (q, \lambda^*)$ и $s > 0$ таковы, что $R \cap \text{Int}(M_4) = \emptyset$. Тогда $F(R \cap M_3) \subset R \cap M_3$ и $\text{NW}(F) \subset M_1 \cup M_3$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $h(t) = t$, то для всех λ : $q < \lambda < \lambda^*$, можно выбрать одно и то же s : $R \cap \text{Int}(M_4) = \emptyset$. Обозначим его s^* . Нетрудно проверить, что в качестве s^* можно взять 1. При этом формулировка леммы упрощается.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\lambda < \lambda^*$ и $s < s^*$, то $F(R \cap M_3) \subset R \cap M_3$ и $\text{NW}(F) \subset M_1 \cup M_3$.

Доказательство лемм 1, 2 не представляет затруднений и здесь не приводится.

ЛЕММА 3. Для любых s : $0 < s \leq 1$, система уравнений

$$z_1 = \lambda f(z_2)(f(z_1))^s, \quad z_2 = \lambda f(z_1)(f(z_2))^s \quad (2)$$

на отрезке $[0, q]$ имеет только такие решения, что $z_1 = z_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что если $z_1 = 0$, то и $z_2 = 0$, и наоборот. Поэтому, не теряя общности, можно считать, что $z_i > 0$, $i = 1, 2$.

Предположим, что лемма неверна, и существует решение (2) такое, что $z_1 \neq z_2$. Пусть для определенности $z_2 > z_1$. С учетом (2) из данного неравенства вытекает соотношение $f(z_1)(f(z_2))^s > f(z_2)(f(z_1))^s$, которое может быть преобразовано к виду $(f(z_1))^{1-s} > (f(z_2))^{1-s}$. Так как $1 - s \geq 0$ и $f(t)$ – монотонно возрастающая на $[0, q]$ функция, последнее означает, что $z_1 > z_2$.

ЛЕММА 4. Для любых натуральных $N \geq 3$ система уравнений

$$\begin{aligned} z_1 &= \lambda f(z_N)(f(z_{N-1}))^s, & z_2 &= \lambda f(z_1)(f(z_N))^s, \\ z_{i+2} &= \lambda f(z_{i+1})(f(z_i))^s, & i &= \overline{1, N-2}, \end{aligned} \quad (3)$$

на отрезке $[0, q]$ имеет только такие решения, что $z_1 = z_2 = \dots = z_N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что если $z_k = 0$ для некоторого k , то $z_i = 0$ для всех $i \neq k$. Поэтому, не теряя общности, можно считать, что $z_i > 0, i = \overline{1, N}$.

Предположим, что лемма неверна и существует решение (3) такое, что $z_k \neq z_i$ для некоторых $k, i: k \neq i$. Зафиксируем индексы $k = \min$ и $i = \max$ так, чтобы переменные $z_{\min}, z_{\max}$ принимали минимальное и максимальное значения и при этом $z_{\min} < z_{\min+1}, z_{\max} > z_{\max+1}$.

Если $0 < s \leq 1$, рассмотрим следующую пару уравнений:

$$z_{\max} = \lambda f(z_{\max-1})(f(z_{\max-2}))^s, \quad z_{\max+1} = \lambda f(z_{\max})(f(z_{\max-1}))^s. \quad (4)$$

Поскольку $z_{\max} > z_{\max+1}$, учитывая (4), получаем неравенство

$$f(z_{\max-1})(f(z_{\max-2}))^s > f(z_{\max})(f(z_{\max-1}))^s. \quad (5)$$

Преобразуя (5) к виду

$$(f(z_{\max-1}))^{1-s} > \frac{f(z_{\max})}{(f(z_{\max-2}))^s}$$

и учитывая, что $f(z_{\max}) > f(z_{\max-2})$, окончательно получаем неравенство

$$(f(z_{\max-1}))^{1-s} > (f(z_{\max-2}))^{1-s}.$$

Так как $1-s \geq 0$ и $f(t)$ – монотонно возрастающая на $[0, q]$ функция, это означает, что $z_{\max-1} > z_{\max-2}$. При этом получается, что справедливо соотношение

$$f(z_{\max-1})(f(z_{\max-2}))^s < f(z_{\max})(f(z_{\max-1}))^s,$$

т.е. $z_{\max} < z_{\max+1}$, что противоречит предположению.

