Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Зорич, В. М. Кесельман, Конформный тип и изопериметрическая размерность риманова многообразия, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 3, 379–385

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1292>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 15:49:21

УДК 517.54+514.774

КОНФОРМНЫЙ ТИП И ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ РИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ

В. А. Зорич, В. М. Кесельман

Вводится понятие конформной изопериметрической размерности и устанавливается ее связь с конформным типом риманова многообразия.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Классическое для геометрии изопериметрическое неравенство привело к таким понятиям как изопериметрическая функция [1], изопериметрическая размерность [2], изопериметрический профиль [3] и т.п. на произвольном римановом многообразии. Альфорс заметил определенную конформную инвариантность изопериметрических соотношений.

Развивая эти наблюдения, результаты указанных работ и нашей работы [4], мы вводим понятие *конформной изопериметрической размерности* и устанавливаем ее связь с конформным типом риманова многообразия.

2. Конформный тип риманова многообразия. Всюду далее мы рассматриваем n -мерное некомпактное риманово многообразие, которое обозначаем через M или (M, g) , где g – риманова метрика на M . Многообразие M называем *конформно-параболическим* или *конформно-гиперболическим*, если конформная емкость его идеальной границы (абсолюта) равна 0 или положительна соответственно. За более развернутыми формулировками приводимых здесь и далее понятий (как правило, выделенных курсивом) мы отсылаем читателя к работе [4] и к цитируемой там литературе.

В этой заметке для нас исходным будет следующий геометрический критерий конформного типа многообразия (см. [4], [5]), берущий начало при $n = 2$ от критерия Альфорса [6] конформной параболичности римановой поверхности.

ТЕОРЕМА 1. *Риманово многообразие M размерности n конформно-параболично тогда и только тогда, когда существует полная, конформная исходной, метрика g на M , для которой расходится интеграл*

$$\int^{+\infty} S^{1/(1-n)}(r) dr, \quad (1)$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-01-01218 и № 96-01-00901.

где $S(r)$ есть g -мера (площадь) геодезической g -сферы радиуса r .

Напомним, что метрика $\tilde{g}$ называется *конформно-эквивалентной* или, просто, *конформной* метрике g , если $\tilde{g} = \lambda^2 g$ для некоторой положительной функции λ на M . Далее при переходе от метрики g к метрике $\tilde{g}$ одноименные геометрические объекты будут наделаться тильдой.

3. Изопериметрическая размерность риманова многообразия. Справедлива следующая, восходящая к Альфорсу [1] и обобщенная Громовым [2],

ЛЕММА 1. Пусть g и $\tilde{g}$ – конформно-эквивалентные метрики на M . Тогда, если $\tilde{P}$ – произвольная изопериметрическая функция в метрике $\tilde{g}$, то

$$\int_{\tilde{V}_0}^{\tilde{V}_1} \tilde{P}^{n/(1-n)} \geq \int_{r_0}^{r_1} S^{1/(1-n)}, \quad (2)$$

где $\tilde{V}_0, \tilde{V}_1$ суть $\tilde{g}$ -объемы геодезических g -шаров радиусов r_0, r_1 соответственно.

Напомним, что функция $P: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ является *изопериметрической функцией* в некоторой метрике g на M , если для всех допустимых областей $D \subset M$ (т.е. имеющих конечные n и $n-1$ g -меры множеств D и ∂D , обозначаемые далее через $V(D)$ и $S(\partial D)$ соответственно) выполняется изопериметрическое неравенство

$$P(V(D)) \leq S(\partial D). \quad (3)$$

Изопериметрической размерностью многообразия M в метрике g называется точная верхняя грань всех таких чисел $p \geq 0$, для каждого из которых неравенство вида

$$V^{p-1}(D) \leq c \cdot S^p(\partial D) \quad (4)$$

(где c – некоторая, возможно зависящая от p постоянная) выполняется одновременно для всех допустимых областей $D \subset M$ таких, что $V(D) \geq \delta > 0$. Последнее условие обеспечивает выполнимость неравенства (4) при $p = 0$, так что изопериметрическая размерность корректно определена в любой метрике.

Непосредственным следствием леммы 1 является (см. [2])

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если для полного риманова многообразия (M, g) интеграл (1) расходится, то изопериметрическая размерность многообразия в любой конформной g метрике не больше размерности самого многообразия.

Из приведенного утверждения 1 с учетом теоремы 1 сразу получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Если многообразие конформно-параболическое, то в любой метрике, конформной исходной, его изопериметрическая размерность не больше его размерности.

