Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Махнев, Об одном классе графов без 3-лап, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 3, 407–413

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1296>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 14:16:42

УДК 519.14

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ГРАФОВ БЕЗ 3-ЛАП

А. А. Махнев

М. Нуматой описаны реберно регулярные графы без 3-лап. В таких графах все μ -подграфы являются регулярными одинаковой валентности. В данной работе доказано, что связный граф без 3-лап, в котором все μ -подграфы являются регулярными графами валентности $\alpha > 0$, является треугольным графом, графом Шлефли или графом икосаэдра.

Библиография: 5 названий.

Введение. Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $[a]$ обозначим подграф, индуцированный Γ на множестве всех смежных с a вершин. Соответствующий подграф называется *окрестностью вершины a* . Пусть $a^\perp$ – шар радиуса 1 с центром a . Для подграфа A графа Γ через $A^\perp$ обозначим $\bigcap_{a \in A} a^\perp$.

Через k_a обозначим *валентность* вершины a , т.е. число вершин в $[a]$. Граф Γ называется *регулярным валентности k* , если $k_a = k$ для любой вершины a из Γ . Для ребра ac графа Γ через λ_{ac} обозначим число вершин в графе $[a] \cap [c]$. Граф Γ называется *реберно регулярным с параметрами (v, k, λ)* , если Γ – регулярный граф валентности k на v вершинах, в котором каждое ребро лежит в λ треугольниках ($\lambda_{ac} = \lambda$ для любого ребра ac). Подграф, индуцированный на $[a] \cap [b]$, назовем *μ -подграфом*, если вершины a, b находятся на расстоянии 2, а через $\mu(a, b)$ обозначим число вершин в этом подграфе.

Д. Хигмэн предложил программу классификации графов по свойствам их 4-вершинных подграфов [1]. Там же рассмотрены связи между количеством полных подграфов на четырех вершинах (4-клик) и количеством 4-клик с одним удаленным ребром. Мы рассмотрим другой аспект этой программы.

Через (m, n) обозначим полный двудольный граф с долями порядка m и n . Граф $(m, 1)$ называется *m -лапой*, если $m \geq 2$. При изучении Д. Зейделем сильно регулярных графов, имеющих собственное значение -2 , наибольшие сложности вызвал случай, когда граф не содержал 3-лап [2]. М. Нуматой [3] получена классификация реберно регулярных графов, не содержащих 3-лап. В работе В. В. Кабанова и автора [4] найдены все кореберно регулярные графы без 3-лап. В данной работе получено описание графов без 3-лап, в которых μ -подграфы регулярны валентности α . Вершину $a \in \Gamma$ назовем *редуцированной*, если $\{x \in \Gamma \mid a^\perp \subseteq x^\perp\}$ состоит из единственной вершины a . Граф Γ называется *редуцированным*, если все его вершины редуцированы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00488.

ТЕОРЕМА. Если Γ – связный редуцированный граф без 3-лап, содержащий 3-клик, в котором μ -подграфы регулярны валентности $\alpha > 0$, то Γ является одним из следующих графов:

- (1) треугольный граф $T(m)$, $m \geq 6$;
- (2) граф Шлефли (сильно регулярный граф с параметрами $(27, 16, 10, 8)$, дополнительный к точечному графу обобщенного четырехугольника $GQ(2, 4)$);
- (3) граф икосаэдра.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть Γ – реберно регулярный граф без 3-лап. Тогда граф Γ является либо реберным графом регулярного графа без треугольников (и μ -подграфы – клики из не более чем двух вершин), либо сильно регулярным графом без 3-клик, либо графом из заключения теоремы.

Граф на множестве пар $X \times Y$ называется $(m \times n)$ -графом, если $|X| = m$, $|Y| = n$, а пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Иногда $(m \times n)$ -граф называется *прямоугольной решеткой*. При $m = n$ граф называется *решетчатым*. Треугольным графом $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин; $|X| = m$ и пары $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ смежны только, если они имеют общий элемент. Реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) , в котором каждая пара вершин a, b с $d(a, b) = 2$ имеет μ общих смежных с ними вершин, т.е. $|[a] \cap [b]| = \mu$, называется *вполне регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ)* . Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным*. Далее подграф из Γ будет означать индуцированный подграф.

