Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Митин, Неразрешимость элементарной теории групп, сохраняющих меру преобразований, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 3, 414–420

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1297>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 13:38:53

УДК 517.9+519.682

НЕРАЗРЕШИМОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ТЕОРИИ ГРУПП, СОХРАНЯЮЩИХ МЕРУ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

А. В. Митин

В работе доказывается неразрешимость элементарной теории группы автоморфизмов пространства Лебега. Показана возможность интерпретации арифметики в этой теории. Техника доказательства может быть перенесена на некоторые другие группы. Библиография: 5 названий.

Введение. Группа обратимых преобразований вероятностного пространства Лебега изучается в эргодической теории [1]. Так, например, установлено, что эта группа является простой [2], не имеет внешних автоморфизмов [3]. Также изучались такие ее свойства, как существование в этой группе элемента, не сопряженного своему обратному, представление любого элемента в виде коммутатора и другие свойства, выражаемые в элементарном теоретико-групповом языке (см., например, [1], [2], [4]). Алгоритмическая неразрешимость элементарных теорий была установлена для многих групп, некоторые примеры приведены в [5]. Гипотезу о неразрешимости элементарной теории данной группы высказал В. В. Рыжиков. В настоящей работе показана выразимость арифметики в этой теории, что влечет справедливость гипотезы.

1. Основные определения и формулировка теоремы. Пусть G – группа обратимых преобразований отрезка $[0, 1]$, сохраняющих меру Лебега μ . *Произведение* в G – композиция преобразований. Преобразования отождествляются, если они различаются только на множестве меры нуль. Два множества A и B (подмножества $[0, 1]$) *отождествляются*, если $\mu(A \Delta B) = 0$. Обозначим $\text{Supp}(f) = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \neq x\}$ (суппорт f), где $f \in G$, и fA – образ множества A при действии преобразования f . Все рассматриваемые множества и функции измеримы.

Пусть L – язык теории групп. Он содержит: переменные для элементов группы $f, g, h, f_1, \dots$, групповое произведение $t_1 t_2$ и равенство $t_1 = t_2$ двух термов t_1 и t_2 (элементов G), связки и кванторы.

ТЕОРЕМА. *Существует перевод (эффективная процедура), строящий для любой данной замкнутой формулы арифметики такую замкнутую формулу в L , которая истинна в G тогда и только тогда, когда истинна данная формула.*

Пусть L^+ – расширение L , в который добавлены: переменные для измеримых множеств $A, B, C, A_1, \dots$, функция $\text{Supp}(f)$ – суппорт преобразования t , множество tT – образ множества T при действии t (где T – терм для множеств, а t – терм для преобразований), отношение для множеств $T_1 \nabla T_2$, обозначающее $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ (пересечение меры нуль).

Для доказательства сначала построим перевод арифметики в L^+ , а затем L^+ в L . Для нас будет удобна такая арифметика, в которой натуральные числа начинаются с 2, а не с 0. Как обычно, имеются знаки “+”, “·”, “=”. Очевидно, такая арифметика легко интерпретируется в обычной и обратно.

Доказательства лемм, используемых в п. 2 и 3, отнесены в п. 4.

2. Интерпретация арифметики в L^+ . Очевидно, включение $T_1 \subseteq T_2$, равенство $T_1 = T_2$ и формулы, содержащие объединение $T_1 \cup T_2$, пересечение $T_1 \cap T_2$, разность $T_1 \setminus T_2$, пустое множество $\emptyset$, тождественное преобразование 1 , t^{-1} – обратное преобразование для t , легко определяются в L^+ .

В дальнейшем определим формулу в L^+ , выделяющую некоторый подкласс периодических преобразований. Эти преобразования будем называть *простыми*. Для любого $n \geq 2$ будет существовать непустой класс таких преобразований с периодами равными n . Мы будем представлять этим классом натуральное число n . Затем определим формулы, выражающие равенство, сложение и умножение периодов простых преобразований.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество A *инвариантно* для f , если $fA = A$.

Натуральное $n \geq 2$ есть *период* f , если n минимальное такое, что $f^n = 1$; при этом f назовем *периодическим преобразованием* (при $n = 2$ такое f называется *инволюцией*).