Лемма 1 и последние утверждения показывают, что есть определенная степень конформной инвариантности изопериметрических соотношений. Ниже мы рассмотрим этот вопрос более детально и выявим точный смысл сказанного.

Отметим, что хотя в силу следствия 1 изопериметрическая размерность меняется ограниченно при конформных заменах метрик (во всяком случае, на конформно-параболических многообразиях), тем не менее изопериметрическая размерность сама по себе, конечно, не является конформным инвариантом.

Действительно, например, для стандартного бесконечного кругового цилиндра изопериметрическая размерность равна единице, а для стандартной евклидовой плоскости с выколотой точкой она равна 2, в то время как эти параболические многообразия конформно-эквивалентны.

4. Изопериметрическая функция и изопериметрическая размерность исчерпания. Мы собираемся исследовать связь между изопериметрическими соотношениями на римановом многообразии и его конформным типом. Поскольку конформный тип риманова многообразия определяется только структурой многообразия на бесконечности (массивностью абсолюта), естественно рассматривать изопериметрические соотношения лишь применительно к семейству областей, исчерпывающих наше многообразие, например, к семейству геодезических шаров, образующих *геодезическое исчерпание* многообразия. Рассматривая изопериметрические соотношения на таком семействе областей, мы естественно приходим к понятию изопериметрической функции и изопериметрической размерности, связанными с данным исчерпанием.

Уточним, что под *исчерпанием многообразия* M будем понимать произвольное семейство $E = \{D(t) \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ предкомпактных областей $D(t) \subset M$ с регулярной границей $\partial D(t)$ такое, что

$$t_1 < t_2 \implies \overline{D(t_1)} \subset D(t_2), \quad \bigcup_t D(t) = M.$$

Функцию $P: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ назовем *изопериметрической функцией исчерпания* $E = \{D(t) \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ в некоторой метрике g на M , если неравенство (3) выполняется для областей $D = D(t)$ при всех достаточно больших значениях t .

Изопериметрической размерностью исчерпания $E = \{D(t) \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ в метрике g назовем точную верхнюю грань всех чисел $p \geq 0$, для каждого из которых выполняется неравенство (4), когда D пробегает области $D(t)$ при всех достаточно больших значениях t .

В работе [4] было показано, что лемма 1 распространяется и на изопериметрические функции исчерпания. А именно, неравенство (2) остается в силе, даже если $\tilde{P}$ не универсальная (т.е. действующая для любых допустимых областей) изопериметрическая функция в метрике $\tilde{g}$, а является таковой только для g -шаров $B(r)$, $r \in [r_0, r_1]$. Поэтому с помощью теоремы 1 получаем следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *На конформно-параболическом многообразии M размерности n существует полная, конформная исходной, метрика (удовлетворяющая условию (1) теоремы 1), в которой геодезическое исчерпание E обладает следующим свойством:*

если функция $\tilde{P}$ является изопериметрической функцией исчерпания E в какой-либо метрике $\tilde{g}$, конформной исходной, то расходится интеграл

$$\int^{\tilde{V}} \tilde{P}^{n/(1-n)}, \quad (5)$$

где $\tilde{V}$ – объем многообразия M в метрике $\tilde{g}$.

Что касается изопериметрической размерности исчерпания, то хотя очевидно, что изопериметрическая размерность многообразия не больше изопериметрической размерности любого его исчерпания (в одной и той же метрике), тем не менее утверждение следствия 1 можно распространить и на изопериметрическую размерность исчерпания.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если многообразии конформно-параболическое, то существует геодезическое исчерпание (в некоторой полной конформной исходной метрике, удовлетворяющей условию (1) теоремы 1), изопериметрическая размерность которого в любой метрике, конформной исходной, не больше размерности самого многообразия.*

Действительно, пусть $E = \{B(r)\}$ – указанное в утверждении 2 исчерпание. Фиксируем произвольную, конформную исходной, метрику $\tilde{g}$ и обозначим через d изопериметрическую размерность исчерпания E в ней. Тогда для любого положительного числа $p < d$ на исчерпании E выполняется неравенство вида (4). Значит, функция $\tilde{P}(x) = c \cdot x^{(p-1)/p}$ является изопериметрической функцией исчерпания E в метрике $\tilde{g}$. Следовательно,

$$+\infty = \int^{\tilde{V}} \tilde{P}^{n/(1-n)} = c \cdot \int^{\tilde{V}} x^{(p-1)/p \cdot n/(1-n)} dx.$$

Отсюда $\tilde{V} = +\infty$ и $p \leq n$. Ввиду произвольности p получаем $d \leq n$, что и доказывает следствие 2.