Графом Тэйлора называется вполне регулярный граф диаметра 3, в котором каждая вершина лежит в $a^\perp \cup b^\perp$ для любых двух вершин с $d(a, b) = 3$. *Граф икосаэдра* – это граф Тэйлора, в котором окрестность любой вершины является пятиугольником. *Граф Тервиллигера* – это граф, в котором μ -подграфы являются кликами одного порядка.

1. Вспомогательные результаты. В этом пункте Γ – связный граф без 3-лап.

ЛЕММА 1.1. Пусть $a \in \Gamma$. Тогда верны следующие утверждения:

- (1) если b, c – не смежные вершины из $[a]$, то $[a] \subseteq b^\perp \cup c^\perp$;
- (2) если b, c – не смежные вершины из $\Gamma - a^\perp$, то μ -подграф $[b] \cap [c]$ не пересекает $[a]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если вершина $x \in [a]$ не лежит в $b^\perp \cup c^\perp$, то граф $\{a; b, c, x\}$ является 3-лапой и (1) доказано.

Пусть выполнено условие (2) леммы. Если x – вершина из $[a] \cap [b] \cap [c]$, то граф $\{x; a, b, c\}$ является 3-лапой.

ЛЕММА 1.2. Если $acbd$ – четырехугольник графа Γ , то выполняются следующие утверждения:

- (1) $a^\perp \cup b^\perp = c^\perp \cup d^\perp$;
- (2) если μ -подграфы $[a] \cap [b]$, $[c] \cap [d]$ являются регулярными графами одинаковой валентности, то $k_a + k_b = k_c + k_d$, $\mu(a, b) = \mu(c, d)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1.1 $[a], [b]$ содержатся в $c^\perp \cup d^\perp$. Утверждение (1) следует теперь из симметричности четырехугольника.

Пусть α – валентность указанных μ -графов. По лемме 1.1 $k_a = 2 + \lambda_{ac} + \lambda_{ad} - \alpha$, $k_b = 2 + \lambda_{bc} + \lambda_{bd} - \alpha$. Выписав аналогичные выражения для k_c , k_d , получим первое равенство в (2).

Число вершин в графе $a^\perp \cup b^\perp$ равно $2 + k_a + k_b - \mu(a, b)$. Это же число согласно (1) равно $2 + k_c + k_d - \mu(c, d)$. Отсюда следует второе равенство в (2).

ЛЕММА 1.3. *Если $acbd$ – четырехугольник графа Γ и граф $[b] \cap [e]$ содержит несмежные вершины для $e \notin a^\perp \cup b^\perp$, то $x^\perp = b^\perp$ для любой не смежной с a вершины $x \in [c] \cap [d]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1.2 $a^\perp \cup b^\perp = a^\perp \cup x^\perp$; в частности, $[x]$ содержит $[b] \cap [e]$. Снова по лемме 1.2 $e^\perp \cup b^\perp = e^\perp \cup x^\perp$. Таким образом, $b^\perp$ и $x^\perp$ совпадают вне $a^\perp \cap e^\perp$. Утверждение леммы следует теперь из леммы 1.1 (2).

Лемма 1.3 доказана В.В. Кабановым. Им же предложено следующее утверждение, которое может оказаться полезным и для некоторых графов с 3-лапами. Скажем, что граф Σ обладает *четырёхугольным свойством*, если для любого четырехугольника $acbd$ графа Σ графы $a^\perp \cup b^\perp$ и $c^\perp \cup d^\perp$ совпадают.

ЛЕММА 1.4. *Пусть Σ – граф, обладающий четырёхугольным свойством, и a, b, e – 3-кликка, не лежащая в окрестности никакой вершины. Если пары a, b и b, e лежат в четырехугольниках, причем c, d – не смежные вершины из $[a] \cap [b]$, то $b^\perp \subseteq x^\perp$ для любой не смежной с a вершины $x \in [c] \cap [d]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО является простой модификацией рассуждений из доказательства леммы 1.3.

Следующее утверждение справедливо для произвольных графов Тервиллигера.

ЛЕММА 1.5. *Пусть Σ – связный редуцированный граф Тервиллигера, a – вершина из Σ . Тогда для любого ребра bc из $[a]$ найдется вершина d , принадлежащая $a^\perp$ и несмежная с b и c .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a^\perp$ содержится в $b^\perp \cup c^\perp$. По редуцированности графа разность $[b] - c^\perp$ содержит вершину x из $[a]$, $[c] - b^\perp$ содержит y из $[a]$. Заметим, что вершины x и y не смежны, иначе $[x] \cap [c]$ содержит несмежные вершины b и y .