Множество B называется *орбитой* A для f , если B есть минимальное инвариантное множество для f , содержащее A . В языке L^+ это запишется так:

$$B = \text{Orb}_f A \Leftrightarrow A \subseteq B \ \& \ fB = B \ \& \ \forall C ((fC = C \ \& \ A \subseteq C) \Rightarrow B \subseteq C).$$

A называется *базой* f , если A – минимальное множество, орбита которого есть $\text{Supp}(f)$. В языке L^+

$$\text{Base}_f A \Leftrightarrow \text{Orb}_f A = \text{Supp}(f) \ \& \ \forall C ((\text{Orb}_f C = \text{Orb}_f A \ \& \ C \subseteq A) \Rightarrow C = A).$$

f называется *простым преобразованием*, если $f \neq 1$ и u f есть база, и если в произвольной базе взять два непересекающихся множества B_1 и B_2 , одно из которых – образ другого для некоторого преобразования, то найдется преобразование g , которое коммутирует с f , отображает B_1 в B_2 и отображает орбиту B_1 в орбиту B_2 (для f), и эти орбиты не пересекаются. Назовем такие g *изоморфизмами орбит* B_1 и B_2 . Это определение также легко записать в языке L^+ .

ЛЕММА 2.1. Каждое простое преобразование является периодическим, и каждое натуральное число $n \geq 2$ представляется простым преобразованием.

Следующие леммы позволяют выразить в L^+ равенство, сложение и умножение периодов простых преобразований.

ЛЕММА 2.2. Преобразование h есть ограничение f на инвариантное множество A тогда и только тогда, когда $fA = A$, $\text{Supp}(h) = A$ и для любого $C \subseteq A$ имеем $hC = fC$.

ЛЕММА 2.3. Периоды простых f и g равны тогда и только тогда, когда существуют непустые непересекающиеся множества $A \subseteq \text{Supp}(f)$ и $B \subseteq \text{Supp}(g)$ такие, что $fA = A$, $gB = B$, а произведение ограничений f на A и g на B является простым.

ЛЕММА 2.4. Для простых f_1, g_1, h_1 период h_1 равен сумме периодов f_1 и g_1 тогда и только тогда, когда найдутся простые f, g, h с периодами, равными периодам f_1, g_1, h_1 соответственно, такие, что $\text{Supp}(f)$ и $\text{Supp}(g)$ не пересекаются, и существуют инволюция h_2 и множества A, B – базы f и g такие, что $h_2 A = B$ и $h = fh_2g$.

ЛЕММА 2.5. Для простых f_1, g_1, h_1 период h_1 равен произведению периодов f_1 и g_1 тогда и только тогда, когда найдутся простые f, g, h с периодами равными периодам f_1, g_1, h_1 соответственно, такие, что $fg = gf$ и $\text{Supp}(f) = \text{Supp}(g) = \text{Supp}(h)$, и существует множество A такое, что орбиты A для g и для f – базы f и g соответственно, и h есть произведение g и ограничения f на орбиту A для f .

Теперь, так как свойство быть простым преобразованием выразимо в языке L^+ , добавим для удобства в язык L^+ переменные для простых преобразований. Это не увеличит выразительные возможности языка.

При переводе заменяем арифметические переменные на переменные из L^+ , ограниченные простыми преобразованиями, а арифметические равенство, сложение и умножение на соответствующие им в силу лемм выражения в L^+ для простых преобразований. При этом истинность произвольной формулы сохранится, так как любой оценке арифметических переменных натуральными числами будет соответствовать оценка новых переменных произвольными простыми преобразованиями с периодами, равными этим натуральным числам, и при этом равенство сложение и умножение адекватны в силу лемм.

3. Перевод из L^+ в L . Для удобства введем переменные для инволюций: $a, b, c, a_1, \dots$. Устраняем переменные по множествам, представляя их сушпортами инволюций. Это возможно, так как верна

ЛЕММА 3.1. Для любого множества найдется инволюция с сушпортом, совпадающим с этим множеством.

Далее устраняем конструкции языка L^+ , которых нет в L , выражая их формулами L . Выражаем действие преобразования на сушпорт: $f \text{Supp}(g) = \text{Supp}(fgf^{-1})$.

