Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Ю. Кочетков, Соотношения и деформации нечетных гамильтоновых супералгебр, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 3, 391–401

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1294>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 13:04:15

УДК 512

СООТНОШЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ НЕЧЕТНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СУПЕРАЛГЕБР

Ю. Ю. Кочетков

Вычисляются следующие (ко)гомологии супералгебры Ли $H(0, n)$: $H^2(H, H)$ – ко-гомологии с коэффициентами в присоединенном модуле и $H_2(LH)$ – гомологии нильпотентной подалгебры. Показано, что $\dim H^2(H, H) = 1$.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Деформации и соотношения алгебр и супералгебр Ли изучались в ряде недавних работ. Естественное предположение, что простые алгебры – жесткие, и что в нильпотентных подалгебрах классических алгебр векторных полей нет непростых соотношений (см. ниже) при достаточно большом количестве переменных, было опровергнуто в работах [1], [2]. В обеих упомянутых работах изучается гамильтонова алгебра. В данной работе, как и в [3], подробно рассмотрен случай нечетной гамильтоновой супералгебры Ли. Результаты вычислений, представленные в [3], здесь уточняются, обобщаются и доказываются. Отметим, что наши методы отличаются от методов, использованных в [4]–[6], но сходны с методами работы [2].

Основное поле – $\mathbb{Q}$. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ – нечетные переменные. Мономы $\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}$ мы будем обозначать заглавными E с индексами. Если $E = \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}$, то через $|E|$ обозначается длина E , т.е. $|E| = k$. С мономами мы будем обращаться как с подмножествами множества $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, т.е. использовать операции “ $\cup, \cap, \setminus$ ” и обозначения “ $\in, \subset$ ” в очевидном смысле (если $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, то $E_1 E_2 = 0$, а операция $E_1 \cup E_2$ не определена). Определим также операцию суммы двух мономов по модулю 2 как их симметрическую разность: $E_1 + E_2 = (E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)$. Нечетной гамильтоновой супералгеброй $H(0, n) = H$ называется линейная оболочка мономов E , $0 < |E| < n$. Скобку мы определим на мономах и продолжим на всю алгебру билинейно: $[E_1, E_2] \neq 0$ только в случае $|E_1 \cap E_2| = 1$, при этом

$$[E_1, E_2] = (-1)^{|E_1|} \frac{\partial E_1}{\partial \xi_i} \frac{\partial E_2}{\partial \xi_i}, \quad \text{где } \xi_i = E_1 \cap E_2.$$

Эта операция задает на H структуру супералгебры Ли. Алгебра $H(0, n)$ простая и является удобной моделью при изучении гомологических свойств “настоящих” гамильтоновых алгебр $H(2n)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-01-01263, и Международного научного фонда, грант RO 4300.

Нечетная гамильтонова супералгебра изоморфна супералгебре Ли гамильтоновых векторных полей на нечетном n -мерном суперпространстве. Точнее, пусть $\delta_i = \partial/\partial\xi_i$. Тогда моному E мы сопоставляем векторное поле $\delta_i(\partial E/\partial\xi_i)$. Это поле аннулирует дифференциальную форму $\sum_{i=1}^n (d\xi_i)^2$, т.е. является нечетным гамильтоновым полем, поскольку дифференциал нечетной переменной четен. Это соответствие является супераналогом канонического изоморфизма между алгеброй Ли гамильтоновых векторных полей и алгеброй Ли функций Гамильтона.

Линейная оболочка мономов E таких, что $|E| > 2$, является нильпотентной подсупералгеброй в H и обозначается через LH . В этой работе будут описаны соотношения в LH и деформации в H , т.е. будут вычислены вторая группа гомологий $H_2(LH)$ алгебры LH и вторая группа когомологий $H^2(H, H)$ алгебры H с коэффициентами в присоединенном модуле. Эти две задачи тесно связаны. Сначала введем необходимые определения.

Алгебра H *градуирована*: градуировка вводится формулой $\deg(E) = |E| - 2$, тогда $\deg([E_1, E_2]) = \deg(E_1) + \deg(E_2)$. Кроме того, в H имеется n “нечетных” градуировок $w_i, i = 1, \dots, n$:

$$w_i(E) = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi_i \in E, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad w_i([E_1, E_2]) \equiv w_i(E_1) + w_i(E_2) \pmod{2}.$$

Все элементы, циклы, цепи, коциклы, гомологии и когомологии будут предполагаться однородными относительно градуировок $\deg$ и $w_i, i = 1, \dots, n$. Набор значений $\{w_i(g)\}$ для однородного элемента (цепи, цикла и пр.) будет рассматриваться как моном и обозначаться W , т.е. $\xi_i \in W$, если $w_i(g) = 1$. Все теоретико-множественные операции применимы к W .

Прежде чем формулировать основные результаты работы, сделаем замечание. Если цикл $c \in C_2(LH)$ имеет степень 2, то он нетривиален. Такие циклы мы будем называть *простыми*. *Непростые циклы* – это циклы степени 3 и выше. Вторая группа непростых гомологий LH будет обозначаться $\tilde{H}_2(LH)$.

ТЕОРЕМА 1. *Выполнено $\dim(\tilde{H}_2(LH)) = n$. Однородный нетривиальный цикл имеет степень 3, вес $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (единица на i -м месте, $i = 1, \dots, n$) и имеет представителя $c = E \wedge \xi_i E$, где $|E| = 3$.*

ТЕОРЕМА 2. *Выполнено $\dim(H^2(H, H)) = 1$. Нетривиальный коцикл описывается следующей формулой: $c(EE_1, EE_2) = (-1)^{|EE_1|} E_1 E_2$, где $|E| = 3$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Это утверждение сходно с результатом работы [4]. Формула из формулировки теоремы 2 аналогична формуле, определяющей скобку

$$[\xi E_1, \xi E_2] = (-1)^{|\xi E_1|} E_1 E_2.$$

ТЕОРЕМА 3. *Определенный в теореме 2 коцикл c задает глобальную деформацию h :*

$$h(E_1, E_2) = c_0(E_1, E_2) + t c_1(E_1, E_2) + t^2 c_2(E_1, E_2) + t^3 c_3(E_1, E_2) + \dots,$$