Теперь граф $[x] \cap [y]$ содержится в $[b] \cap [c]$. В самом деле, если z – несмежная с b вершина из $[x] \cap [y]$, то z смежна с c по предположению и $[b] \cap [z]$ содержит несмежные вершины x и c . Теперь $[y] \cap [b]$ содержит весь μ -граф $[x] \cap [y]$ и вершину c . Противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.6. *Пусть Γ – связный редуцированный граф Тервиллигера без 3-лап с $\mu > 1$. Тогда Γ – граф икосаэдра.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $a, b \in \Gamma$ и $d(a, b) = 2$, то для любой вершины $c \in [a] \cap [b]$ получим равенство $k_c = 2 + \lambda_{ac} + \lambda_{bc} - (\mu - 1)$.

Для вершины $c \in \Gamma$ положим $\Lambda_c = [c]$ и покажем, что Λ_c – регулярный граф валентности λ . Из условия $\mu > 1$ и редуцированности Γ следует, что граф Λ_c – связный граф Тервиллигера. Пусть xy – ребро графа Λ_c . По лемме 1.5 Λ_c содержит вершину z , не смежную с x, y . Каки выше, $k_c = 3 - \mu + \lambda_{cx} + \lambda_{cz}$, поэтому $\lambda_{cx} = \lambda_{cy}$ и Λ_c – регулярный граф валентности λ .

По связности графа Γ получим, что $\lambda_{uw} = \lambda$ для любого ребра uw . Регулярность графа Γ следует теперь из равенства, приведенного в первом абзаце доказательства.

По теореме Тэйлора–Ливингстона [5, 1.5.3] вполне регулярный неполный граф Тервиллигера без 3-лап либо имеет $\mu = 1$, либо является графом икосаэдра.

ЛЕММА 1.7. *Если Δ – связный граф, в котором все μ -графы регулярны одинаковой валентности, не являются кликами и имеют одинаковое число вершин, то Δ является регулярным графом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a, b – пара смежных вершин из Γ , c – произвольная вершина из $[a] - [b]$. Если $\mu = |[b] \cap [c]|$ и α – валентность μ -графа $[b] \cap [c]$, то вершина c смежна с $\mu - \alpha - 1$ вершиной из $[b] - a^\perp$. Теперь число ребер из $[b] - a^\perp$ в $[a] - b^\perp$ равно $|[b] - a^\perp|(\mu - \alpha - 1)$, а число ребер из $[a] - b^\perp$ в $[b] - a^\perp$ равно $|[a] - b^\perp|(\mu - \alpha - 1)$. Отсюда $|[b] - [a]| = |[a] - [b]|$ и, следовательно, $|[a]| = |[b]|$. Лемма доказана.

2. Четырехугольники в графах без 3-лап. Пусть до конца работы граф Γ является контрпримером к теореме. Скажем, что пара вершин a, b из Γ является *сильной*, если граф $[a] \cap [b]$ не является кликой. Вершину a назовем *сильной*, если она образует сильную пару с некоторой вершиной b .

ЛЕММА 2.1. *Граф Γ содержит четырехугольники.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если Γ не содержит четырехугольников, то Γ является графом Тервиллигера с $\mu = \alpha + 1$. По лемме 1.6 Γ – граф икосаэдра. Лемма доказана.

Зафиксируем четырехугольник $acbd$ графа Γ и положим $\Delta = \{a, b, c, d\}$, $\Lambda = a^\perp \cup b^\perp$.

ЛЕММА 2.2. *Если $acbe$ – геодезический 3-путь из Γ , то μ -подграфы $[a] \cap [b]$, $[c] \cap [e]$ являются кликами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $[a] \cap [b]$ содержит несмежные вершины c, d . По лемме 1.2 $e \in c^\perp \cup d^\perp$. Противоречие с тем, что $e \in \Gamma_3(a)$.

