Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Кириллов, О теореме Марцинкевича–Зигмунда, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 3, 386–390

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1293>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 15:59:40

УДК 517.518

О ТЕОРЕМЕ МАРЦИНКЕВИЧА–ЗИГМУНДА

С. А. Кириллов

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – ортонормированная система на отрезке $[0, 1]$ и $\|\varphi_n\|_\infty \leq M_n$. В 1937 г. Марцинкевич и Зигмунд получили оценку нормы в $L_q[0, 1]$ суммы ряда $\sum_{n=1}^\infty c_n \varphi_n(x)$ при условии, что $\{M_n\}$ монотонно возрастает. В работе показано, что это условие отбросить нельзя.

Библиография: 7 названий.

В 1937 г. Марцинкевич и Зигмунд [1] доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА А. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – ортонормированная система на отрезке $[0, 1]$ и $\|\varphi_n\|_\infty \leq M_n$ ($n = 1, 2, \dots$), $\{M_n\}$ монотонно возрастает. Тогда если $q > 2$ и

$$\Omega_q(c) \equiv \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^q n^{q-2} M_n^{q-2} \right)^{1/q} < \infty,$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad (1)$$

сходится к $f \in L_q[0, 1]$ и $\|f\|_q \leq C \Omega_q(c)$.

Здесь, однако, возникает вопрос, существенно ли требование монотонности возрастания $\{M_n\}$?

Позднее в явном виде этот вопрос ставился, например, в работах Стейна и Вейса [2], Литтлвуда [3], Буллина [4], Коляды [5].

Иначе задача может быть сформулирована следующим образом: обеспечивает ли в условиях теоремы А конечность величины

$$\tilde{\Omega}_q(c) \equiv \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^q n^{q-2} \|\varphi_n\|_\infty^{q-2} \right)^{1/q} \quad (2)$$

принадлежность суммы ряда (1) пространству $L_q[0, 1]$?

В данной работе дается отрицательный ответ, а именно, мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Существует ортонормированная на $[0, 1]$ система функций $\{\varphi_n(x)\}$, $\varphi_n \in L_\infty[0, 1]$ ($n = 1, 2, \dots$), такая, что для любого $q > 2$ найдется последовательность $\{c_n\}$, для которой выполнено (2), ряд (1) сходится в $L_2[0, 1]$, но его сумма не принадлежит $L_q[0, 1]$.*

В доказательстве этой теоремы используется конструкция, применявшаяся А. В. Масловым [6]. Идея этой конструкции состоит в разбиении системы Уолша на “пачки”; функциями искомой ортонормированной системы являются нормированные в L_2 суммы функций Уолша по этим пачкам.

Пусть $\{\omega_n(x)\}$ – система Уолша. Она определяется следующим образом: $\omega_0(x) \equiv 1$, $x \in [0, 1]$, и если $n \in \mathbb{N}$ представимо в виде $n = \sum_{k=0}^m \alpha_k 2^k$, $\alpha_k = 0, 1$, то

$$\omega_n(x) = \prod_{k=0}^m (r_{k+1}(x))^{\alpha_k},$$

где $r_k(x) = \text{sign} \sin 2^k \pi x$ – функции Радемахера. Положим теперь

$$W_0(x) = \omega_0(x) \quad \text{и} \quad W_n(x) = \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \omega_k(x), \quad x \in [0, 1],$$

при $n \in \mathbb{N}$.

В доказательстве теоремы нам потребуются следующие утверждения.

ЛЕММА 1 (см. [6]). *При всех $n \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned} W_n(x) &= \begin{cases} 2^{n-1}, & x \in (0, 2^{-n}), \\ -2^{n-1}, & x \in (2^{-n}, 2^{-n+1}), \\ 0 & \text{для остальных } x, \end{cases} \\ \sum_{k=0}^n W_k(x) &= \begin{cases} 2^n, & x \in (0, 2^{-n}), \\ 1, & x = 0, 1/2, 1, \\ 0 & \text{для остальных } x. \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