где $c_0(E_1, E_2) = [E_1, E_2]$, c_1 – это коцикл c , а 2-коцепь c_i определяется следующим образом:

$$c_i(EE', EE'') = (-1)^{|EE'|} E' E'', \quad |E| = 2i + 1.$$

2. Соотношения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $E_1 \wedge E_2$ — произвольная 2-цепь, $3 < |E_1| \leq |E_2|$, и пусть $\xi \notin E_1$. Вычисляя дифференциал $d(\xi E_{11} \wedge \xi E_{12} \wedge E_2)$, где $E_{11} \cup E_{12} = E_1$, получаем

$$E_1 \wedge E_2 \sim \pm \xi E_{11} \wedge [\xi E_{12}, E_2] \pm \xi E_{12} \wedge [\xi E_{11}, E_2].$$

Поэтому любая 2-цепь может быть представлена как линейная комбинация 2-цепей $E_1 \wedge E_2$ таких, что $|E| = 3$. Из условий однородности следует, что надо рассмотреть четыре случая:

- 1) $|E_1 \cap E_2| = 0$;
- 2) $|E_1 \cap E_2| = 1$;
- 3) $|E_1 \cap E_2| = 2$;
- 4) $|E_1 \cap E_2| = 3$.

1) (Самый трудный случай). Пусть $|E_1| + |E_2| < n$ и $\xi \notin E_1 \cup E_2$. Тогда $\pm E_1 \wedge E_2 = d(E_1 \wedge \xi E' \wedge \xi E'')$, где $E' \cap E'' = \emptyset$ и $E' \cup E'' = E_2$. Пусть теперь $|E_1| + |E_2| = n$. Рассмотрим следствия из соотношений вида $d(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3)$, где $|E_1| = |E_2| = 3$, $|E_1 \cap E_2| = |E_1 \cap E_3| = |E_2 \cap E_3| = |E_1 \cap E_2 \cap E_3| = 1$, и если $\xi_i \in E_1 + E_2$, то $i \leq 6$. Имеем $\xi_i \xi_j \xi_k \wedge E' \sim (-1)^{i+j+k} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \wedge E$ и $\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l \wedge E'' \sim (-1)^{i+j+k+l} 2 \cdot \xi_1 \xi_2 \xi_3 \wedge E$. Соотношения вида

$$\begin{aligned} & d(\xi_1 \xi_2 \xi_7 \wedge \xi_1 \xi_3 \xi_4 \wedge \xi_1 \xi_5 \xi_6 \cdots - \xi_2 \xi_4 \xi_5 \wedge \xi_3 \xi_5 \xi_7 \wedge \xi_1 \xi_5 \xi_6 \cdots \\ & + \xi_1 \xi_2 \xi_7 \wedge \xi_3 \xi_5 \xi_7 \wedge \xi_4 \xi_6 \xi_7 \cdots) \\ & = 2 \cdot \xi_3 \xi_5 \xi_7 \wedge E_1 + \xi_1 \xi_3 \xi_4 \wedge E_2 + \xi_2 \xi_4 \xi_5 \wedge E_3 - \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_5 \wedge E_4 \end{aligned}$$

позволяют распространить эти правила на все цепи вида $E_1 \wedge E_2$, где $|E_1| = 3$ или 4. Далее получаем, что $E_1 \wedge E_2 \sim \pm k \cdot \xi_1 \xi_2 \xi_3 \wedge E$, где $k = |E_1| - 2$. Но $E_1 \wedge E_2 = \pm E_2 \wedge E_1 \sim l \cdot \xi_1 \xi_2 \xi_3 \wedge E$, где $l = |E_2| - 2$. Поэтому $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \wedge E \sim 0$.

2) Для доказательства теоремы в этом случае, достаточно доказать эквивалентность с точностью до множителя двух любых цепей $E_1 \wedge E_2 \sim E_3 \wedge E_4$ одинаковой степени и веса таких, что $|E_1| = |E_2| = 3$ и $|E_1 \cap E_2| = |E_3 \cap E_4| = 1$. Пусть $\xi_i \in E_1 \cap E_2$. Тогда из соотношений вида

$$d(\xi_i \xi_j \xi_k \wedge \xi_i \xi_j \xi_l \wedge \xi_j \cdots) = \pm \xi_i \xi_j \xi_k \wedge \xi_i \cdots \pm \xi_i \xi_j \xi_l \wedge \xi_i \cdots$$

следует, что $\xi_i \xi_j \xi_k \wedge \xi_i E' \sim \pm \xi_i \xi_l \xi_m \wedge \xi_i E''$. Рассмотрение соотношений

$$d(\xi_i \xi_j \xi_k \wedge \xi_p \xi_q \xi_r \wedge \xi_i \xi_p \cdots) = \pm \xi_i \xi_j \xi_k \wedge \xi_i \cdots \pm \xi_p \xi_q \xi_r \wedge \xi_p \cdots$$

завершает доказательство теоремы 1 в этом случае.

3) Этот случай практически очевиден, так как

$$\xi_i \xi_j \xi_k \wedge \xi_i \xi_j E = \pm \frac{1}{2} d(\xi_i \xi_j \xi_k \wedge \xi_i \xi_j \xi_k \wedge \xi_k E).$$

4) Рассмотрим цепь $c = \xi_i \xi_j \xi_k \wedge \xi_i \xi_j \xi_k E$. Если $|E| > 1$, то $c = \pm d(\xi_i \xi_j \xi_k \wedge \xi_i \xi_j \xi_k \wedge \xi E) \sim 0$, где $\xi \notin E \cup \xi_i \xi_j \xi_k$. Если $|E| = 1$, то, как легко убедиться, $E_1 \wedge E_1 \xi_i$ — нетривиальный цикл и $E_1 \wedge E_1 \xi_i \sim E_2 \wedge E_2 \xi_i$ для любых мономов E_1, E_2 , $|E_1| = |E_2| = 3$.

Доказательство теоремы 1 закончено.

3. Деформации.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Доказательство представляет собой анализ большого числа отдельных случаев, некоторые из которых требуют тщательного рассмотрения. Для того чтобы упростить изложение, мы введем соглашения об обозначениях.