Выражаем в L сушпорты произвольных преобразований, оставляя пока дополнительную возможность использовать сушпорты инволюций. Используем для этого очевидные эквивалентности:

$$\text{Supp}(f_1) \nabla \text{Supp}(f_2) \iff \exists a_1, a_2 (\text{Supp}(f_1) = \text{Supp}(a_1) \& \text{Supp}(f_2) = \text{Supp}(a_2) \& \text{Supp}(a_1) \nabla \text{Supp}(a_2)),$$

$$\text{Supp}(f) = \text{Supp}(a) \iff \forall b (\text{Supp}(f) \nabla \text{Supp}(b) \iff \text{Supp}(a) \nabla \text{Supp}(b)),$$

а также следующее утверждение.

$$\text{ЛЕММА 3.2. } \text{Supp}(f) \nabla \text{Supp}(b) \iff \forall c (\text{Supp}(c) = \text{Supp}(b) \implies fc = cf).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элементы f и g сопряжены (запись: $f \sim g$), если $\exists h \ g = h^{-1}fh$.

Будем называть f маленькими инволюциями, если

$$s(f) \iff f^2 = 1 \& \exists a \forall b_1, b_2 (b_1, b_2 \sim f \implies a \neq b_1 b_2).$$

Положим также

$$\begin{aligned} \text{le}(f, g) &\iff s(f) \& s(g) \& \forall a_1, a_2 \exists b_1, b_2 ((a_1, a_2 \sim f \& (a_1 a_2)^2 = 1) \\ &\implies (b_1, b_2 \sim g \& a_1 a_2 = b_1 b_2)), \end{aligned}$$

$$\text{Dis}(f, g) \iff s(f) \& s(g) \& s(fg) \& \forall a, b (a \sim f \& b \sim g \& (ab)^2 = 1 \& \text{le}(ab, fg)).$$

ЛЕММА 3.3. *Верны тождества (в естественном расширении над L^+):*

- 1) $s(a) \iff \mu(\text{Supp}(a)) < 1/2$;
- 2) $\text{le}(a, b) \iff s(a) \& s(b) \& \mu(\text{Supp}(a)) \leq \mu(\text{Supp}(b))$;
- 3) $\text{Dis}(a, b) \iff s(a) \& s(b) \& s(ab) \& \text{Supp}(a) \nabla \text{Supp}(b)$.

Выражаем суппорты инволюций в L .

ЛЕММА 3.4. *Любая инволюция получается как произведение пяти маленьких инволюций:*

$$\begin{aligned} \text{Supp}(a) \nabla \text{Supp}(b) \iff \exists c_1, \dots, c_{10} \left(a = c_1 \cdots c_5 \right. \\ \left. \& b = c_6 \cdots c_{10} \& \bigwedge_{1 \leq m < k \leq 10} \text{Dis}(c_m, c_k) \right). \end{aligned}$$

Все расширения L до L^+ сводятся к рассмотренным. Поэтому перевод получается в виде последовательности эквивалентных преобразований.

4. Доказательства лемм. Для доказательства утверждений предыдущих пунктов потребуется еще несколько лемм.

ЛЕММА 4.1. $\text{Orb}_f A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, так как $\text{Orb}_f A$ – минимальное инвариантное множество для f , содержащее A .

ЛЕММА 4.2. *Если f простое, A – база f и $f^m A \cap f^k A \neq \emptyset$, то $f^{m-k} = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим посылку. Пусть $n = m - k$. Тогда $f^n \cap A \neq \emptyset$ и достаточно доказать, что $f^n = 1$. Возьмем непустое $B \subseteq f^{-1}(A \cap f^n A)$. Тогда $B \subseteq A$ и $f^n B \subseteq A$, откуда $f^n B \subseteq B$, иначе $f^n B \setminus B$ можно выбросить из базы A , не уменьшив ее орбиты, что противоречит минимальности базы. Поэтому $f^n B = B$. Так как B выбрано произвольно в $f^{-n}(A \cap f^n A)$, имеем $f^n|_B = 1$. Возьмем $B_1 \subseteq B_2$ и $B_2 \subseteq A$ так, чтобы $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ и $\mu(B_1) = \mu(B_2)$. Так как f простое, найдется преобразование g такое, что $fg = gf$ и $gB_1 = B_2$ и $g \text{Orb}_f B_1 = \text{Orb}_f B_2$ и $\text{Orb}_f B_1 \cap \text{Orb}_f B_2 = \emptyset$. Так как $f^n|_B = 1$, получаем $f^n B_1 = B_1$, и умножая на g , имеем $f^n B_2 = B_2$. Тогда $f^n|_A = 1$. Получим $f^n|_{f^m A} = 1$, где $m \in \mathbb{Z}$. Учитывая, что $\text{Supp}(f) = \text{Orb}_f A = \bigcup_m f^m A$ (лемма 4.1) и $\text{Supp}(f^n) \subseteq \text{Supp}(f)$, получим $f^n = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1. Докажем, что каждое простое преобразование является периодическим. Пусть f простое. Тогда у преобразования f есть база. Пусть A есть база преобразования f . Так как мера всего пространства ограничена, найдутся m и k такие, что $f^m A \cap f^k A \neq \emptyset$ и $m \neq k$. Тогда по лемме 4.2 $|m - k|$ – период f .