Изопериметрическая размерность исчерпания, так же, как сама изопериметрическая размерность, не является конформным инвариантом риманова многообразия, что видно уже из примера, приведенного в конце п. 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Мы докажем ниже, что утверждение следствия 2, на самом деле, обратимо (см. следствие 3). Отметим, однако, что даже если изопериметрическая размерность геодезического исчерпания в какой-либо полной метрике, конформной исходной, не больше размерности многообразия, то это еще не означает, что многообразие конформно-параболично. Например, можно построить полное конформно-гиперболическое многообразие (M, g) , для которого $S(r) = r^{n-1} \ln r$. Нетрудно видеть, что изопериметрическая размерность его геодезического исчерпания в метрике g равна размерности многообразия.

Использование изопериметрической функции исчерпания мотивируется еще и тем, что универсальной изопериметрической функции на всем многообразии может, вообще говоря, не существовать (кроме тождественно нулевой), в то время как для любого исчерпания $E = \{D(t) \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ в заданной метрике g существует бесконечно много ненулевых изопериметрических функций. Более того, имеется *максимальная изопериметрическая функция* для E : таковой является, очевидно, функция $P_{\max}(x) := S(\partial D(t))$, где $x = V(D(t))$.

Отметим, что понятие максимальной изопериметрической функции исчерпания аналогично понятию изопериметрического профиля многообразия [3] в той же мере, в какой понятия изопериметрической функции исчерпания и изопериметрической размерности исчерпания аналогичны соответствующим понятиям изопериметрической функции и изопериметрической размерности многообразия.

В работе [4] нами получено следующее утверждение относительно максимальной изопериметрической функции геодезического исчерпания.

ЛЕММА 2. Пусть многообразие (M, g) полное. Функция $\tilde{R}$ является максимальной изопериметрической функцией исчерпания, геодезического в некоторой сферически конформной g метрике $\tilde{g}$, тогда и только тогда, когда интегралы (1) и (5) сходятся или расходятся одновременно.

Напомним, что метрика $\tilde{g}$ называется сферически конформной метрике g , если $\tilde{g} = \lambda^2(r)g$, где r – функция g -геодезического расстояния. Ясно, что для сферически конформных g метрик и только для них геодезические исчерпания совпадают.

5. Конформная изопериметрическая размерность исчерпания. Мы будем рассматривать далее только конформно-геодезические исчерпания многообразия, т.е. такие исчерпания, которые являются геодезическими в некоторой конформной исходной метрике. (По поводу возможности обобщений см. замечание 2 в конце работы.)

Будем говорить, что исчерпание E имеет конформно-параболический тип (соответственно конформно-гиперболический тип), если существует полная, конформная исходной, метрика g , в которой исчерпание E является геодезическим и интеграл (1) расходится (соответственно сходится).

Поскольку интеграл (1), как легко видеть, инвариантен относительно сферически конформных замен метрики g , а любая метрика сферически конформно эквивалентна некоторой полной метрике, то имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Произвольное конформно-геодезическое исчерпание риманова многообразия имеет либо конформно-параболический, либо конформно-гиперболический тип.

Тогда теорема 1 может быть переформулирована следующим образом.

ТЕОРЕМА 2. Риманово многообразие M является конформно-параболическим (соответственно конформно-гиперболическим) тогда и только тогда, когда существует (соответственно любое) конформно-геодезическое исчерпание M конформно-параболического типа (соответственно конформно-гиперболического типа).

Отметим, что на конформно-параболическом многообразии существуют исчерпания как конформно-параболического, так и конформно-гиперболического типов (см. [5]).

В связи с утверждением 3 естественно возникает задача выявления геометрических характеристик (инвариантов), определяющих конформный тип исчерпания.

Введем следующий конформный инвариант произвольного исчерпания.

Назовем конформной изопериметрической размерностью исчерпания $E = \{D(t) \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ точную верхнюю грань таких чисел $p \geq 0$, для каждого из которых найдется конформная исходной метрика, в которой выполняется неравенство вида (4) для областей $D = D(t)$ при всех достаточно больших значениях t .

На самом деле, для любого исчерпания конформная изопериметрическая размерность реализуется как изопериметрическая размерность исчерпания в некоторой полной, конформной исходной, метрике. Это, в частности, указывается в следующих теоремах, дающих критерии конформного типа исчерпания.