Если $s \geq 1$, рассмотрим другую пару уравнений, а именно:

$$z_{\min} = \lambda f(z_{\min-1})(f(z_{\min-2}))^s, \quad z_{\min+1} = \lambda f(z_{\min})(f(z_{\min-1}))^s. \quad (6)$$

Поскольку $z_{\min} < z_{\min+1}$, из (6) вытекает неравенство

$$f(z_{\min-1})(f(z_{\min-2}))^s < f(z_{\min})(f(z_{\min-1}))^s. \quad (7)$$

Преобразуя (7) к виду

$$(f(z_{\min-1}))^{s-1} > \frac{(f(z_{\min-2}))^s}{f(z_{\min})}$$

и учитывая, что $f(z_{\min}) < f(z_{\min-2})$, окончательно получаем неравенство

$$(f(z_{\min-2}))^{s-1} > (f(z_{\min-1}))^{s-1}.$$

Так как $s-1 \geq 0$ и $f(t)$ – монотонно возрастающая на $[0, q]$ функция, это означает, что $z_{\min-2} > z_{\min-1}$. При этом получается, что справедливо соотношение

$$f(z_{\min})(f(z_{\min-1}))^s < f(z_{\min-1})(f(z_{\min-2}))^s,$$

т.е. $z_{\min} > z_{\min+1}$, что также противоречит предположению.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогично лемме 4 можно доказать следующие две леммы.

ЛЕММА 5. Если $f(t)/h(f(t))$ – монотонно возрастающая на $[0, q]$ функция, то для произвольного натурального $N \geq 3$ и $s: 0 < s \leq 1$, система уравнений

$$\begin{aligned} z_1 &= \lambda f(z_N)(h(f(z_{N-1})))^s, & z_2 &= \lambda f(z_1)(h(f(z_N)))^s, \\ z_{i+2} &= \lambda f(z_{i+1})(h(f(z_i)))^s, & i &= \overline{1, N-2}, \end{aligned} \quad (8)$$

на отрезке $[0, q]$ имеет только такие решения, что $z_1 = z_2 = \dots = z_N$.

ЛЕММА 6. Если $h(f(t))/f(t)$ – монотонно возрастающая на $[0, q]$ функция, то для произвольного натурального $N \geq 3$ и $s \geq 1$ система уравнений (8) на отрезке $[0, q]$ имеет только такие решения, что $z_1 = z_2 = \dots = z_N$.

Доказательство леммы 5 аналогично доказательству леммы 4 в случае $0 < s \leq 1$, а леммы 6 – в случае $s \geq 1$.

Прямым следствием утверждений, содержащихся в леммах 3 и 4, является теорема об отсутствии периодических точек у F при $\lambda \leq q$.

Ниже (в теоремах 1–3) предполагается, что $h(t) = t$.

ТЕОРЕМА 1. При $\lambda \leq q$ отображение F не имеет периодических точек

- а) периода 2, если $s \leq 1$;
- б) периода N , если $N \geq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что P – периодическая точка периода 2, т.е. $F^2(P) = P$. Тогда координаты P и ее итераций удовлетворяют системе уравнений (2). Но согласно лемме 3 при $0 < s \leq 1$ на $[0, q]$ система (2) имеет только такие решения, что $z_1 = z_2$. Следовательно, точки P и $F(P)$ совпадают, т.е. P – неподвижная точка отображения.

Рассмотрим общий случай. Пусть $N \geq 3$ – период точки P , так что $F^N(P) = P$. Тогда координаты P и ее итераций удовлетворяют системе уравнений (3). Но согласно лемме 4 для любого натурального $N \geq 3$ система (3) имеет на отрезке $[0, q]$ только такие решения, что $z_1 = z_2 = \dots = z_N$. Значит, P и $F(P)$ совпадают, т.е. P – неподвижная точка отображения.