Докажем, что каждое натуральное число $n \geq 2$ представляется простым преобразованием. Возьмем n непересекающихся интервалов равной длины. Пусть f отображает k -й интервал в $(k + 1)$ -й ($k < n$) и n -й в первый с помощью параллельных переносов. Тогда f – требуемое преобразование.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.2 очевидно.

ЛЕММА 4.3. Если f простое, а g – ограничение f инвариантным для f множеством A и $g \neq 1$, то g простое и периоды f и g равны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B – база f ; тогда, очевидно, $B \cap A$ – база g , а нужные изоморфизмы орбит для g индуцируются изоморфизмами орбит для f . Равенство периодов есть следствие существования изоморфизмов орбит подходящих подмножеств из A и $B \setminus A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.3. Утверждение этой леммы есть следствие леммы 4.3 и следующего свойства: для простых f и g

$$\exists A, B (A, B \neq \emptyset \ \& \ A \nabla B \ \& \ fA = A \subseteq \text{Supp}(f) \ \& \ gB = B \subseteq \text{Supp}(g)).$$

Докажем последнее. Построим нужные A и B . Пусть (лемма 2.1) n и m – периоды f и g соответственно. Возьмем $C \subseteq \text{Supp}(f)$, $0 < \mu(C) < \mu(\text{Supp}(g))/(mn)$. Пусть $A = \text{Orb}_f C$. Тогда $\mu(A) < \mu(\text{Supp}(g))/m$ и $\mu(\text{Orb}_g A) < \mu(\text{Supp}(g))$. Таким образом, $\text{Supp}(g) \setminus \text{Orb}_g A \neq \emptyset$. Возьмем $B_1 \subseteq \text{Supp}(g) \setminus \text{Orb}_g A$ и $B_1 \neq \emptyset$. Тогда, очевидно, $\text{Orb}_g B_1 \cap \text{Orb}_g A = \emptyset$. Возьмем $B = \text{Orb}_g B_1$. Построенные A и B инвариантны и не пересекаются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.4. Следствие свойств перестановок, действующих на дизъюнктные множества.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.5. Пусть простые f, g, h и множество A удовлетворяют условиям леммы. Пусть n – период f , а m – период g . Пусть $C_{1,1} = A$ и $C_{1,j+1} = fC_{i,j}$ (где $1 \leq j < n$), а $C_{i,1} = fC_{i,n}$ (где всюду $0 \leq i \leq n$), и $C_{i+1,j} = gC_{i,j}$ ($1 \leq i < m$), а $C_{m,j} = gC_{m,j}$ (где всюду $0 \leq j \leq n$). Множества $C_{i,j}$ образуют матрицу, где f циклически переставляет столбцы, а g – строки. Из свойств базы ясно, что все $C_{i,j}$ дизъюнктны. Таким образом, цикл первой строки умножается на циклы-столбцы, объединяя их в один длинный цикл. Очевидно, такие f, g, h легко построить для любых n и m .

ЛЕММА 4.4. $(B \subseteq \text{Supp}(g) \ \& \ fB \not\subseteq \text{Supp}(g) \implies fg \neq gf)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим посылку. Пусть $B_1 = f^{-1}(fB \setminus \text{Supp}(g))$. Тогда $B_1 \neq \emptyset$ и $B_1 \subseteq B \subseteq \text{Supp}(g)$ и $fB_1 \cap \text{Supp}(g) = \emptyset$. Найдется B_2 такое, что $B_2 \subseteq B_1$ и $gB_2 \neq B_2$ (так как $B_1 \subseteq \text{Supp}(g)$). Тогда $fgB_2 \neq fB_2$. Но $gfB_2 = fB_2$ (так как $fB_1 \cap \text{Supp}(g) = \emptyset$). Поэтому $fgB_2 \neq gfB_2$ и $fg \neq gf$.