Соглашения. Напомним, что W – это вес исследуемого коцикла. Если $|W| = k$, то мы будем считать, что $W = \xi_1 \dots \xi_k$. Моном $E = \xi_{i_1} \dots \xi_{i_k}$ будет обозначаться $(i_1, \dots, i_k)$. Через c будет обозначаться исследуемый коцикл, через c_1 – 1-коцепь. Степень $\deg(c)$ однородного коцикла c определяется как $\deg(c) = \deg(E_3) - \deg(E_1) - \deg(E_2)$, если $c(E_1, E_2) = \alpha E_3$, $\alpha \neq 0$. Когда мы задаем значения коцепи c_1 на некоторых мономах, то всегда предполагаем, что значения c_1 на остальных мономах равны 0. Так как значение c на паре мономов E_1, E_2 есть моном с некоторым коэффициентом, мы будем писать $c(E_1, E_2)$ вместо коэффициента там, где это не приводит к непониманию.

Нашей целью будет построение коцикла $\tilde{c} \sim c$ такого, что $\tilde{c}(E_1, E_2) = 0$ при $|E_1| = 1$, если $\deg(c) \geq 0$, и при $|E_1| \leq 2$, если $\deg(c) < 0$. Для этого нам понадобится процедура А.

ПРОЦЕДУРА А. Пусть $\deg(c) = l > -(k-2)$ и $c(i, E) = 0$ для всех i и всех мономов E , $|E| < k$. Тогда существует эквивалентный коцикл $\tilde{c} \sim c$ такой, что $\tilde{c}(i, E) = 0$, $1 \leq i \leq n$, $|E| = k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|E| = k$ и $c(i, E) = \alpha E_1$, $\alpha \neq 0$. Тогда $|E_1| > 1$. Если $i \in E_1$, то из $dc(i, i, E) = \pm 2[i, E_1]$ следует, что $\alpha = 0$. Поэтому $i \notin E_1$. Пусть $E_2 = i \cup E_1$. Тогда $c(j, E) = 0$, если $j \notin E_2$. В самом деле, пусть $c(j, E) = \beta E_3$, $\beta \neq 0$. Имеем $i + E + E_1 = W$, $j + E + E_3 = W$; значит, $i + j = E_1 + E_3$. Но $i \notin E_1$, $j \notin E_1$. Следовательно, $E_3 = E_1 \cup i \cup j$, что противоречит однородности c по степени. Пусть $j \in E_2$ и $c(j, E) = \beta(E_2 \setminus j)$, тогда

$$dc(i, j, E) = \pm[i, c(j, E)] \pm [j, c(i, E)] = \pm \beta E_1 \pm \alpha E_1 = 0.$$

Эти равенства дают возможность определить значение 1-коцепи $c_1(E) = \gamma E_2$ так, чтобы $dc_1(i, E) = c(i, E)$ для всех i . Теперь заменим c на эквивалентный коцикл $\tilde{c} = c - dc_1$. Тогда $\tilde{c}(i, E) = 0$. Отметим, что $\tilde{c}(i, E_1) = 0$, если $|E_1| \leq k$ и $c(i, E_1) = 0$. Продолжаем построение.

Если $\deg(c) \geq 0$, то также будет использоваться процедура Б.

ПРОЦЕДУРА Б. Пусть $\deg(c) \geq 0$ и $c(i, E) = 0$ для всех i и всех E . Тогда $c = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c(E_1, E_2) = \alpha E_3$, $\alpha \neq 0$, где $2 \leq |E_1| \leq |E_2|$. Тогда $|E_3| \geq 2$. Если $i \in E_3$, то

$$dc(i, E_1, E_2) = \pm c([i, E_1], E_2) \pm c(E_1, [i, E_2]) \pm \alpha [i, E_3] = 0.$$

Так как $|[i, E_1]| + |E_2| = |E_1| + |[i, E_2]| < |E_1| + |E_2|$, мы можем проводить индукцию по $|E_1| + |E_2|$, начиная с $|E_1| + |E_2| = 4$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\deg(c) = k < 0$ и $c(i, E) = 0$ для всех i и E , и $c((i, j), E) = 0$ для всех i, j и всех E , $|E| = -k + 1$. Тогда $c((i, j), E) = 0$ для всех i, j и всех E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Мы последовательно рассмотрим четыре случая:

- 1) $\deg(c) > 0$;
- 2) $\deg(c) = 0$;
- 3) $\deg(c) = -1$;
- 4) $\deg(c) < -1$.

1) Здесь нам достаточно доказать существование эквивалентного коцикла $\tilde{c}$ такого, что $\tilde{c}(i, j) = 0$, а затем использовать процедуры А и Б. Если $\deg(c) = 1$, то $|W| = 1$ или 3.

а) Случай $|W| = 3$ возможен только если $c(1, 2) = \alpha \cdot 3$; $c(1, 3) = \beta \cdot 2$ и $c(2, 3) = \gamma \cdot 1$ могут быть отличны от 0. Из $dc((1, 2), 1, 3) = dc((1, 2), 1, 1) = 0$ следует, что $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Определим 1-коцепь c_1 : $c_1(1) = \lambda \cdot (2, 3)$, $c_1(2) = \mu \cdot (1, 3)$, $c_1(3) = \nu \cdot (1, 2)$. Тогда $dc_1(1, 2) = -(\lambda + \mu) \cdot 3$, $dc_1(1, 3) = (\lambda - \nu) \cdot 2$, $dc_1(2, 3) = (\mu + \nu) \cdot 1$, т.е. мы можем подобрать коэффициенты λ, μ, ν так, чтобы $dc_1(i, j) = c(i, j)$ для всех i, j . Теперь заменим c на эквивалентный коцикл $c - dc_1$.

б) Если $|W| = 1$, то $c(1, i) = \alpha_i \cdot i$, $i > 1$, и $c(i, i) = \beta_i \cdot 1$, $1 \leq i \leq n$, могут быть отличны от 0. Определим 1-коцепь $c_1(i) = -\alpha_i \cdot (1, i)$, $i > 1$. При этом $dc_1(1, i) = c(1, i)$. Пусть $\tilde{c} = c - dc_1$. Тогда $d\tilde{c}((1, i), i, i) = -2\tilde{c}(1, i) - \tilde{c}(i, i) = 0$. Так как $\tilde{c}(1, i) = 0$, имеем $\tilde{c}(i, i) = 0$.

Если $\deg(c) > 1$ и $c(i_0, j_0) = \alpha \cdot E \neq 0$, то $|W| = |E| + 2$, $|E|$ или $|E| - 2$.