Пусть $P = (x, y)$ – периодическая периода 2 точка F , так что $F^2(P) = P$. В переменных x, y это соотношение приобретает вид:

$$x = \lambda f(y)(f(x))^s, \quad y = \lambda f(x)(f(y))^s.$$

Исключая λ , получаем уравнение семейства кривых, на которых (если существуют) располагаются периодические точки периода 2 отображения:

$$y(f(y))^{1-s} = x(f(x))^{1-s}. \quad (9)$$

Одно из решений (9) – диагональ $x = y$. Это решение единственное, если функция $t(f(t))^{1-s}$ монотонно возрастает на $(0, 1)$. Последнее выполняется, в частности, когда $s = 1$, или если функция $f(t) + (1-s)t f'(t)$ положительна на $(0, 1)$.

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 2. Если при некотором $s > 0$ функция $f(t) + (1-s)tf'(t)$ положительна на $(0, 1)$, то при этом s отображение F не имеет периодических точек периода 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положительность $f(t) + (1-s)tf'(t)$ влечет за собой положительность производной от функции $t(f(t))^{1-s}$ и, как следствие, монотонное возрастание самой функции.

В частном случае (при $s = 1$) можно доказать, что у F нет циклов периода 3 при значениях λ много больших q . Именно, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $s = 1$ и $\lambda < \bar{q}$, где $\bar{q}$ – ближайшая к 0 точка экстремума функции $tf(t)$. Тогда отображение F не имеет периодических точек периода 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, как нетрудно проверить, координаты 3-периодических точек удовлетворяют системе уравнений

$$\lambda^{1-s}y^s f(y) = x(f(x))^{s^2}, \quad \lambda^{1-s}x^s f(x) = z(f(z))^{s^2}, \quad (10)$$

где x, y – координаты точки P : $P = F^3(P)$, а $z = \lambda f(x)(f(y))^s$. При $s = 1$ (10) превращается в систему уравнений $xf(x) = yf(y) = zf(z)$. Обозначим через $\bar{q}$ ближайшую к 0 точку экстремума функции $tf(t)$. Очевидно, $\bar{q} > q$. В силу монотонности $tf(t)$ на $[0, \bar{q}]$ всякое решение последней системы таково, что $x = y = z$. Следовательно, P – неподвижная точка F .

ЛЕММА 7. Если $\lambda < 1$ и $s > 0$ такие, что $R \cap M_4 = \emptyset$, то $\Phi(R \cap M_3) \subset \text{Int}(R \cap M_3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку условия леммы совпадают с условиями леммы 2, то $F(R \cap M_3) \subset R \cap M_3$. А так как F – диффеоморфизм $R \cap M_3$ на $F(R \cap M_3)$, то Φ – диффеоморфизм $R \cap M_3$ на $\Phi(R \cap M_3)$ и $\Phi(R \cap M_3) \subset R \cap M_3$. Таким образом, если показать, что границы множеств $R \cap M_3$ и $\Phi(R \cap M_3)$ не пересекаются, то лемма будет доказана. Заметим теперь, что граница множества $R \cap M_3$ образована подмножествами множеств K , $F(K)$ и $F^2(K)$ и выполняются соотношения

$$\begin{aligned} F(K \cap R \cap M_3) &\subset F(K) \cap R \cap M_3, \\ F(F(K) \cap R \cap M_3) &\subset F^2(K) \cap R \cap M_3, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} F(F(K) \cap R \cap M_3) \cap (F(K) \cap R \cap M_3) &= \emptyset, \\ F(F^2(K) \cap R \cap M_3) \cap (F^2(K) \cap R \cap M_3) &= \emptyset, \end{aligned}$$