ЛЕММА 2 (см., например, [7]). *Пусть положительная последовательность $\{\beta_n\}$ монотонно убывает, $\alpha_n \geq 0$ и существует a , $0 < a < 1$, такое, что $\beta_{n+1} < a\beta_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Тогда при $p > 0$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right)^p \beta_n \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^p \beta_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Положим $m_0 = \tilde{m}_0 = 0$, $h_1 = \tilde{m}_1 = 1$,

$$h_n = 2^{2^{n-1}}, \quad \tilde{m}_n = 2^n \cdot 2^{2^n}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Пусть если $h_n \leq k < h_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, то $\tilde{s}_k = h_{n+1}\gamma_n/k$, где γ_n подберем так, чтобы

$$\sum_{k=h_n}^{h_{n+1}-1} \tilde{s}_k = \tilde{m}_n - \tilde{m}_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

При этом найдутся абсолютные постоянные C_1 и C_2 такие, что $0 < C_1 < \gamma_n < C_2$, $n = 1, 2, \dots$. В этом легко убедиться, если заметить, что

$$\tilde{m}_n - \tilde{m}_{n-1} = \gamma_n h_{n+1} \sum_{k=h_n}^{h_{n+1}-1} \frac{1}{k} \asymp \gamma_n h_{n+1} 2^n \asymp \gamma_n (\tilde{m}_n - \tilde{m}_{n-1}).$$

Теперь выберем и зафиксируем натуральное l так, чтобы $2^{-l} < C_1$, и положим $s_k = 2^l \tilde{s}_k$, $m_k = 2^l \tilde{m}_k$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда

$$m_{n+1} > 2m_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

$$s_k > 1, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

$$\sum_{k=h_n}^{h_{n+1}-1} s_k = m_n - m_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Определим теперь искомую ортонормированную систему $\{\varphi_k(x)\}$. Если $h_n \leq k < h_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, то положим

$$\Omega_k = \left\{ j \in \mathbb{N} : m_{n-1} + \sum_{i=h_n}^{k-1} s_i \leq j < m_n + \sum_{i=h_n}^k s_i \right\}.$$

Отметим, что в силу (5) Ω_k непусто при $k \in \mathbb{N}$. Пусть

$$\varphi_k(x) = s_k^{-1/2} \sum_{j \in \Omega_k} \omega_j(x).$$

Ясно, что $\{\varphi_k(x)\}$ – ортонормированная система на $[0, 1]$ и при $h_n \leq k < h_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, выполнено $\|\varphi_k\|_\infty \leq s_k^{1/2}$. Заметим, что верхние грани функций системы в каждой пачке $[h_n, h_{n+1}]$ монотонно убывают.

Определим последовательность $\{c_k\}$ следующим образом. Если $h_n \leq k < h_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, то положим

$$c_k = s_k^{1/2} p_n, \quad \text{где } p_n = m_n^{-(q-1)/q}. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x). \quad (8)$$

Из (7), (6) и (4) замечаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \sum_{n=1}^{\infty} p_n^2 \sum_{k=h_n}^{h_{n+1}-1} s_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} m_n^{(2-q)/q} < \infty.$$

Значит, ряд (8) сходится по норме L_2 к некоторой функции f_0 . Пусть при $n = 1, 2, \dots$

$$R_n(x) = \sum_{k=h_n}^{h_{n+1}-1} s_k^{1/2} \varphi_k(x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} R_1(x) &= \begin{cases} m_1, & x \in (0, m_1^{-1}), \\ 1, & x = 0, 1/2, 1, \\ 0 & \text{для остальных } x, \end{cases} \\ R_n(x) &= \begin{cases} m_n - m_{n-1}, & x \in (0, m_n^{-1}), \\ -m_{n-1}, & x \in (m_n^{-1}, m_{n-1}^{-1}), \quad n = 2, 3, \dots \\ 0 & \text{для остальных } x, \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} R_1(x) &= \sum_{k=h_1}^{h_2-1} s_k^{1/2} \varphi_k(x) = \sum_{k=h_1}^{h_2-1} \sum_{j \in \Omega_k} \omega_j(x) \\ &= \sum_{j=m_0}^{m_1-1} \omega_j(x) = \sum_{j=0}^{2^l-1} \omega_j(x) = \begin{cases} m_1, & x \in (0, m_1^{-1}), \\ 1, & x = 0, 1/2, 1, \\ 0 & \text{для остальных } x, \end{cases} \end{aligned}$$