ЛЕММА 4.5. $\emptyset \neq A \subseteq \text{Supp}(f) \implies \exists B (\emptyset \neq B \subseteq A \ \& \ fB \nabla B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим посылку. Пусть найдется B_1 такое, что $fB_1 \neq B_1$; иначе $\text{Supp}(f) = A = \emptyset$. Очевидно, что в качестве B можно взять $B_1 \setminus fB_1$.

ЛЕММА 4.6. $\mu(A) = \mu(B) \implies \exists a (aA = B \ \& \ \text{Supp}(a) = A \Delta B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай $A \cap B = \emptyset$. Определим для произвольных C и $x \in [0, 1]$ отображение

$$f_C(x) = \begin{cases} \mu\{y \in C \mid y < x\}, & \text{если } x \in C, \\ \mu(C) + \mu\{y \notin C \mid y < x\}, & \text{если } x \notin C. \end{cases}$$

Тогда в качестве инволюции a можно взять $f_B^{-1}f_A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1. Пусть дано произвольное множество C . Поделим его “пополам”. Возьмем $A = \{x \in C \mid \mu(C \cap [0, x]) < \mu(C)/2\}$ и $B = C \setminus A$. Тогда $\mu(A) = \mu(B) = \mu(C)/2$ и $A \cap B = \emptyset$. По лемме 4.6 существует нужная инволюция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2. Запишем доказываемое тождество в виде

$$\text{Supp}(f) \cap \text{Supp}(b) \neq \emptyset \iff \exists c (\text{Supp}(c) = \text{Supp}(b) \text{ \& } fc \neq cf).$$

1) Импликация влево очевидна (если суппорты дизъюнкты, то преобразования коммутируют).

2) Докажем импликацию вправо. Пусть $A = \text{Supp}(a) \cap \text{Supp}(b) \neq \emptyset$. Возьмем $B \subseteq A$ так, что $fB \cap B = \emptyset$ и $\mu(B) < \mu(A)/5$. Если $fB \not\subseteq \text{Supp}(b)$, то возьмем $c = b$. По лемме 4.4 $fc \neq cf$ (что и требуется доказать).

Иначе (когда $fB \subseteq \text{Supp}(b)$) возьмем $B_1 \subseteq A$ так, что $B_1 \nabla B$ и $B_1 \nabla fB_1$ и $\mu(B_1) = \mu(B)$ (это возможно, так как $\mu(A) - \mu(B) - \mu(fB) > \mu(B)$). Если $fB_1 \not\subseteq \text{Supp}(b)$, то возьмем $c = b$; по лемме 4.4 $fc \neq cf$ (что и требуется доказать).

Иначе (когда $fB_1 \subseteq \text{Supp}(b)$) возьмем $B_2 \subseteq A$ такое, что $B_2 \nabla B$ и $B_2 \nabla fB$ и $B_2 \nabla B_1$ и $B_2 \nabla fB_1$ и $\mu(B_2) = \mu(B)$. Это возможно, так как

$$\mu(A) - \mu(B) - \mu(fb) - \mu(B_1) - \mu(fB_1) > \mu(B).$$

Возьмем c_1 такое, что $c_1B = B_1$ и $c_1fB = B_2$ и $\text{Supp}(c_1) = B_1 \cup B \cup fB \cup B_2$. Используя леммы 3.1 и 4.6, выберем c_2 так, чтобы $\text{Supp}(c_2) = \text{Supp}(b) \setminus \text{Supp}(c_1)$. Пусть $c = c_1c_2$; тогда $B_2 = cfB \neq fcB = fB_1$, т.е. $cf \neq fc$ (что и требуется доказать).

ЛЕММА 4.7. 1) $\mu(\text{Supp}(a)) = \mu(\text{Supp}(b)) \iff a \sim b$.

2) $|\mu(\text{Supp}(a)) - \mu(\text{Supp}(b))| \leq x \leq \min(1, (\mu(\text{Supp}(a)) + \mu(\text{Supp}(b)))) \iff \exists a_1, b_1 (a_1 \sim a \text{ \& } b_1 \sim b \text{ \& } (a_1b_1)^2 = 1 \text{ \& } \mu(\text{Supp}(a_1b_1)) = x)$.

3) $0 \leq x \leq \min(1, n\mu(\text{Supp}(a))) \iff \exists b_1, \dots, b_n (b_1, \dots, b_n \sim a \text{ \& } (b_1 \dots b_n)^2 = 1 \text{ \& } \mu(\text{Supp}(b_1 \dots b_n)) = x)$, где $n \geq 2$.