$$F(K \cap R \cap M_3) \cap (K \cap R \cap M_3) = \emptyset. \quad (12)$$

Справедливость соотношений (11), (12) устанавливается непосредственно вычислениями. Далее, условие $R \cap M_4 = \emptyset$ означает по сути, что R не пересекается с подмножеством $F^{-1}(K) \cap \{(x, y) : y > q\}$ прообраза $F^{-1}(K)$. Но это значит, что F -образ множества $F^2(K) \cap R \cap M_3$ не имеет точек пересечения с множеством $K \cap R \cap M_3$. Следовательно, $\Phi(K \cap R \cap M_3) \cap K \cap R \cap M_3 = \emptyset$. Одновременно выполняются соотношения: $\Phi(K \cap R \cap M_3) \cap F(K) \cap R \cap M_3 = \emptyset$, $\Phi(K \cap R \cap M_3) \cap F^2(K) \cap R \cap M_3 = \emptyset$. В самом деле, в противном случае существует точка P такая, что $\Phi(P)$ принадлежит $F(K) \cap R \cap M_3$ или $F^2(K) \cap R \cap M_3$. Это означает, что одна из точек $F^2(P) = F^{-1}(\Phi(P))$ или $F(P) = F^{-2}(\Phi(P))$ принадлежит $K \cap R \cap M_3$. Но это противоречит (12). Таким образом, $\Phi(K \cap R \cap M_3) \subset \text{Int}(R \cap M_3)$.

Аналогично устанавливается справедливость соотношений $\Phi(F(K) \cap R \cap M_3) \subset \text{Int}(R \cap M_3)$ и $\Phi(F^2(K) \cap R \cap M_3) \subset \text{Int}(R \cap M_3)$. Отсюда вытекает, что граница множества $\Phi(R \cap M_3)$ лежит внутри $R \cap M_3$.

Отметим, что внешняя сложность формулировки условия леммы обманчива. На самом деле все сводится к проверке условия $\lambda f(y)(h(y/\lambda))^s > q$ при $y \in [q, \lambda]$, поскольку $F^2(K) \cap R \cap M_3$ – ближайшая к M_4 граница множества $R \cap M_3$ – является графиком функции $x = \lambda f(y)(h(y/\lambda))^s$. Таким образом, имеет место следующая

ЛЕММА 8. *Если λ : $q < \lambda < \lambda^*$, и $s > 0$ такие, что на $[q, \lambda]$ выполняется соотношение $\lambda f(y)(h(y/\lambda))^s > q$, то $\Phi(R \cap M_3) \subset \text{Int}(R \cap M_3)$.*

При $h(t) = t$ можно указать единое $s^* = 1$ такое, что для любых λ и s ($q < \lambda < \lambda^*$ и $0 < s < 1$), на $[q, \lambda]$ $\lambda f(y)(h(y/\lambda))^s > q$. Это позволяет упростить формулировку леммы 8 следующим образом.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если $h(t) = t$, $\lambda \in (q, \lambda^*)$ и $s \in (0, 1)$, то $\Phi(R \cap M_3) \subset \text{Int}(R \cap M_3)$.*

Отметим, что условие $R \cap M_3 \cap M_4 = \emptyset$ существенно и не может быть ослаблено, скажем, до $\text{Int}(R \cap M_3) \cap M_4 = \emptyset$ или $\text{Int}(M_4) \cap (R \cap M_3) = \emptyset$. То же самое касается формулировок леммы 8 и следствия 2, для которых нарушение условий $\lambda < \lambda^*$, $s < 1$ (даже до $\lambda = \lambda^*$, $s = 1$) может привести к тому, что сформулированные выше утверждения уже не будут выполняться.

Рассмотрим, например, отображение $(x, y) \mapsto (\lambda f(x)f(y), x)$. Здесь $h(t) = t$, $s = 1$. Если $\lambda = \lambda^*$, то $\lambda^* f(\lambda^*) = q$, и в M_3 отображение F имеет цикл периодических периода 3 точек: $(q, q) \mapsto (\lambda^*, q) \mapsto (q, \lambda^*) \mapsto (q, q)$. Ясно, что в этом случае утверждения лемм 7, 8 и следствия 2 не выполняются.