а) Если $|W| = |E| + 2$, то $c(i, j) \neq 0$ только в случае $i \in W$, $j \in W$, $i \neq j$. При этом $c(i, j) = \alpha_{ij}(W \setminus (i, j))$. Равенства $dc(i, j, k) = 0$, $i < j < k$, дают соотношения

$$(-1)^{i-1}\alpha_{jk} + (-1)^{j-2}\alpha_{ik} + (-1)^{k-3}\alpha_{ij} = 0,$$

среди которых есть $(|W| - 1)(|W| - 2)/2$ независимых:

$$\alpha_{ij} + (-1)^{i-2}\alpha_{1i} + (-1)^{j-3}\alpha_{1j} = 0, \quad 1 < i < j.$$

Таким образом, среди α_{ij} есть $|W| - 1$ свободных. Зададим 1-коцепь $c_1(i) = \beta_i(W \setminus i)$, $i \in W$. Тогда

$$dc_1(i, j) = \pm((-1)^{i-1}\beta_j + (-1)^{j-2}\beta_i)(W \setminus (i, j)), \quad i < j.$$

Размерность пространства этих соотношений равна $|W| - 1$. Базис образуют соотношения $\beta_j + (-1)^{j-2}\beta_1$. Следовательно, можно подобрать β_i так, чтобы выполнялось равенство $dc_1(i, j) = c(i, j)$ для всех i, j . Теперь, как и выше, положим $\tilde{c} = c - dc_1$.

б) Если $|W| = |E|$, то $c(i, j)$ может быть отлично от 0 только в случае $i \in W$, $j \notin W$, или $i = j$. При этом $c(i, j) = \alpha_{ij}((W \cup j) \setminus i)$ в первом случае и $c(j, j) = \alpha_j \cdot W$ во втором. Из $dc(i, i, i) = 0$ следует, что $c(i, i) = 0$, если $i \in W$. Тогда соотношения $dc(i, j, j) = (\pm\alpha_j \pm 2\alpha_{ij})W = 0$, $i \in W$, $j \notin W$, позволяют определить 1-коцепь $c_1(j) = \beta_j(W \cup j)$ так, чтобы $dc_1(i, j) = c(i, j)$.

в) Если $|W| = |E| - 2$, то $c(i, j)$ может быть отличным от 0 только в случае $i \notin W$, $i \neq j$. При этом $c(i, j) = \alpha_{ij}(W \cup i \cup j)$. Но тогда $dc(i, j, j) = \pm 2\alpha_{ij}(W \cup i) = 0$.

2) Здесь нам достаточно построить эквивалентный коцикл $\tilde{c}$ такой, что $\tilde{c}(i, (j, k)) = 0$ для всех i, j, k , и воспользоваться процедурой А. Пусть $c(i_0, (j_0, k_0)) \neq 0$. Тогда $|W| = 0$, 2 или 4.

а) Если $|W| = 4$, то $c(i, (j, k))$ может быть отлично от 0 только в случае, когда i, j, k различны и $1 \leq i, j, k \leq 4$. Тогда $c(i, (j, k)) = \alpha(W \setminus (i, j, k))$. Имеем $dc(3, (3, 4), (1, 2)) = -c(4, (1, 2)) - c(3, (1, 2)) = 0$. Теперь мы можем определить 1-коцепь $c_1((1, 2)) = \beta(3, 4)$

так, чтобы $dc_1(3, (1, 2)) = c(3, (1, 2))$, $dc_1(4, (1, 2)) = c(4, (1, 2))$. Аналогично определяем значение c_1 на других мономах (i, j) , $1 \leq i, j \leq 4$.

б) В случае $|W| = 2$ могут быть отличны от 0 только следующие значения c : $c(i, (1, 2))$, $c(i, (1, i))$, $c(i, (2, i))$, $c(2, (1, i))$, $c(1, (2, i))$. Отметим, что из $dc(i, i, (1, 2, i)) = 0$ следует, что $c(i, (1, 2)) = 0$ при $i > 2$. Мы будем определять значения 1-коцепи $c_1(1) = \gamma_1 \cdot 2$, $c_1(2) = \gamma_2 \cdot 1$, $c_1((1, i)) = \alpha_i(2, i)$ и $c_1((2, i)) = \beta_i(1, i)$, $i > 2$, так, чтобы система

$$\begin{aligned} dc_1(i, (1, i)) &= (\gamma_1 - \alpha_i)(2) = c(i, (1, i)), \quad i > 2, \\ dc_1(i, (2, i)) &= (\gamma_2 - \beta_i)(1) = c(i, (2, i)), \quad i > 2, \\ dc_1(1, (1, 2)) &= (-\gamma_2 - \gamma_1)(2) = c(1, (1, 2)), \\ dc_1(2, (1, 2)) &= (\gamma_1 + \gamma_2)(1) = c(2, (1, 2)) \end{aligned}$$

имела решения в переменных α , β и γ . Ранг левой части системы равен $2n - 3$, но и ранг правой части такой же, так как существует нетривиальное соотношение

$$dc(3, (1, 3), (1, 2)) + dc(3, (2, 3), (1, 2)) - dc((1, 2), (1, 3), (2, 3)) = -c(2, (1, 2)) - c(1, (1, 2)).$$

Таким образом, мы можем определить эквивалентный коцикл $c - dc_1$, который мы также будем обозначать c , такой, что только $c(1, (2, i))$ и $c(2, (1, i))$, $i > 2$, могут быть отличны от 0. Но из равенств

$$\begin{aligned} dc(2, (1, 2), (2, i)) &= c(1, (2, i)) + c(2, (1, i)) + c((1, 2), (2, i)) = 0, \\ dc(i, (1, 2), (2, i)) &= -c((1, 2), (2, i)) = 0, \\ dc(i, (1, i), (2, i)) &= c(1, (2, i)) - c(2, (1, i)) = 0 \end{aligned}$$

следует, что $c(i, (j, k)) = 0$ для всех i, j, k .