ЛЕММА 2.3. *Γ не содержит несвязных μ -подграфов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть граф $[a] \cap [b]$ несвязен. Тогда он состоит из двух изолированных клик C, D порядка $\alpha + 1$. Пусть c, e – две вершины из C . Согласно лемме 1.2 графы $c^\perp, e^\perp$ совпадают вне $d^\perp$ для любой вершины $d \in D$. Выберем вершину $x \in [c] - e^\perp$. Без ограничения общности, $x \in [a] \cap D^\perp$. Заметим, что $[x] \cap [b]$ содержит изолированную клику D , поэтому $[x] \cap [b] \cap c^\perp$ лежит в $e^\perp$. Но тогда в графе $[e] \cap [x]$ вершина c смежна еще с a , и валентность c в этом графе не меньше $\alpha + 1$. Значит, $c^\perp = e^\perp$, что противоречит редуцированности графа.

ЛЕММА 2.4. *Пусть вершина $g \in \Gamma_2(a) - \Lambda$. Тогда граф $[a] \cap [g]$ пересекает $[c]$ и $[d]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $[g] \cap [a] \subseteq [c]$. Для вершины $w \in [a] \cap [g]$ получим включение $[w] \cap a^\perp \subseteq c^\perp$, иначе $[w]$ содержит 3-клик: c, g и вершину из $[a] - c^\perp$. Если граф $[a]$ содержит пару несмежных вершин x, y из $[d] \cap [w]$, то $x, y \in [c] \cap [d]$. По лемме 1.1 $[w] \subseteq x^\perp \cup y^\perp$ и $g \in \Lambda$, противоречие.

Значит, $[d] \cap [w]$ содержит $(\alpha + 1)$ -клику из $a^\perp$, лежащую в $[c] \cap [d]$, и граф $[c] \cap [d]$ не связан. Противоречие с леммой 2.3.

ЛЕММА 2.5. Пусть вершина $g \in \Gamma_2(a) - \Lambda$. Тогда

- (1) $[g] \cap [x] \neq [g] \cap [y]$ для любого ребра xy графа $\{a, b\} \cup ([a] \cap [b])$;
- (2) граф $\{a, b\} \cup ([a] \cap [b])$ является полным многодольным с долями порядка 2;
- (3) пара g, x является сильной для $x \in \{a, b\} \cup ([a] \cap [b])$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x \in \{a, b\}$, то утверждение (1) следует из леммы 2.4. Пусть $x, y \in [a] \cap [b]$ и $[g] \cap [x] = [g] \cap [y]$. Для вершины $w \in [x] \cap [g]$ получим равенство $[w] \cap [x] = [w] \cap [y]$. Отсюда $[g] \cap [x]$ является $(\alpha + 1)$ -кликой и $x^\perp, y^\perp$ совпадают вне $[a] \cap [b]$. Пусть z – несмежная с x вершина из $[a] \cap [b] \cap [y]$.

Выберем $w \in [g] \cap [x] \cap [a]$. Тогда вершина y имеет валентность α в графе $[z] \cap [w]$, причем эти α вершин лежат в $[x]$. Противоречие с тем, что вершина y смежна еще с вершиной b из $[x] \cap [z]$. Утверждение (1) доказано.

Если вершина $x \in \{a, b\} \cup ([a] \cap [b])$ не смежна с двумя вершинами $y, z \in \{a, b\} \cup ([a] \cap [b])$, то согласно лемме 1.2 $[g] \cap [z] = [g] \cap [y]$, что противоречит утверждению (1) леммы. Это доказывает утверждение (2).

Пусть граф $[a] \cap [g]$ является кликой. Без ограничения общности, можно считать, что $|[g] \cap [a] \cap [c]| \geq (\alpha + 1)/2$. Выберем вершину $w \in [g] \cap [a] \cap [d]$. Очевидно, $[w]$ содержит $\alpha/2 + 1$ вершин из $c^\perp \cap d^\perp$, поэтому валентность вершины a в графе $[w] \cap [c]$ не меньше $(2\alpha + 1)/2$. Полученное противоречие доказывает, что a, g – сильная пара. Ввиду утверждений (1), (2) леммы любую вершину $x \in \{a, b\} \cup ([a] \cap [b])$ можно взять в роли a ; это доказывает (3).

ЛЕММА 2.6. Для любой сильной вершины x граф $\Gamma_3(x)$ пуст.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что граф $\Gamma_3(a)$ пуст. Пусть $e \in \Gamma_3(a)$ и $afge$ – некоторый 3-путь. Если $g \in [b]$, то весь μ -подграф $[a] \cap [g]$ лежит в $[b]$, иначе $[g]$ содержит 3-коклику. В этом случае граф $[a] \cap [g]$ является связной компонентой графа $[a] \cap [b]$, что противоречит лемме 2.3.