Изложенные выше результаты могут быть усилены, если функция $\tilde{T} = \lambda f(t)(h(t/\lambda))^s$ унимодальна на $[q, \lambda]$. Это условие порождает ограничения на свойства функций $f(t)$ и $h(t)$.

Обозначим через λ_* тот корень уравнения $f(\lambda_*) + \lambda_* f'(\lambda_*) = 0$, который больше чем q , и меньше чем λ_* .

ТЕОРЕМА 4. *Если $f''(t) < 0$, $h''(t) < 0$ на $[q, \lambda_*]$ и, кроме того, выполняется одно из условий:*

- а) $(R \cap M_3) \cap M_4 = \emptyset$ или
- б) $\lambda f(y)(h(y/\lambda))^s > q$ для $y \in [q, \lambda]$,

то $\text{NW}(F) \cap M_3$ – неподвижная точка отображения F .

При $h(t) = t$ условие теоремы 4 можно упростить следующим образом.

ТЕОРЕМА 5. *Если $f''(t) < 0$ на $[q, 1]$, $\lambda \in (q, \lambda_*)$ и $s \in (0, 1)$, то $\text{NW}(F) \cap M_3$ – неподвижная точка отображения F .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть $\rho(T, V)$ – расстояние между замкнутыми множествами T и V , т.е. $\rho(T, V) = \min_{t \in T, v \in V} \rho(t, v)$, где $\rho(t, v)$ – евклидово расстояние между точками $t \in T$ и $v \in V$. Так как $(R \cap M_3) \cap M_4 = \emptyset$, то $\rho(R \cap M_3, M_4) = \gamma_0 > 0$. Согласно предположению $x = \lambda f(y)(h(y/\lambda))^s$ – выпуклая и унимодальная на $[q, 1]$ функция. Следовательно, на $[q, \lambda]$ минимальное значение, равное $q + \gamma_0$, она достигает в одном из концов отрезка. Поэтому $q + \gamma_0 = \min\{\lambda(h(q/\lambda))^s, \lambda f(\lambda)\}$.

Рис. 1

Рассмотрим в M_3 криволинейный треугольник $C_0D_0E_0$, образованный отрезками $\{(x, q) : q + \gamma_0 \leq x \leq \lambda\}$, $\{(q + \gamma_0, y) : q \leq y \leq y_0\}$ и дугой $\{(x, y) : x = \lambda f(y), q \leq y \leq y_0\}$, где y_0 — значение координаты y точки D_0 , в которой кривая $x = \lambda f(y)$ пересекает прямую $x = q + \gamma_0$, с вершинами $C_0 = (\lambda, q)$, $D_0 = (q + \gamma_0, y_0)$ и $E_0 = (q + \gamma_0, q)$. Отметим, что $y_0 = \lambda$, если $f(\lambda) \leq (h(q/\lambda))^s$; в противном случае $y_0 > \lambda$.

По построению $C_0D_0E_0 \supset R \cap M_3$ и $\rho(C_0D_0E_0, M_4) = \gamma_0$. Покажем, что существует аналогичный $C_0D_0E_0$ криволинейный треугольник $C_1D_1E_1$ такой, что $C_1D_1E_1 \subset \text{Int}(C_0D_0E_0)$ и $\Phi(C_0D_0E_0) \subset C_1D_1E_1$.

Рассмотрим $F(C_0D_0E_0)$. Поскольку $F : (q + \gamma_0, y) \mapsto (x, q + \gamma_0)$, $K \rightarrow F(K)$, $F(K) \rightarrow F^2(K)$, то $F(C_0D_0E_0) \subset C_0D_0E_0 \cap \{(x, y) : y > q + \gamma_0\}$. Обозначим через H_0 точку $(q + \gamma_0, q + \gamma_0)$, через G_0 — точку $(\lambda f(q + \gamma_0), q + \gamma_0)$, так что $D_0H_0G_0 = C_0D_0E_0 \cap \{(x, y) : y \geq q + \gamma_0\}$ и $F(C_0D_0E_0) \subset D_0H_0G_0$.