в) В случае $|W| = 0$ только $c(i, (i, j)) = \alpha \cdot j$ может быть отлично от 0. Мы будем последовательно строить эквивалентный коцикл, обладающий нужными свойствами. Прямое вычисление показывает, что существует коцикл $\tilde{c}$ такой, что $\tilde{c}(i, (i, j)) = 0$ при $1 \leq i, j \leq 3$. Пусть уже построен коцикл $\tilde{c}$, для которого $\tilde{c}(i, (i, j)) = 0$ при $1 \leq i, j < k$. Докажем существование 1-коцепи c_1 такой, что $dc_1(i, (i, k)) = \tilde{c}(i, (i, k))$, $i < k$, $dc_1(k, (i, k)) = \tilde{c}(k, (i, k))$, $i < k$, и $dc_1(i, (i, j)) = 0$, $1 \leq i, j < k$. Пусть $c_1((i, k)) = \alpha_i(1, k)$, $c_1(k) = \alpha \cdot k$. Тогда

$$dc_1(i, (i, k)) = (-\alpha + \alpha_i) \cdot k, \quad dc_1(k, (i, k)) = (-\alpha - \alpha_i) \cdot i.$$

Так как

$$d(\tilde{c}((1, i), (1, k), k) + \tilde{c}((1, i), (1, k), i) - \tilde{c}(i, (i, k) + \tilde{c}(1, (1, k)) + \tilde{c}(k, (1, k)) - \tilde{c}(k, (i, k)) = 0,$$

размерность пространства $\{\tilde{c}(i, (i, k)), \tilde{c}(k, (i, k))\}_{i < k}$ равна k . Таким образом, система

$$-\alpha + \alpha_i = \gamma_i, \quad -\alpha - \alpha_i = \delta_i,$$

где $\tilde{c}(i, (i, k)) = \gamma_i \cdot k$, $\tilde{c}(k, (i, k)) = \delta_i \cdot i$, разрешима. Переходя к коциклу $\tilde{c} - dc_1$, продолжаем индуктивный процесс.

3) Здесь наша задача состоит в том, чтобы построить эквивалентный коцикл $\tilde{c}$ такой, что $\tilde{c}(i, E) = 0$, $|E| = 3$, $\tilde{c}(E_1, E_2) = 0$, $|E_1| = |E_2| = 2$. После чего можно использовать процедуры А и Б. Пусть $c(i, E) \neq 0$ для некоторого i и некоторого монома E , $|E| = 3$, или $c(E_1, E_2) \neq 0$ для некоторых мономов E_1, E_2 , $|E_1| = |E_2| = 2$. Тогда $|W| = 1, 3$ или 5.

а) Если $|W| = 5$, то $c(i, E) = \alpha \cdot j$, $E \cup i \cup j = W$. Имеем $dc(E, i, (i, j)) = c(j, E) + c(i, E) = 0$. Значит, можно определить $c_1(E) = \beta(i, j)$ так, чтобы $dc_1(i, E) = c(i, E)$, $dc_1(j, E) = c(j, E)$. Перейдем к эквивалентному коциклу $\tilde{c} = c - dc_1$. Пусть $|E_1| = |E_2| = 2$ и $E_1 \cup E_2 \cup i = W$. Тогда $d\tilde{c}(i, (i, E_1), E_2) = -\tilde{c}(E_1, E_2) = 0$.

б) В случае $|W| = 3$ имеем

$$dc((1, 2), (3, i), (i, j)) = c((1, 2), (3, j)) - c((1, 2), (3, i)) = 0,$$

что дает нам возможность определить $c_1((1, 2)) = \alpha \cdot 3$ так, чтобы $dc_1((1, 2), (3, i)) = c((1, 2), (3, i))$ при $i > 3$. Для $c((1, 3), (2, i))$ и $c((2, 3), (1, i))$ проводим аналогичные утверждения. Переходим к эквивалентному коциклу $c - dc_1$, который также будет обозначаться c . Имеем

$$dc((1, 2), (1, 3), (1, i)) = c((2, 3), (1, i)) + c((1, 3), (2, i)) - c((1, 2), (3, i)) - c((1, 2), (1, 3)) = 0,$$

т.е. $c((1, 2), (1, 3)) = 0$. Аналогично получаем, что

$$c((1, 2), (3, i)) = c((1, 3), (2, i)) = c((2, 3), (1, i)) = 0$$

при всех i . Далее,

$$dc((1, i), (2, i), (3, j)) = c((1, 2), (3, j)) - c((1, i), (2, i)) + c((1, i), (2, i)) = 0,$$

т.е. $c(E_1, E_2) = 0$ для всех $E_1, E_2, |E_1| = |E_2| = 2$.

Рассмотрим теперь $c(i, E)$, $|E| = 3$. Здесь отличными от 0 могут быть $c(i, (1, 2, 3))$; $c(i, E)$, $i > 3$, $i \in E$, $|E \cap (1, 2, 3)| = 2$; $c(i, E)$, $i \leq 3$, $i \notin E$, $|E \cap (1, 2, 3)| = 2$. Из соотношений

$$dc((1, 2, 4), 4, (3, 5)) = -c((1, 2, 4), (3, 5)) - c(4, (1, 2, 4)) = 0,$$

$$dc((1, 2, 4), 5, (3, 5)) = c(3, (1, 2, 4)) + c((1, 2, 4), (3, 5)) = 0$$

получаем, что $c(3, (1, 2, 4)) + c(4, (1, 2, 4)) = 0$, т.е. мы можем определить значение 1-коцепи $c_1((1, 2, 4)) = \alpha(3, 4)$ так, чтобы $dc_1(3, (1, 2, 4)) = c(3, (1, 2, 4))$, $dc_1(4, (1, 2, 4)) = c(4, (1, 2, 4))$. Аналогично определяем $c_1(E)$, $|E \cap (1, 2, 3)| = 2$. Переходя к эквивалентному коциклу $\tilde{c}$, имеем $\tilde{c}(i, E) = 0$, если $|E \cap (1, 2, 3)| = 2$. Далее, $d\tilde{c}(i, i, (1, 2, 3, i)) = -2\tilde{c}(i, (1, 2, 3)) = 0$, а из соотношений типа

$$d\tilde{c}(4, (3, 4), (1, 2, 3)) = \tilde{c}(3, (1, 2, 3)) + \tilde{c}((3, 4), (1, 2, 3)) = 0,$$

$$d\tilde{c}(3, (3, 4), (1, 2, 3)) = \tilde{c}(3, (1, 2, 3)) - \tilde{c}((3, 4), (1, 2, 3)) = 0$$

следует, что $\tilde{c}(i, E) = 0$ для всех i и всех E , $|E| = 3$.

