Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Кузнецова, Об одном классе N -мерных тригонометрических рядов, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 3, 402–406

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1295>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 15:00:48

УДК 517.518.476

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ

N -МЕРНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

О. И. Кузнецова

Для тригонометрических рядов вида

$$\lambda_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l \sum_{k \in lV \setminus (l-1)V} e^{ikx}, \quad \lambda_l \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow \infty,$$

заданных на N -мерном торе, где V – некоторый полиэдр в $\mathbb{R}^N$, доказан аналог известной одномерной теоремы Фомина.

Библиография: 6 названий.

Пусть V – замкнутый ограниченный полиэдр в $\mathbb{R}^N$ с вершинами в точках с рациональными координатами, звездный относительно начала координат, являющегося его внутренней точкой, и такой, что продолжение любой его грани не проходит через начало координат; $nV = \{x \in \mathbb{R}^N : x/n \in V\}$ – гомотет V .

Множество полиэдров с указанными свойствами обозначим через W .

Пусть Z^N – целочисленная решетка в $\mathbb{R}^N$, $k \in Z^N$. Для любого полиэдра $V \in W$ на N -мерном торе $T^N = [-\pi, \pi)^N$ рассмотрим ряд

$$\lambda_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l \sum_{k \in lV \setminus (l-1)V} e^{ikx}, \quad kx = k_1x_1 + \dots + k_Nx_N, \quad (1)$$

где λ_l – последовательность действительных чисел, $\lambda_l \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$.

Следующее утверждение есть N -мерный аналог теоремы Г. А. Фомина [1].

ТЕОРЕМА. Пусть полиэдр $V \in W$. Если при некотором $p > 1$ коэффициенты ряда (1) удовлетворяют условию

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left(2^{l(p-1)} \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} |\Delta \lambda_j|^p \right)^{1/p} < \infty, \quad (2)$$

то ряд (1) сходится почти всюду на T^N к некоторой функции $f \in L(T^N)$, является ее рядом Фурье, а равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T^N} |S_{nV} f(x) - f(x)| dx = 0, \quad (3)$$

где

$$S_{nV}f(x) = \lambda_0 + \sum_{l=1}^n \lambda_l \sum_{k \in lV \setminus (l-1)V} e^{ikx}$$

– последовательность частичных сумм ряда (1), выполняется тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \log^N n = 0. \quad (4)$$

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие утверждения. Пусть функция $f \in C(T^N)$,

$$S_{nV}f(x) = \sum_{k \in nV} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

– последовательность частичных сумм ряда Фурье функции f , порожденная полиэдром V ,

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-N} \int_{T^N} f(u) e^{-iku} du,$$

а $S_{nV}f = (2\pi)^{-N} f * D_{nV}$ – свертка функции f и ядра Дирихле

$$D_{nV}(x) = \sum_{k \in nV} e^{ikx},$$

соответствующего множеству V .

ТЕОРЕМА А. Пусть полиэдр $V \in W$. Для любых $f \in C(T^N)$, $p \geq 1$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^n |S_{lV}f(0)|^p \leq c \|f\|_\infty^p, \quad (5)$$

где $c = c(N, V, p) > 0$ – некоторая постоянная, не зависящая от f и n .

Эта теорема для более широкого класса полиэдров доказана в [2], для параллелепипедов $\{x \in \mathbb{R}^N : |x_i| \leq m_i, m \in \mathbb{Z}^N\}$ в [3].

Заметим, что из неравенства (5) следует, что для любой $f \in C(T^N)$ равномерно на T^N

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^n |S_{lV}f(x) - f(x)|^p = 0. \quad (6)$$

ЛЕММА 1. Пусть полиэдр $V \in W$, a_l – последовательность действительных чисел. Для любого $q > 1$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{n} \int_{T^N} \left| \sum_{l=1}^n a_l D_{lV}(x) \right| dx \leq c \left(\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n |a_l|^q \right)^{1/q}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\int_{T^N} \left| \sum_{l=1}^n a_l D_{lV}(x) \right| dx = \sup_{|f| \leq 1} \left| \sum_{l=1}^n a_l S_{lV}f(0) \right|,$$

(7) сразу следует из неравенства Гёльдера и оценки (5) при $p = q/(q-1)$.