Рассмотрим $F(D_0H_0G_0)$. Так как $F(D_0) = F^2(K) \cap H_0G_0$, а $F(E_0) = G_0$, то $F(D_0H_0) \subset H_0G_0$, а $F(H_0G_0) = C_1\overline{D_0} = \{(x, y) : x = \lambda_0 f(y), q + \gamma_0 \leq y \leq y_1\}$, где $C_1 = F(H_0)$, $\lambda_0 = \lambda(h(f(q + \gamma_0)))^s < \lambda$, а y_1 — значение координаты y точки $\overline{D_0}$, в которой пересекаются кривая $x = \lambda_0 f(y)$ с прямой $x = q + \gamma_0$. Заметим, что поскольку $\lambda_0 < \lambda$, то $y_1 < y_0$. Из сказанного ясно, что $F(D_0H_0G_0) \subset D_0H_0G_0 \cap \{(x, y) : x = \lambda_0 f(y), q + \gamma_0 \leq y \leq y_1\}$. Таким образом, $F(D_0H_0G_0) \subset \overline{D_0}H_0C_1 = D_0H_0G_0 \cap \{(x, y) : x = \lambda_0 f(y), q + \gamma_0 \leq y \leq y_1\}$.

Рассмотрим $F(\overline{D_0}H_0C_1)$. Как и выше, две стороны (из трех) треугольника отображаются в соседние ($F(\overline{D_0}H_0) \subset H_0C_1$, $F(H_0C_1) \subset C_1\overline{D_0}$), а третья сторона — дуга $C_1\overline{D_0} = \{(x, y) : x = \lambda_0 f(y), q + \gamma_0 \leq y \leq y_1\}$ — переходит в дугу $F(C_1\overline{D_0})$ кривой $x = \lambda f(\lambda_0 y / \lambda)(h(y/\lambda))^s$. Поскольку $\lambda_0 < \lambda$, для всех $y \in [q + \gamma_0, y_1]$ $f(y) < f(\lambda_0 y / \lambda)$ и, следовательно, точки данной дуги лежат выше (строго “над”) кривой $x = \lambda f(y)(h(y/\lambda))^s$. Это значит, что $\Phi(C_0D_0E_0) \subset \text{Int}(C_0D_0E_0)$. Положим $\gamma_1 = \rho\{F(C_1\overline{D_0}), M_4\}$. Согласно проведенным выше рассуждениям $\gamma_1 > \gamma_0$. Определим треугольник $C_1D_1E_1$ как множество $\{(x, y) : x \geq q + \gamma_1, y \geq q + \gamma_0\} \cap \overline{D_0}H_0C_1$, где вершины D_1 и E_1 совпадают с точками пересечения прямой $x = q + \gamma_1$ с кривой

$x = \lambda_0 f(y)$ и прямой $y = q + \gamma_0$ соответственно. Очевидно, для построенного таким образом треугольника $C_1 D_1 E_1$ справедливы сформулированные выше требования, т.е. $C_1 D_1 E_1 \subset \text{Int}(C_0 D_0 E_0)$ и $\Phi(C_0 D_0 E_0) \subset C_1 D_1 E_1$.

Применяя изложенные выше рассуждения к треугольнику $C_1 D_1 E_1$, можно построить треугольник $C_2 D_2 E_2$, обладающий теми же свойствами, что и $C_1 D_1 E_1$: $C_2 D_2 E_2 \subset \text{Int}(C_1 D_1 E_1)$ и $\Phi(C_1 D_1 E_1) \subset C_2 D_2 E_2$, и т.д. Так как

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} F^j(R \cap M_3) \subset C_n D_n E_n$$

для любого натурального n , то

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} F^j(R \cap M_3) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n D_n E_n \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{C} \tilde{D} \tilde{E}.$$

Покажем, что $\tilde{C} \tilde{D} \tilde{E}$ – точка.