4) $\mu(\text{Supp}(ab)) = \mu(\text{Supp}(a)) + \mu(\text{Supp}(b)) \iff \text{Supp}(a) \nabla \text{Supp}(b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Импликация влево очевидна. Вправо: определим преобразование

$$f(x) = \begin{cases} \mu\{y \in [0, 1] \mid y < x \text{ \& } y < a(y)\}, & \text{если } x < a(x), \\ \mu\{y \in [0, 1] \mid y < a(x) \text{ \& } y < a(y)\} + \mu(\text{Supp}(a))/2, & \text{если } x > a(x), \\ \mu\{y \in [0, 1] \mid y < x \text{ \& } y = a(y)\} + \mu(\text{Supp}(a)), & \text{если } x = a(x). \end{cases}$$

Преобразование f сопрягает инволюцию a с инволюцией, переставляющей два интервала, с помощью параллельных переносов. Так как сопряжение является отношением эквивалентности, любые инволюции с суппортами равной меры сопряжены.

2) Импликация влево очевидна. Докажем импликацию вправо. Допустим посылку. Положим

$$y = \frac{1}{2}(\mu(\text{Supp}(a)) + \mu(\text{Supp}(b)) - x).$$

Пусть инволюция a_1 с помощью параллельных переносов переставляет одну пару отрезков длины $y/2$ и другую пару отрезков длины $\mu(\text{Supp}(a))/2 - y/2$. Пусть инволюция b_1 переставляет упомянутую первую пару отрезков и некоторую пару отрезков длины

$\mu(\text{Supp}(a))/2 - y/2$ (все эти отрезки не пересекаются и укладываются в $[0, 1]$, с учетом исходных неравенств это возможно). Так как действия a_1 и b_1 на первую пару отрезков в произведении взаимно уничтожаются, с учетом 1) утверждение доказано.

3) С учетом 1) и 2) легко доказывается индукцией по n .

4) Очевидно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.3. 1) Следует из леммы 4.7, 3), и 3.1.

2) Следует из леммы 4.7, 2). Действительно, так как выполнено $s(a)$, имеем

$$\min(1, \mu(\text{Supp}(a_1) + \mu(\text{Supp}(a_2))) = 2\mu(\text{Supp}(a)).$$

Аналогичное рассуждение для b .

3) Следует из 1), 2) и леммы 4.7, 4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.4. Любую инволюцию можно представить в виде произведения пяти маленьких инволюций и таких, что каждая пара в произведении даст тоже маленькую инволюцию (лемма 4.7, 3)).

5. Другие естественные группы. Похожими методами автором были получены аналогичные результаты для группы перестановок натурального ряда и для группы автоморфизмов пространства с σ -конечной мерой (например, действительной прямой с мерой Лебега). Следующий пример указал В.В. Рыжиков. Пусть $f \in G$. Преобразование $g \in G$ называется *обобщенной степенью* f , если $g(x) = f^{n(x)}(x)$, где $n(x) \in \mathbb{Z}$ для любого x . *Полной группой* $[f]$ преобразования f называется множество всех обобщенных степеней f .

ТЕОРЕМА. *Если f – эргодическое преобразование, то элементарная теория $[f]$ неразрешима.*

Автор благодарит участников семинара по динамическим системам, работающего под руководством Д.В. Аносова, Р.И. Григорчука и А.М. Стёпина, а также участников колмогоровского семинара механико-математического факультета МГУ за обсуждение работы. Автор также обязан Н.К. Верещагину, А.М. Стёпину за поддержку и ценные замечания и В.В. Рыжикову за постановку задачи и помощь в работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Халмош П. Р. Лекции по эргодической теории. М.: Наука, 1959.
- [2] Fathi A. Le groupe de transformations de $[0, 1]$ qui preservent la mesure de Lebesgue est un groupe simple // Israel J. Math. 1978. V. 29. № 2–3. P. 302–308.
- [3] Eigen S. J. The group of measure-preserving transformations of $[0, 1]$ has no outer automorphisms // Math. Ann. 1982. V. 259. № 2. P. 259–270.
- [4] Рыжиков В.В. Представление преобразований, сохраняющих меру Лебега, в виде произведения периодических преобразований // Матем. заметки. 1985. Т. 38. № 6. С. 860–865.
- [5] Ершов Ю.Л., Лавров И.А., Тайманов А.Д., Тайцлин М.А. Элементарные теории // УМН. 1965. Т. 20. № 4. С. 37–108.