ЛЕММА 2. Пусть $V \in W$. Последовательность D_{nV} ограничена почти всюду на T^N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Этот факт считается известным (см., например, [4]), поэтому приведем лишь схему доказательства. Пусть $N = 2$. Разобьем полиэдр V на конечное число треугольников, соединяя вершины с началом координат. Каждый получившийся треугольник разобьем прямыми, параллельными осям координат, на прямоугольные треугольники. При таком разбиении получаются прямоугольные треугольники с рациональными вершинами. Поэтому лемму достаточно доказать для треугольника с вершинами $(0, 0)$, $(p/r, 0)$, $(0, q/r)$, где p, q и r – целые. В этом случае $([\cdot])$ – целая часть числа)

$$\begin{aligned} D_{nV}(x) &= \sum_{k_1=0}^{[pn/r]} e^{ik_1x_1} \sum_{k_2=0}^{[qn/r - qk_1/p]} e^{ik_2x_2} \\ &= \frac{1 - e^{i([pn/r]+1)x_1}}{(1 - e^{ix_1})(1 - e^{ix_2})} - \frac{e^{ix_2}}{1 - e^{ix_2}} \sum_{k_1=0}^{[pn/r]} e^{ik_1x_1 + i[qn/r - qk_1/p]x_2} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} h_n^{(1)}(x_1, x_2) - h_n^{(2)}(x_1, x_2) \frac{e^{ix_2}}{1 - e^{ix_2}}. \end{aligned}$$

Функции $h_n^{(1)}$ ограничены всюду, кроме прямых $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Докажем ограниченность почти всюду функций $h_n^{(2)}$. Положим $n = l_1r + \nu_1$, $k_1 = l_2p + \nu_2$, где $0 \leq l_1 \leq [n/r]$, $0 \leq l_2 \leq [k_1/p]$, $0 \leq \nu_1 \leq r - 1$, $0 \leq \nu_2 \leq p - 1$. Тогда, полагая $\alpha_{\nu_1\nu_2} = q(\nu_1/r - \nu_2/p)$, будем иметь

$$\left[\frac{qn}{r} - \frac{qk_1}{p} \right] = q(l_1 - l_2) + [\alpha_{\nu_1\nu_2}].$$

Так как $[\alpha_{\nu_1\nu_2}]$ принимает не более pr различных значений, $h_n^{(2)}$ равна сумме не более чем $(p+1)r$ функций вида

$$\begin{aligned} &e^{i\nu_2x_1 + i[\alpha_{\nu_1\nu_2}]x_2} \sum_{l_2=0}^{[[pn/r]/p]} e^{ir l_2x_1 + iq(l_1 - l_2)x_2} \\ &= e^{i\nu_2x_1 + i[\alpha_{\nu_1\nu_2}]x_2 + iq l_1x_2} \sum_{l_2=0}^{[[pn/r]/p]} e^{il_2(rx_1 - qx_2)}, \end{aligned}$$

каждая из которых ограничена всюду, кроме прямых

$$rx_1 - qx_2 = 2\pi l, \quad l = 0, 1, \dots$$

При $N > 2$ доказательство аналогично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. К конечной сумме

$$\lambda_0 + \sum_{l=1}^n \lambda_l \sum_{k \in lV \setminus (l-1)V} e^{ikx}$$

применим преобразование Абеля ($\Delta\lambda_l = \lambda_l - \lambda_{l+1}$):

$$\lambda_0 + \sum_{l=1}^n \lambda_l \sum_{k \in lV \setminus (l-1)V} e^{ikx} = \sum_{l=0}^{n-1} \Delta\lambda_l D_{lV}(x) + \lambda_n D_{nV}(x).$$

Из условия (2) следует сходимость ряда

$$\sum_{l=1}^{\infty} |\Delta\lambda_l|.$$

Поскольку $\lambda_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а последовательность D_{nV} ограничена почти всюду на T^N , в последнем равенстве для почти всех $x \in T^N$ можно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$. Имеем

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l \sum_{k \in lV \setminus (l-1)V} e^{ikx} = \sum_{l=0}^{\infty} \Delta\lambda_l D_{lV}(x). \quad (8)$$

Докажем интегрируемость функции f . Полагая в неравенстве (6) $p = q$, $n = 2^{l+1}$, $a_1 = \dots = a_{2^l} = 0$, получаем

$$\int_{T^N} \left| \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} \Delta\lambda_j D_{jV}(x) \right| dx \leq c_1 \left(2^{l(p-1)} \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} |\Delta\lambda_j|^p \right)^{1/p}. \quad (9)$$

Так как

$$\int_{T^N} |f(x)| dx = \int_{T^N} \left| \sum_{l=0}^{\infty} \Delta\lambda_l D_{lV}(x) \right| dx \leq \sum_{l=0}^{\infty} \int_{T^N} \left| \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} \Delta\lambda_j D_{jV}(x) \right| dx,$$

из (9) и условия (2) вытекает, что $f \in L(T^N)$.