Очевидно, что каждая из последовательностей $\{E_n\}$, $\{C_n\}$, $\{D_n\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, точек E_n, C_n, D_n является сходящейся и имеет предел. В самом деле, по построению каждая из точек $E_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}$ лежит соответственно выше и правее, ниже и правее, выше и левее точек E_n, C_n, D_n , так что их координаты образуют монотонно возрастающие (убывающие), ограниченные сверху (снизу) последовательности. Поэтому последовательности $\{E_n\}$, $\{C_n\}$ и $\{D_n\}$ имеют пределы. Обозначим $\tilde{E} = \lim E_n$, $\tilde{C} = \lim C_n$, $\tilde{D} = \lim D_n$ и рассмотрим последовательности $\{H_n\}$, $\{G_n\}$ и $\{\bar{D}_n\}$. Учитывая, что γ_n – ограниченная, монотонно возрастающая последовательность, нетрудно заметить, что $\lim H_n = \lim E_n = \tilde{E}$. А так как $H_n \in \{(x, y) : x = y\}$, $\tilde{E}$ также лежит на диагонали. Далее, из соотношений $G_n = F(E_n)$, $C_n = F(H_n)$ в силу непрерывности F вытекает, что $\lim G_n = \lim C_n = \tilde{C}$ и, кроме того, $F(\tilde{E}) = \tilde{C}$. Аналогично получается, что $\lim \bar{D}_n = \lim D_n = \tilde{D}$ и $F(\tilde{C}) = \tilde{D}$. Поэтому наборы отрезков $E_n C_n$ и $D_n E_n$ образуют сходящиеся последовательности. Их пределами являются точки либо отрезки. Логически допустимы следующие варианты:

- а) $\tilde{E} = \tilde{C} = \tilde{D}$;
- б) $\tilde{E} = \tilde{C} \neq \tilde{D}$ или $\tilde{E} \neq \tilde{C} = \tilde{D}$;
- в) $\tilde{E} \neq \tilde{C} \neq \tilde{D}$.

Если выполнено а), то поскольку $E_n, C_n D_n$ – крайние точки $C_n D_n E_n$, т.е. такие, на которых значения координат точек $C_n D_n E_n$ достигают своих максимальных и минимальных величин, получаем, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n D_n E_n$ – точка.

Случай б) в действительности не реализуется. В самом деле, с учетом $F(\tilde{E}) = \tilde{C}$ и $F(\tilde{C}) = \tilde{D}$ из $\tilde{E} = \tilde{C}$ получаем, что $\tilde{C} = F(\tilde{E}) = F(\tilde{C}) = \tilde{D}$, а из $\tilde{C} = \tilde{D}$, – что $F(\tilde{E}) = \tilde{C} = F(\tilde{C}) = F(\tilde{D})$, т.е. $\tilde{E} = \tilde{C} = \tilde{D}$.

Рассмотрим случай в). Как уже отмечалось, последовательности $\{E_n C_n\}$ и $\{D_n E_n\}$ сходятся соответственно к отрезкам $\tilde{E} \tilde{C}$ и $\tilde{D} \tilde{E}$. Покажем, что последовательность дуг $\{C_n D_n\}$ также сходится к дуге $\tilde{C} \tilde{D}$. В самом деле, по построению для всех $n \in \mathbb{Z}_+$ дуги $C_n D_n$ являются графиками функций $x = \lambda_{n-1} f(y)$, где $q < \lambda_n < \lambda_{n-1}$, и $C_n D_n \cap C_{n-1} D_{n-1} = \emptyset$. Таким образом, $C_n D_n$ образуют сходящуюся последовательность. А так как $0 < |f'(x)| < +\infty$ на $C_1 D_1 E_1$ и $C_n D_n E_n \subset C_1 D_1 E_1$ для $n \in \mathbb{Z}_+$, то сходимость