в) В случае $|W| = 1$ только $c(i, (1, i, j)) = \alpha \cdot j$ и $c((1, i), (i, j)) = \beta \cdot j$ могут быть отличны от 0. Имеем

$$dc((1, i), (i, j), (j, k)) = -c((1, j), (j, k)) + c((1, i), (i, k)) - c((1, i), (i, j)) = 0,$$

$$dc((1, i), (i, k), (j, k)) = -c((1, k), (j, k)) - c((1, i), (i, j)) + c((1, i), (i, k)) = 0,$$

откуда $c((1, j), (j, k)) = c((1, k), (j, k))$. Далее,

$$dc((1, 2), (2, i), (i, j)) = -c((1, i), (i, j)) + c((1, 2), (2, j)) - c((1, 2), (2, i)) = 0.$$

Пусть $c_1((1, i)) = \beta_i \cdot i, i > 1$. Тогда система $dc_1((1, 2), (2, i)) = c((1, 2), (2, i))$, т.е. $-\beta_i + \beta_2 = \alpha_i$, разрешима. Следовательно, переходя к эквивалентному коциклу $\tilde{c} = c - dc_1$, имеем $\tilde{c}((1, i), (i, j)) = 0$. Пусть теперь $i < j$. Тогда

$$d\tilde{c}(i, (1, i, j), (i, j)) = \tilde{c}(j, (1, i, j)) + \tilde{c}(i, (1, i, j)) = 0,$$

т.е. мы можем определить $c_1((1, i, j)) = \beta_{ij}(i, j)$ так, чтобы свойства $dc_1(i, (1, i, j)) = \tilde{c}(i, (1, i, j))$, $dc_1(j, (1, i, j)) = \tilde{c}(j, (1, i, j))$ были выполнены.

4) Наша задача – построить эквивалентный цикл $\tilde{c}$ такой, что $\tilde{c}(i, E) = 0, |E| = k$, и $\tilde{c}(E_1, E_2) = 0, |E_1| = 2, |E_2| = k - 1$. Если $c(i, E) \neq 0, |E| = k$, или $c(E_1, E_2) \neq 0, |E_1| = 2, |E_2| = k - 1$, то $|W| = k + 2, k, k - 2$ или $k - 4$.

а) Случай $|W| = k + 2$ разбирается так же, как случай 3а).

б) В случае $|W| = k$ пусть $c((i, j), E) \neq 0, |E| = k - 1$. Тогда $|E \cap W| = k - 1$ или $k - 2$. Если $|E \cap W| = k - 2, (i, j) = W \setminus E$, то $c((i, j), E) = \alpha(E \setminus W)$. Пусть $l, m \in E \cap W$ и $B = E \setminus (l, m)$. Тогда

$$\begin{aligned} dc((i, j), (i, l), (i, m, B)) &= c((j, l), (i, m, B)) + c((i, l), (j, m, B)) - c((i, j), (l, m, B)) = 0, \\ dc((i, j), (j, l), (j, m, B)) &= -c((i, l), (j, m, B)) - c((j, l), (i, m, B)) \\ &\quad - c((i, j), (l, m, B)) = 0 \end{aligned}$$

и $\alpha = 0$.

Если $E \in W$ и $i = W \setminus E, l \notin W$, то

$$dc((i, j), (j, l), E) = -c((i, l), E) + c((i, j), E) = 0,$$

т.е. мы можем определить $c_1(E) = \alpha \cdot i$ так, чтобы $dc_1((i, j), E) = c((i, j), E)$ для всех $j \notin W$, и т.д. Пусть теперь $j \in W, l \notin W$. Тогда

$$\begin{aligned} dc((i, j), (j, l), E) &= -c((i, l), E) \pm c((j, l), (E \setminus j) \cup i) \\ &\quad \pm c((i, j), (E \setminus j) \cup l) + c((i, j), E) = 0. \end{aligned}$$

Так как первые три члена в правой части равенства равны 0, то и $c((i, j), E) = 0$.

Если $|E \cap W| = k - 2, i \in W \setminus E, j \in E \setminus W$, то $c((i, j), E) = \alpha(W \setminus (E \cup i))$. Докажем, что $\alpha = 0$. Проиллюстрируем логику рассуждений на примере $k = 4, i = 1, j = 5, E = (2, 3, 5)$. Имеем, как и выше,

$$\begin{aligned} dc((1, 5), (2, 3), (3, 4, 5)) &= c((1, 5), (2, 4, 5)) + c((1, 5), (3, 4, 5)) = 0, \\ dc((2, 5), (1, 3), (3, 4, 5)) &= c((2, 5), (1, 4, 5)) + c((2, 5), (3, 4, 5)) = 0, \\ dc((1, 2), (3, 5), (1, 4, 5)) &= c((3, 5), (2, 4, 5)) + c((3, 5), (1, 4, 5)) = 0, \\ dc((1, 5), (2, 5), (3, 4, 5)) &= c((1, 5), (3, 4, 5)) - c((2, 5), (3, 4, 5)) = 0, \\ dc((1, 5), (3, 5), (2, 4, 5)) &= c((1, 5), (2, 4, 5)) - c((3, 5), (2, 4, 5)) = 0, \\ dc((2, 5), (3, 5), (1, 4, 5)) &= c((2, 5), (1, 4, 5)) - c((3, 5), (1, 4, 5)) = 0, \end{aligned}$$

откуда $c((i, j), E) = 0$.

В случае $E \subset W, |W| = n$, приведенные выше рассуждения не проходят, и эквивалентный коцикл $\tilde{c}$ с требуемыми свойствами построить не удастся. Поэтому мы проведем прямое доказательство тривиальности c в этом случае.

При $n = 6$ это доказывается прямым вычислением. Пусть $n > 6$. Тогда $c(E_1, E_2)$ равно линейной комбинации $c(E', E''), |E'| \leq 3$. Рассмотрим множество $\{c(E_1, E_2 E')\}$, где $E_1, E_2 \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, а $E' = \{7, \dots, n\}$. Используя тривиальность c при $n = 6$,

можно перейти к эквивалентному коциклу $\tilde{c}$ такому, что $\tilde{c}(E_1, E_2) = 0$ при $E_1 \subset \{1, \dots, 6\}$, $|E_1| < 4$. Рассмотрим $c(E', E'')$, где $|E'| \leq 4$, $|E' \cap \{7, \dots, n\}| = 1$. Пусть $E' = (1, 7)$, $E'' = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Имеем

$$dc((1, 7), (1, 2, 7), (3, 4, 5, 6, 7)) = c((1, 2, 7), (1, 3, 4, 5, 6)) + c((1, 7), (1, 2, 3, 4, 5, 6)) + c((1, 2, 7), (3, 4, 5, 6, 7)) = 0.$$

Так как

$$dc((1, 2, 7), (1, 2, 3), (2, 4, 5, 6)) = \pm c((1, 2, 7), (1, 3, 4, 5, 6)) = 0,$$

