Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Э. Михайлов, Дополнительные признаки неразложимости конечных псевдометрических пространств, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 3, 421–424

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1298>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 17:02:54

УДК 515.124

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПРИЗНАКИ НЕРАЗЛОЖИМОСТИ КОНЕЧНЫХ ПСЕВДОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

М. Э. Михайлов

Продолжено исследование признаков конечных (состоящих из конечного числа точек) неразложимых псевдометрических пространств, которые нельзя разложить в сумму любым иным способом, кроме деления всех расстояний в одинаковой пропорции. Доказано, что неразложимость сохраняется, если в представляющем пространство графе две несвязанные ребром вершины соединить добавочной простой цепью, которая является копией соединяющего эти вершины кратчайшего маршрута, но присоединена противоположными концами. Доказано также, что неразложимы пространства, изображаемые графами $K_{m,n}$ ($m \geq 2, n \geq 3$) с ребрами равной длины.

Библиография: 3 названия.

В предыдущей работе [1] было введено понятие *неразложимого псевдометрического пространства*: это псевдометрическое пространство, которое нельзя разложить в сумму любым иным способом, кроме деления всех расстояний в одинаковой пропорции. Была также выведена процедура проверки на неразложимость любого конечного (состоящего из конечного числа точек) псевдометрического пространства, которая заключается в составлении и решении так называемой проверочной системы уравнений, и установлены некоторые признаки разложимости и неразложимости. В данной работе выводятся два новых признака неразложимости в дополнение к ранее полученным.

Будем пользоваться способом представления псевдометрических пространств в виде графов, который применялся в предыдущей работе [1] и в основном восходит к Зыкову [2]. Ребра графа представляют все те расстояния $r(a, b)$, которые не являются суммой $r(a, b) = r(a, c) + r(b, c)$, где c — любая третья точка. Расстояния представляются рядом с ребрами, если они не равны 1. Расстояние, не представленное ребром, равно кратчайшему маршруту, соединяющему концевые точки [2]. В псевдометрическом пространстве, в отличие от метрического, возможны группы точек с нулевыми расстояниями между ними (кратные вершины). Такая группа рассматривается как одна вершина графа и в данной работе особо не обозначается.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Простой цепью* графа называют цепь без повторяющихся вершин и ребер [3]. Назовем *свободной цепью* простую цепь, состоящую более чем из одного ребра и связанную с остальной частью графа лишь крайними вершинами. *Рефлексом* (*отражением*) простой цепи назовем свободную цепь, которая является ее копией и связана с ней общими крайними вершинами. Если обе цепи соединены аналогичными вершинами, будем называть рефлекс *прямым*, если противоположными — *обратным*. Сказанное пояснено на рис. 1.

Рис. 1. Криволинейная фигура – граф, цепь за ее пределами –
 а) свободная цепь, б) прямой рефлекс, в) обратный рефлекс

ТЕОРЕМА 1. Если в неразложимом псевдометрическом пространстве к произвольному кратчайшему маршруту, состоящему более чем из одного ребра, присоединить его обратный рефлекс, то неразложимость сохранится.

Рис. 2. Криволинейная фигура – пространство G , та же фигура с обратным рефлексом $b_1 b_2 \dots b_n a_1$ кратчайшего маршрута $a_1 a_2 \dots a_n b_1$ – пространство Gr

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим исходное пространство через G , а пространство с обратным рефлексом – через Gr (рис. 2). Пусть G неразложимо. С присоединением обратного рефлекса проверочная система уравнений (см. [1]) для части G не изменится, так как ни для одной пары вершин из G не появится более короткого маршрута. Если бы он появился, то мог бы проходить только через цепь $y_1 \dots y_n$. Но тогда равную длину должен иметь и маршрут, проходящий через цепь $x_1 \dots x_n$. Таким образом, в проверочной системе все стороны из G определяются однозначно (с точностью до постоянного коэффициента), поскольку пространство G неразложимо. С присоединением обратного рефлекса в системе появятся новые уравнения, связанные с циклом $y_1 \dots y_n x_1 \dots x_n$. Кратчайшие маршруты между вершинами цикла должны лежать в цикле. Пусть, например, существует маршрут из b_2 в a_2 меньший, чем $y_1 x_n \dots x_2$ или $y_2 \dots y_n x_1$. Каков бы он ни был, он должен проходить через a_1 или b_1 . Но кратчайший маршрут (или один из них) от a_1 или b_1 до a_2 проходит по цепи $a_1 a_2 \dots a_n$.