Докажем, что ряд (1) есть ряд Фурье функции f . Пусть $r \in Z^N$, $l_0 = \{\inf l : r \in lV\}$. Нетрудно показать, что $\hat{f}(r) = \lambda_0$. Выберем $2^s > l_0$. Тогда согласно (8)

$$(2\pi)^N \hat{f}(r) = \int_{T^N} \left(\sum_{l=0}^{2^s} \Delta\lambda_l D_{lV}(x) \right) e^{-irx} dx + \int_{T^N} \left(\sum_{l=2^s+1}^{\infty} \Delta\lambda_l D_{lV}(x) \right) e^{-irx} dx.$$

Последняя сумма стремится к 0 при $s \rightarrow \infty$ в силу сходимости ряда (2). Из ортогональности системы $\{e^{ikx}\}$ следует, что первая сумма равна

$$(2\pi)^N \sum_{l=l_0}^{2^s} \Delta\lambda_l = (2\pi)^N (\lambda_{l_0} - \lambda_{2^s+1})$$

и стремится к $(2\pi)^N \lambda_{l_0}$ при $s \rightarrow \infty$.

Осталось доказать, что соотношение (3) имеет место тогда и только тогда, когда выполнено (4). Из теоремы А (см. (6)) следует, что для любой функции $g \in C(T^N)$ и любого полиэдра $V \in W$ средние Фейера–Марцинкевича ($p = 1$)

$$\sigma_{nV} g = \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^n S_{lV} g$$

сходятся к g равномерно на T^N . Следовательно (см. [5, гл. 7]), средние $\sigma_{nV} g$ сходятся в L к g для любой функции $g \in L(T^N)$. Для функции f

$$\begin{aligned}\sigma_{nV} f(x) - S_{nV} f(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^n l \lambda_l \sum_{k \in lV \setminus (l-1)V} e^{ikx} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{n-1} \Delta(l \lambda_l) D_{lV}(x) + \frac{n}{n+1} \lambda_n D_{nV}(x).\end{aligned}$$

Так как [6] для любого полиэдра V

$$\int_{T^N} |D_{nV}(x)| dx \asymp \log^N n,$$

для завершения доказательства достаточно показать, что

$$I_n = \frac{1}{n} \int_{T^N} \left| \sum_{l=1}^n \Delta(l \lambda_l) D_{lV}(x) \right| dx \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. По лемме 1

$$I_n \leq c \left(\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n |\Delta(l \lambda_l)|^p \right)^{1/p} \leq c \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n l^p |\Delta \lambda_l|^p \right)^{1/p} + \left(\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n |\lambda_{l+1}|^p \right)^{1/p} \right].$$

Из условия (2) вытекает сходимость ряда

$$\sum_{l=1}^{\infty} l^{p-1} |\Delta \lambda_l|^p.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n l^p |\Delta \lambda_l|^p \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Вторая сумма стремится к 0, поскольку $\lambda_n \rightarrow 0$.

В заключение отметим, что, как показано в [1], условие (2) эквивалентно условию

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l} \sum_{j=l}^{\infty} |\Delta \lambda_j|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фомин Г. А. Об одном классе тригонометрических рядов // Матем. заметки. 1978. Т. 23. № 2. С. 213–222.
- [2] Кузнецова О. И. О сильных средних Карлемана кратных тригонометрических рядов // Укр. матем. ж. 1992. Т. 44. № 2. С. 275–279.
- [3] Гоголадзе Л. Д. О суммировании кратных тригонометрических рядов и сопряженных функций. Дисс. ... д. ф.-м. н. Тбилиси, 1984.
- [4] Назаров Ф. Л., Подкорытов А. Н. Поведение констант Лебега двумерных сумм Фурье по многоугольникам // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7. № 4. С. 214–238.
- [5] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
- [6] Подкорытов А. Н. Порядок роста констант Лебега сумм Фурье по полиэдрам // Вестн. ЛГУ. Матем., мех., астроном. 1982. № 7. С. 110–111.