Значит $g \notin \Lambda$ и по лемме 2.5(3) пара a, g является сильной. Противоречие с леммой 2.2.

ЛЕММА 2.7. Пусть $\Gamma \neq \Lambda$. Тогда

- (1) любая вершина из $[a] - [b]$ смежна с некоторой вершиной в $\Gamma - \Lambda$;
- (2) вершина $x \in \Gamma - a^\perp$ образует сильную пару с a , причем $\Gamma \neq a^\perp \cup x^\perp$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $e \in \Gamma - a^\perp, y \in [a] - [b]$ и $[y] \subseteq \Lambda$. Ввиду леммы 2.5(2) $[y]$ содержит не менее $\alpha/2 + 1$ вершин из $[e] \cap [a]$. По лемме 1.1 $[y] \cap [e]$ не пересекает $[b]$, поэтому $[y] \cap [e] \subseteq [a]$. Но если u, w – не смежные вершины из $[y] \cap [e]$, то по лемме 2.5 $u^\perp \cup w^\perp = a^\perp \cup e^\perp$. Противоречие с тем, что $y \notin [e]$. Значит, $[y] \cap [e]$ является $(\alpha + 1)$ -кликой из $[a] \cap [e]$. Противоречие с леммой 2.3. Утверждение (1) доказано.

Пусть $x \in \Gamma - a^\perp$ и граф $[a] \cap [x]$ является кликой. Ввиду леммы 2.5 $x \in \Lambda$. Если x смежна с некоторой вершиной $e \in \Gamma - \Lambda$, то $[b] \cap [e]$ содержит не смежную с x вершину z . По лемме 2.5(3), примененной к 4-угольнику $bxez$, получим, что a, x – сильная пара. Значит, $[x]$ не содержит вершин из $\Gamma - \Lambda$. Противоречие с утверждением (1) леммы.

ЛЕММА 2.8. $\Gamma = a^\perp \cup b^\perp$ для любой сильной пары a, b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $\Lambda \neq \Gamma$. Пусть $x \in [a]$. Если $x \in [a] \cap [b]$, то x – сильная вершина и $x^\perp \cup y^\perp = \Lambda$ для не смежной с x вершины $y \in [a] \cap [b]$. Если же $x \in [a] - [b]$, то по лемме 2.7 x, b – сильная пара и $\Gamma \neq x^\perp \cup b^\perp$. По лемме 2.7, примененной к вершине x вместо a , x, z – сильная пара для любой вершины $z \in \Gamma - x^\perp$. По связности графа любой μ -подграф из Γ является полным многодольным графом с долями порядка 2 на $\alpha + 2$ вершинах. По лемме 1.7 граф Γ регулярен. По теореме Кабанова и автора [4] Γ – прямоугольная решетка, треугольный граф или граф Шлефли. Но в решетке $\alpha = 0$. Противоречие с выбором Γ . Лемма доказана.

3. Окончание доказательства. Пусть v – число вершин в графе Γ . Ввиду леммы 2.8 $v = 2 + k_a + k_b - \mu(a, b)$ для любой сильной пары a, b .

ЛЕММА 3.1. Пусть a, b – сильная пара и $[a] \cap [b]$ содержит вершину x , лежащую в 3-кликке x, y, z . Тогда $\{a, b\} \cup ([a] \cap [b])$ – полный многодольный граф с долями порядка 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены условия леммы. Без ограничения общности, $y \in [a] - [b]$, $z \in [b] - [a]$. Выберем не смежную с x вершину w из $[a] \cap [b]$. Пусть $[w]$ содержит $\beta + 1$ вершин из $[x] \cap [y]$, $\gamma + 1$ вершин из $[x] \cap [z]$. В графе $[a] \cap [b]$ вершина w имеет валентность α ; поэтому $[a] \cap [b] \cap [w]$ содержит $\alpha - \beta - \gamma$ вершин из $[y] \cap [z]$.

В графе $[x] \cap [w]$ вершина a имеет валентность α , причем β из этих вершин лежат в $[y]$, а остальные $\alpha - \beta$ вершин лежат в $[z]$. Симметрично, $[x] \cap [w] \cap [b]$ содержит γ вершин из $[z]$ и $\alpha - \gamma$ вершин из $[y]$. Таким образом, $[x]$ пересекает $[a] \cap [b]$ по $\alpha - \beta$ вершинам из $[z]$ и по $\alpha - \gamma$ вершинам из $[y]$. Следовательно, $\alpha = \beta + \gamma$.