равномерная и, значит, $\tilde{C}\tilde{D} = \lim C_n D_n$ – дуга, совпадающая с графиком функции $x = \tilde{\lambda}f(y)$, где $\tilde{\lambda} = \lim \lambda_n$. Таким образом, $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n D_n E_n$ – точка или треугольник. Последнее, однако, невозможно, так как по построению $\tilde{E} \in \{(x, y) : x = y\}$ и, кроме того, попарно совпадают значения y -координат точек $\tilde{E}$ и $\tilde{C}$ и x -координат точек $\tilde{E}$ и $\tilde{D}$. Если обозначить через $(\tilde{y}, \tilde{y})$ координаты $\tilde{E}$, то (ввиду $F(\tilde{E}) = \tilde{C}$ и $F(\tilde{C}) = \tilde{D}$) из сказанного вытекает, что $\tilde{C} = (\tilde{x}, \tilde{y})$, где $\tilde{x} = \tilde{\lambda}f(\tilde{y})(h(f(\tilde{y})))^s$ и $\tilde{x} > \tilde{y}$, и $\tilde{D} = (\tilde{y}, \tilde{x})$. Следовательно, выполняется соотношение $\tilde{y} = \tilde{\lambda}f(\tilde{x})(h(f(\tilde{y})))^s$. В паре с $\tilde{x} = \tilde{\lambda}f(\tilde{y})(h(f(\tilde{y})))^s$ оно образует систему уравнений для определения $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$, из которой получается, что $\tilde{x}f(\tilde{x}) = \tilde{y}f(\tilde{y})$. Но согласно определению λ_* на $[q, \lambda_*]$ последнее уравнение имеет единственное решение $\tilde{x} = \tilde{y}$. Следовательно, наше предположение неверно и, значит, $\tilde{C}\tilde{D}\tilde{E}$ – точка.

С учетом теоремы 5 можно расширить область значений λ и s , при которых F не имеет (отличных от неподвижных) периодических точек.

ТЕОРЕМА 6. Если $f''(t) < 0$ на $[q, 1]$, $\lambda \in (q, \lambda_*)$ и $s \in (0, 1)$, то F не имеет (отличных от неподвижных) периодических точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим действие отображения F на $R \cap M_i$, $i = \overline{1, 3}$. С одной стороны, поскольку $F: F^{-1}(K) \rightarrow K$, $(0, 0) \mapsto (0, 0)$, и x -координата любой точки P переводится отображением в y -координату ее образа $F(P)$, справедливы соотношения: $F(R \cap M_1) \subset (R \cap M_1) \cup (R \cap M_2)$ и $F(R \cap M_2) \subset R \cap M_3$. С другой стороны, согласно лемме 2 $F(R \cap M_3) \subset R \cap M_3$. Отсюда ясно, что $NW(F) \cap M_2 = \emptyset$ и $NW(F) = (NW(F) \cap M_1) \cup (NW(F) \cap M_3)$, так что $\text{Per}(F) = \text{Per}(F|_{M_1}) \cup \text{Per}(F|_{M_3})$. Но по теореме 5 $\text{Per}(F|_{M_3})$ – неподвижная точка F . А из лемм 3 и 4 следует, что на M_1 F не имеет (отличных от неподвижных) периодических точек.

Большинство результатов ранее опубликованы в [4].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Добрынский В. А. Критические множества и унимодальные отображения квадрата // Докл. РАН. 1995. Т. 341. № 4. С. 442–445.
- [2] Добрынский В. А. Критические множества и унимодальные отображения квадрата // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 5. С. 669–680.
- [3] Gumowski I., Mira C. Dynamique Chaotique. Transformations Ponctuelles. Transition Ordre–Desordre. Toulouse: Editions Cepadues, 1980.
- [4] Добрынский В. А. Свойства циклов отображений, порождаемых разностными уравнениями второго порядка с нелинейностью типа произведение. Препринт. Киев: ИМ НАН Украины, 1994.