имеем $c((1, 7), (1, 2, 3, 4, 5, 6)) = -c((1, 2, 7), (3, 4, 5, 6, 7))$. Далее,

$$dc(2, (1, 2, 7), (2, 3, 4, 5, 6, 7)) = c((1, 7), (2, 3, 4, 5, 6, 7)) + c((1, 2, 7), (3, 4, 5, 6, 7)) + c((1, 2, 7), (2, 3, 4, 5, 6, 7)) = 0.$$

Из $dc(7, (1, 2, 7), (2, 3, 4, 5, 6, 7)) = \pm c((1, 2, 7), (2, 3, 4, 5, 6, 7)) = 0$ следует, что $c((1, 2, 7), (3, 4, 5, 6, 7)) = -c((1, 7), (2, 3, 4, 5, 6, 7))$. Далее, соотношения вида

$$dc((1, 2), (1, 7), (1, 2, 3, 4, 5, 6)) = 0$$

дают

$$c((1, 7), (1, 2, 3, 4, 5, 6)) = c((2, 7), (1, 2, 3, 4, 5, 6)).$$

Из этих равенств следует, что мы можем определить $c_1((1, 2, 3, 4, 5, 6)) = \alpha \cdot 7$ так, чтобы $dc_1(E_1, E_2) = c(E_1, E_2)$, где $|E_1| < 4$, $7 \in E_1$ и $E_1 \subset \{1, \dots, 7\}$. Отметим, что если $E_1 \subset \{1, \dots, 6\}$, то $dc_1(E_1, E_2) = 0$. Теперь мы можем переходить к следующему шагу.

Рассмотрим $c(i, E)$, $|E| = k$. Если $c(i, E) \neq 0$, то либо $E = W$, либо $|E \cap W| = k - 1$. Тогда либо $i = W \setminus E$, либо $i = E \setminus W$.

Рассмотрим случай $E = W$, $i \in W$. Пусть, например, $i = 1$. Тогда

$$dc(1, (1, 2, k+1), (3, \dots, k, k+1)) = \pm c(1, E) = 0.$$

Рассмотрим случай $|E \cap W| = k - 1$. Пусть, например, $E = (2, \dots, k, k+1)$. Тогда

$$dc(1, (1, k+1), E) = -c(k+1, E) - c(1, E) = 0,$$

что дает возможность определить $c_1(E) = \alpha(1, k+1)$.

В случае $E = W$, $i \notin W$, пусть $i = k+1$. Тогда

$$dc(k+1, (1, k+1), (2, \dots, k, k+1)) = \pm c(k+1, E) = 0.$$

в) В случае $|W| = k - 2$ отличными от 0 могут быть только следующие значения коцикла: $c(i, (W \cup i \cup j))$, $i \notin W$, $j \notin W$; $c((i, j), (W \cup i))$, $i \notin W$; $c((i, j), (W' \cup i \cup j))$, $W' \subset W$, $|W'| = k - 3$, $i \notin W$, $j \notin W$; $c((i, m), (W' \cup i \cup j))$, $m = W \setminus W'$. Здесь рассуждения почти такие же, как в случае 3в); дополнительно необходимо рассмотреть только $c((i, j), (W' \cup i \cup j))$. Имеем ($l \notin W$):

$$dc((i, j), (m, l), (W' \cup i \cup j)) = c((i, j), (W' \cup i \cup j)) = 0.$$

г) В случае $|W| = k - 4$ имеем $c(i, E) = 0$ при $|E| = k$, и надо рассмотреть только $c((i, j), E)$, $|E| = k - 1$. Здесь отличными от 0 могут быть только $c((i, j), (W \cup i \cup j \cup l))$, где $i, j, l \notin W$. Но тогда

$$dc((i, j), (i, j, m), (W \cup l \cup m)) = \pm c((i, j), (W \cup i \cup j \cup l)) = 0,$$

если $|W| > 0$, и

$$dc((i, j), (i, j, l), (i, j, l)) = \pm 2c((i, j), (i, j, l)) = 0,$$

если $|W| = 0$.

Таким образом, мы построили эквивалентный коцикл, который мы также будем обозначать c , такой, что $c(i, E) = 0$, $|E| = k$, и $c((i, j), E) = 0$, $|E| = k - 1$. Если $\deg(c) = -2$, то применение процедур А и Б показывает, что c тривиален. В случае $\deg(c) < -2$ поступаем следующим образом. Если $c(E_1, E_2) = 0$ для всех пар $\{E_1, E_2\}$, $2 < |E_1| \leq |E_2|$, $|E_1| + |E_2| = k + 1$, то процедура Б дает $c = 0$. Пусть $c(E_1, E_2) = \alpha \cdot i$, $\alpha \neq 0$. Зафиксируем i . Рассмотрим множество таких пар, что $E_1 + E_2 \equiv W \setminus i$. Определим на этом множестве 2-коцепь $\bar{c}$ с тривиальными коэффициентами $\bar{c}(E_1, E_2) = \alpha$, если $c(E_1, E_2) = \alpha \cdot i$. Тогда $\bar{c}$ — это ненулевой коцикл на LH . Из доказательства теоремы 1 следует, что существуют мономы E_1, E_2 , $|E_1| = 3$, такие, что $\bar{c}(E_1, E_2) \neq 0$. Тогда возможны следующие случаи:

- i) $i \notin E_2$, $|E_2| < n - 1$;
- ii) $i \notin E_2$, $|E_2| = n - 1$;
- iii) $i \in E_2$, $i \notin E_1$;
- iv) $i \in E_1$, $i \in E_2$

(для краткости мы будем писать iE вместо $i \cup E$).

i) Имеем $dc(i, E_1, iE_2) = \pm c(E_1, E_2) = 0$.

ii) Здесь либо $i \in E_1$, либо $i \notin E_1$. Если $i \in E_1$, то $dc(E_1, E_1, E_2) = \pm 2c(E_1, E_2) = 0$. Если $i \notin E_1$, то $E_1 \subset E_2$ и $dc(i, iE_1, E_2) = -c(E_1, E_2) = 0$.