и при $n = 2, 3, \dots$ из определения $\{\varphi_k(x)\}$ следует (если $e_n = 2^n + n + l$)

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \sum_{k=h_n}^{h_{n+1}-1} s_k^{1/2} \varphi_k(x) = \sum_{k=h_n}^{h_{n+1}-1} \sum_{j \in \Omega_k} \omega_j(x) \\ &= \sum_{j=m_{n-1}}^{m_n-1} \omega_j(x) = \sum_{j=2^{e_n-1}}^{2^{e_n}-1} \omega_j(x) = \sum_{k=0}^{e_n} W_k(x) - \sum_{k=0}^{e_{n-1}} W_k(x). \end{aligned}$$

Далее, в силу (3)

$$R_n(x) = \begin{cases} 2^{e_n} - 2^{e_{n-1}}, & x \in (0, 2^{-e_n}), \\ -2^{e_{n-1}}, & x \in (2^{-e_n}, 2^{-e_{n-1}}), \\ 0 & \text{для остальных } x, \end{cases}$$

что доказывает (9). Теперь ясно, что $f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n R_n(x)$ почти всюду. Положим $\delta_n = \sum_{k=1}^n m_k \Delta p_k$, $\Delta p_k = p_k - p_{k+1}$, $n = 1, 2, \dots$. Ясно, что

$$f_0(x) = \begin{cases} \delta_n, & x \in (m_{n+1}^{-1}, m_n^{-1}), \quad n = 1, 2, \dots, \\ 1, & x = 0, 1/2, 1, \\ 0 & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Заметим, что $f_0 \notin L_q[0, 1]$. Действительно, пользуясь леммой 2, получаем

$$\|f_0\|_q^q \asymp \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \Delta p_k m_k \right)^q m_n^{-1} \asymp \sum_{n=1}^{\infty} (\Delta p_n)^q m_n^{q-1} = \infty.$$

В то же время

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q k^{q-2} \|\varphi_k\|_{\infty}^{q-2} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} p_n^q \sum_{k=h_n}^{h_{n+1}-1} k^{q-2} s_k^{q-1} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} p_n^q \sum_{k=h_n}^{h_{n+1}-1} k^{q-2} \frac{h_{n+1}^{q-1}}{k^{q-1}} \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} p_n^q \sum_{k=h_n}^{h_{n+1}-1} \frac{h_{n+1}^{q-1}}{k} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} p_n^q m_n^{q-1} 2^{-n(q-2)} \\ &= C \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n(q-2)} < \infty, \end{aligned}$$

что и доказывает нашу теорему.

Автор выражает глубокую признательность В.И. Коляде за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Marcinkiewicz J., Zygmund A. Some theorems on orthogonal systems // Fund. Math. 1937. V. 28. P. 309–335.
- [2] Stein E. M., Weiss G. Interpolation of operators with change of measures // Trans. Amer. Math. Soc. 1958. V. 87. P. 159–172.
- [3] Littlewood J. E. On a theorem of Paley // J. London Math. Soc. 1954. V. 29 (116). P. 387–395.
- [4] Bullen P. S. Properties of the coefficient of orthonormal sequences // Canad. J. Math. 1961. V. 13. № 12. P. 305–315.
- [5] Коляда В. И. О некоторых обобщениях теоремы Харди–Литтлвуда–Пэли // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 3. С. 24–34.
- [6] Маслов А. В. К вопросу об окончательности оценок для коэффициентов Фурье по общим ортонормированным системам // Изв. вузов. Матем. 1985. № 8. С. 23–34.
- [7] Leindler L. Generalization of inequalities of Hardy and Littlewood // Acta Sci. Math. (Szeged). 1970. V. 31. № 3–4. P. 279–285.

Одесская государственная академия пищевых технологий

Поступило

19.04.96

Исправленный вариант

15.10.97