ТЕОРЕМА 3. Для произвольного конформно-геодезического исчерпания E n -мерного риманова многообразия M следующие утверждения эквивалентны:

- 1) E имеет конформно-параболический тип;
- 2) конформная изопериметрическая размерность E равна n ;
- 3) существует полная, конформная исходной, метрика на M , в которой максимальная изопериметрическая функция $P_{\max}$ исчерпания E имеет вид $P_{\max}(x) = x^{(n-1)/n}$ (как в $\mathbb{R}^n$); в частности, в этой метрике изопериметрическая размерность исчерпания равна n .

ТЕОРЕМА 4. Для произвольного конформно-геодезического исчерпания E риманова многообразия M следующие утверждения эквивалентны:

- 1) E имеет конформно-гиперболический тип;
- 2) конформная изопериметрическая размерность E равна $+\infty$;
- 3) существует полная, конформная исходной, метрика на M , в которой максимальная изопериметрическая функция $P_{\max}$ исчерпания E имеет вид $P_{\max}(x) = x$ (как в H^n); в частности, в этой метрике изопериметрическая размерность исчерпания равна $+\infty$.

Доказательства теорем похожи, поэтому докажем, например, теорему 3. Импликация 1) $\implies$ 3) справедлива в силу леммы 2, которую надо применить к функции $\tilde{P}(x)$ вида $x^{(n-1)/n}$.

С другой стороны, если для E имеет место утверждение 3), то в некоторой полной, конформной исходной, метрике g функция объема $V(r)$ геодезического шара радиуса r при больших r удовлетворяет дифференциальному уравнению $V^{(n-1)/n}(r) = V'(r)$, решая которое при больших r находим $V(r) = c \cdot r^n$ и $S(r) = nc \cdot r^{n-1}$. Следовательно, исчерпание E конформно-параболично, т.е. 3) $\implies$ 1).

Далее, если E обладает свойством 1), то конформная изопериметрическая размерность исчерпания E согласно следствию 2 не больше n . Если же E удовлетворяет 3), то его конформная изопериметрическая размерность, очевидно, не меньше n . Тем самым доказана эквивалентность всех утверждений 1)–3) теоремы 3.

С учетом теоремы 2 из теорем 3 и 4 соответственно получаем следующие критерии конформного типа риманова многообразия.

СЛЕДСТВИЕ 3. Риманово многообразие размерности n конформно-параболично тогда и только тогда, когда существует конформная исходной полная метрика, в которой его геодезическое исчерпание имеет конформную изопериметрическую размерность, равную n .

СЛЕДСТВИЕ 4. Риманово многообразие конформно-гиперболично тогда и только тогда, когда в любой полной, конформной исходной, метрике его геодезическое исчерпание имеет конформную изопериметрическую размерность, равную $+\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Результаты данной работы, полученные для конформно-геодезических исчерпаний, можно распространить (без принципиальных усложнений в их доказательствах) на достаточно общие исчерпания. При этом, вместо функции $S(r)$ в метрике g следует рассматривать ее аналог – функцию

$$S_h(r) = \int_{h=r} |\nabla h|^{n-1} d\sigma,$$

где h – достаточно регулярная функция, порождающая данное исчерпание (как семейство множеств $D(r)$, на которых $h < r$), $|\nabla h|$ – модуль градиента функции h , $d\sigma$ – элемент $(n - 1)$ -меры в метрике g соответственно.

Авторы благодарят Н. А. Зорич за помощь в подготовке электронной версии текста этой заметки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ahlfors L. Zur Theorie des Überlagerungsflächen // Acta Math. 1935. V. 65. P. 157–194.
- [2] Gromov M. Structures métriques pour les variétés riemanniennes. Notes du cours rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu. Paris: CEDIC/Fernand-Nathan et Soc. Math. de France, 1981.
- [3] Pansu P. Quasiconformal mappings and manifolds of negative curvature // Lecture Notes in Math. 1986. V. 1201. P. 212–229.
- [4] Зорич В. А., Кесельман В. М. О конформном типе риманова многообразия // Функцион. анализ и его прилож. 1996. Т. 30. № 2. С. 40–55.
- [5] Grimaldi R., Pansu P. Sur la croissance du volume dans une classe conforme // J. Math. Pures Appl. (9). 1992. V. 71. № 1. P. 1–19.
- [6] Ahlfors L. Sur le type d'une surface de Riemann // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A. 1935. V. 201. P. 30–32.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
 Кемеровский государственный университет

Поступило
 24.06.96