Следовательно, получаем дополнительные уравнения:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= y_1 + y_2 + \cdots + y_n, \\ x_2 + \cdots + x_n + y_1 &= y_2 + \cdots + y_n + x_1, \\ &\dots\dots\dots \\ x_n + y_1 + \cdots + y_{n-1} &= y_n + x_1 + \cdots + x_{n-1}. \end{aligned}$$

Решив систему, получим $y_1 = x_1, y_2 = x_2, \dots, y_n = x_n$. Таким образом, все ребра графа Gr однозначно (с точностью до постоянного коэффициента) определяются его проверочной системой. Значит, пространство Gr неразложимо. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. К любому кратчайшему маршруту можно присоединить сколько угодно обратных рефлексов с сохранением неразложимости.

СЛЕДСТВИЕ 2. К любому кратчайшему маршруту можно присоединить сколько угодно прямых и обратных рефлексов с сохранением неразложимости, если среди них есть хотя бы один обратный.

Рис. 3. Присоединение рефлексов к неразложимым пространствам. Все ребра графов имеют длину 1

На рис. 3 даны примеры получения одних неразложимых пространств из других путем присоединения рефлексов. В данном случае все эти рефлекссы одновременно и прямые и обратные.

Следующие графы называются *полными двудольными (бихроматическими)*: вершины в них разбиты на две группы, каждая пара вершин из разных групп связана ребром, других ребер нет. Обозначаются такие графы через $K_{m,n}$, где m, n — число вершин в группах [2]. На рис. 3 указаны пространства, изображаемые графами $K_{2,3}, K_{2,4}, K_{3,3}, K_{2,5}$. Все их ребра имеют длину 1, поэтому равны 1 все межгрупповые расстояния, а все внутригрупповые расстояния равны 2.

ТЕОРЕМА 2. *Псевдометрические пространства, изображаемые графами $K_{m,n}$ ($m \geq 2, n \geq 3$) с ребрами равной длины, неразложимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Примем для определенности, что длина ребер равна 1. Пусть существует удовлетворяющее условиям теоремы неразложимое пространство G с числом вершин m в группе a и числом вершин n в группе b . Добавив вершину c к группе a , получим пространство Gc (рис. 4). В графе G все расстояния не превышают 2, так что добавление вершины c не приведет к сокращению расстояний, и ребра в части G будут по-прежнему однозначно определяться проверочной системой. Поэтому ребра $a_i b_j$ считаем вычисленными. Рассчитаем теперь ребра $x_1 \cdots x_n$. Любая пара ребер x_i, x_j входит в простой цикл $cb_i a_k b_j$, что дает уравнения $x_i + 1 = x_j + 1$ и $x_i + x_j = 2$, из которых следует $x_i = x_j = 1$. Таким образом, все ребра $x_1 \cdots x_n$ однозначно определяются. Следовательно, если G неразложимо, то неразложимо и Gc .

Рис. 4. Криволинейная фигура – пространство G , та же фигура с точкой c – пространство Gc

Пространство, изображаемое графом $K_{2,3}$, – минимальное неразложимое пространство подобного вида [1]. Все другие пространства, удовлетворяющие условиям теоремы, можно получить из $K_{2,3}$ последовательным присоединением вершин и умножением расстояний на постоянный коэффициент. Следовательно, все они неразложимы. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Михайлов М. Э. Разложение конечных псевдометрических пространств // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 2. С. 225–234.
- [2] Зыков А. А. Основы теории графов. М.: Наука, 1987.
- [3] Оре О. Теория графов. М.: Наука, 1980.