Теперь $\mu(w, x) = 2 + \beta + \gamma = 2 + \alpha$. Поэтому $\{x, w\} \cup ([x] \cap [w]) = \{a, b\} \cup ([a] \cap [b])$ – полный многодольный граф с долями порядка 2 и $\beta = \gamma = \alpha/2$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. Если a, b – сильная пара, то $[a] \cap [b]$ не пересекает 3-кликки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнены условия леммы 3.1. Без ограничения общности, $y \in [a] - [b]$, $z \in [b] - [a]$. Выберем не смежную с x вершину w из $[a] \cap [b]$.

Граф $[a] \cap [z]$ лежит в $x^\perp \cup y^\perp$. Из доказательства леммы 3.1 следует, что $[a] \cap [z]$ содержит $\alpha/2$ вершин из $[x] \cap [z]$ и $1 + \alpha/2$ вершин из $[y] \cap [z]$. Отсюда граф $[a] \cap [z]$ является кликой; поэтому $[a], [c]$ совпадают на $[y] \cap [z]$ для $c \in [a] \cap [x] \cap [z]$. Как и выше, $[y] \cap [c]$ содержит $\alpha/2$ вершин из $[x] \cap [z]$ и $1 + \alpha/2$ вершин из $[x] \cap [y]$. Снова граф $[y] \cap [c]$ является кликой. Но если $[c]$ содержит смежную с b вершину $d \in [x] \cap [y]$, то d смежна с единственной вершиной w из $[c] \cap [y] \cap [z]$. Таким образом, $\alpha = 2$.

Пусть $c \in [a] \cap [x] \cap [z]$, u – отличная от w смежная с c вершина из $[y] \cap [z]$. Тогда граф $[b] \cap [u]$ не является кликой (вершина $d \in [y] \cap [z] - \{u, w\}$ не смежна с c) и содержит не смежную с z вершину. Но $[b] \cap [u]$ лежит в $(x^\perp \cup y^\perp) \cap (x^\perp \cup z^\perp)$; поэтому $[b] \cap [u]$ содержит вершину из $[x] \cap [y]$. Противоречие с тем, что b смежна с единственной вершиной из $[x] \cap [y]$, которая не смежна с u . Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Пусть $acbd$ – четырехугольник, x, y, z – 3-кликка. Одна из вершин a, b смежна с единственной вершиной из этой 3-кликки. Пусть для определенности a не смежна с y, z . Тогда a, y, z является 3-кликкой, причем $a \in [c] \cap [d]$ для сильной пары c, d . Противоречие с леммой 3.2. Теорема доказана.

Докажем следствие. Пусть Γ – реберно регулярный граф без 3-лап с параметрами (v, k, λ) . Согласно лемме 1.1 μ -подграфы из Γ регулярны валентности $2 + 2\lambda - k$. Если $2 + 2\lambda - k = 0$, то окрестность любой вершины состоит из двух изолированных

Рис. 1. Граф $P(3)$

$(\lambda + 1)$ -клик. В этом случае граф Γ является реберным графом регулярного графа без треугольников. Если же $2 + 2\lambda - k > 0$, то либо Γ является сильно регулярным графом без 3-клик, либо граф Γ удовлетворяет условиям теоремы. Отметим в заключение, что реберно регулярный граф без 3-лап диаметра 2 является либо сильно регулярным графом, либо графом $P(m)$ (см. граф $P(3)$ на рис. 1) [3].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hestenes M. D., Higman D. G. Rank 3 groups and strongly regular graphs // Proc. SIAM-AMS. 1971. V. 4. P. 141–159.
- [2] Seidel J. J. Strongly regular graphs with $(-1, 1, 0)$ adjacency matrix having eigenvalue 3 // Linear Algebra Appl. 1968. V. 1. P. 281–298.
- [3] Numata M. On a characterization of a class of regular graphs // Osaka J. Math. 1974. V. 11. P. 389–400.
- [4] Кабанов В. В., Махнев А. А. Кореберно регулярные графы без 3-лап // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 4. С. 495–503.
- [5] Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A. Distance-Regular Graphs. Berlin: Springer, 1989.

Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург
E-mail: mak@top.imm.intec.ru

Поступило
 18.04.96