iii) Пусть существует j , $j \in E_1$, $j \notin E_2$. Тогда $E_1 = jE'$, $E_2 = iE''$ и

$$dc((i, j), iE', iE'') = c(E_1, E_2) + c(iE', jE'') + c(iE', iE'') = 0.$$

Так как второе и третье слагаемые в правой части равны 0 в силу i) и ii), выполнено $c(E_1, E_2) = 0$. Пусть теперь $E_1 \subset E_2$ и $|E_2| > 4$. Тогда существует j , $j \in E_2$, $j \notin E_1$ и $dc((i, j), E_1, E_2) = c(E_1, E_2) = 0$. Если $|E_2| = 4$, то мы получаем нетривиальный коцикл.

iv) Пусть существует j , $j \notin E_1$, $j \notin E_2$, и $E_1 = iE'$, $E_2 = iE''$. Тогда

$$dc((i, j), iE', iE'') = c(jE', iE'') + c(iE', jE'') - c(iE', iE'') = 0.$$

Так как первые два слагаемых в правой части равны 0 в силу i), имеем $c(E_1, E_2) = 0$. Если такого j нет, но $|E_1 \cap E_2| > 1$, то $dc(E_1, E_1, E_2) = \pm 2c(E_1, E_2) = 0$. Случай $|E_1 \cap E_2| = i$ рассмотрен выше.

Мы доказали, что только коцикл степени -4 и веса 0 может быть нетривиальным. Прямая проверка показывает, что условие $c(E, Ei) = -i$ порождает нетривиальный коцикл $c(EE_1, EE_2) = (-1)^{|E_{E_1}|} E_1 E_2$. Доказательство теоремы 2 закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если основным полем является $\mathbb{C}$, то можно ввести новые переменные

$$\eta_{2j-1} = \frac{\xi_{2j-1} + i\xi_{2j}}{\sqrt{2}}, \quad \eta_{2j} = \frac{\xi_{2j-1} - i\xi_{2j}}{\sqrt{2}}, \quad j = 1, \dots, \left[\frac{n}{2} \right].$$

Тогда $\eta_{2j-1}\eta_{2j}$ — градуирующие элементы, и их использование уменьшает количество рассматриваемых случаев. Мы не стали этого делать по следующим причинам:

- 1) если n нечетно, то введение градуирующих элементов все равно не позволяет рассматривать только случай нулевого веса;
- 2) уменьшение количества случаев компенсируется большей сложностью их рассмотрения (формула композиции в переменных η сложнее, чем в переменных ξ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Мы должны доказать, что

$$h(h(E_1, E_2), E_3) \pm h(h(E_2, E_3), E_1) \pm h(h(E_3, E_1), E_2) = 0,$$

где знаки определяются четностями E_1, E_2 и E_3 . Пусть $E_1 = F_1 F_2 F_3 E'$, $E_2 = F_1 F_2 F_4 E''$, $E_3 = F_1 F_3 F_4 E'''$, где $|F_1| + |F_2|$ нечетно и $|F_3| + |F_4|$ нечетно. Пусть $|E'| = a$, $|E''| = b$, $|E'''| = c$, $|F_1| = p$, $|F_2| = q$, $|F_3| = r$, $|F_4| = s$. Пусть p нечетно. Надо рассмотреть два случая:

- а) r нечетно;
- б) r четно.

Мы рассмотрим случай а), так как случай б) рассматривается аналогично:

$$\begin{aligned} h(h(E_1, E_2), E_3) &= t^{(p+q-1)/2} h(c_{(p+q-1)/2}(E_1, E_2), E_3) \\ &= (-1)^a t^{(p+q-1)/2} h(F_3 E' F_4 E'', F_1 F_3 F_4 E''') \\ &= (-1)^{a+1} t^{(p+q+r+s-2)/2} c_{(r+s-1)/2}(F_3 F_4 E' E'', F_3 F_4 F_1 E''') \\ &= (-1)^b t^{(p+q+r+s-2)/2} E' E'' F_1 E''' \\ &= (-1)^a t^{(p+q+r+s-2)/2} F_1 E' E'' E'''. \end{aligned}$$

В этом случае $h(E_3, E_1) = 0$, поэтому надо вычислить $h(h(E_2, E_3), E_1)$. Перенос E_1 на последнее место приводит к умножению на $(-1)^{a(b+c+1)}$. Имеем

$$\begin{aligned} &(-1)^{a(b+c+1)} h(h(F_1 F_2 F_4 E'', F_1 F_3 F_4 E'''), F_1 F_2 F_3 E') \\ &= (-1)^{a(b+c+1)} t^{(p+s-1)/2} h(c_{(p+s-1)/2}(F_1 F_4 F_2 E'', F_1 F_4 F_3 E'''), F_1 F_2 F_3 E') \\ &= (-1)^{a(b+c+1)+b+1} t^{(p+s-1)/2} h(F_2 E'' F_3 E''', F_1 F_2 F_3 E') \\ &= (-1)^{a(b+c+1)} t^{(p+q+r+s-2)/2} c_{(q+r-1)/2}(F_2 F_3 E'' E''', F_2 F_3 F_1 E') \\ &= (-1)^{(a(b+c+1)+b+c+1)} t^{(p+q+r+s-2)/2} E'' E''' F_1 E' \\ &= (-1)^{a+1} t^{(p+q+r+s-2)/2} F_1 E' E'' E''', \end{aligned}$$

т.е. сумма равна 0.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Van der Hijligenberg N., Post G. Defining relations for Lie algebras of vector fields // Indag. Math. (N.S.). 1991. № 2. P. 207–218.
- [2] Кочетков Ю. Ю. Деформации гамильтоновой алгебры $H(2)$ // Функцион. анализ и его прилож. 1993. Т. 28. № 3. С. 77–79.
- [3] Van der Hijligenberg N., Kotchetkov Yu., Post G. Deformations of $S(0, n)$ and $H(0, n)$ // Internat. J. Algebra Comput. 1993. V. 1. P. 57–77.
- [4] Fialowski A. On the deformations of L_1 // Studia Sci. Math. Hungar. 1985. V. 20. P. 433–438.
- [5] Кочетков Ю. Ю., Пост Г. Ф. Деформации бесконечномерной нильпотентной алгебры Ли L_2 // Функцион. анализ и его прилож. 1992. Т. 26. № 4. С. 90–92.
- [6] Van der Hijligenberg N., Kotchetkov Yu. The absolute rigidity of the Neveu–Schwarz and Ramond superalgebras // J. Math. Phys. 1996. V. 37. № 11. P. 5858–5868.

Институт новых технологий, г. Москва

Поступило

16.05.96

Исправленный вариант

16.07.97