Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. К. Потапов, Г. Н. Казимиров, О приближении алгебраическими многочленами функций, имеющих данный порядок k -го обобщенного модуля гладкости, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 3, 425–436

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1299>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 18:17:33

УДК 517.5

О ПРИБЛИЖЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ ДАННЫЙ ПОРЯДОК k -ГО ОБОБЩЕННОГО МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ

М. К. Потапов, Г. Н. Казимиров

В работе рассмотрен вопрос о приближении алгебраическими многочленами классов функций, характеризующихся порядком k -го обобщенного модуля гладкости, определяемого с помощью оператора обобщенного сдвига Якоби.

Библиография: 7 названий.

В данной работе рассматривается вопрос о приближении алгебраическими многочленами классов функций, характеризующихся порядком k -го обобщенного модуля гладкости, определяемого с помощью оператора обобщенного сдвига Якоби. Для модулей гладкости первого порядка, определяемых с помощью того же оператора, этот вопрос рассматривался в работе [1].

1. Будем говорить, что $f \in L_p$, если для $1 \leq p < \infty$ функция f измерима на отрезке $[-1, 1]$ и

$$\|f\|_p = \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty,$$

а для $p = \infty$ функция f непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и

$$\|f\|_\infty = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|.$$

Будем также говорить, что $f \in L_{p,\alpha,\beta}$, $1 \leq p \leq \infty$, если $f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \in L_p$, причем

$$\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \|f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\|_p.$$

Обозначим через $E_n(f)_{p,\alpha,\beta}$ наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ при помощи алгебраических многочленов P_n степени не выше $n-1$ в метрике $L_{p,\alpha,\beta}$, т.е.

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} = \inf_{P_n \in \mathbf{P}} \|P_n(x) - f(x)\|_{p,\alpha,\beta},$$

где $\mathbf{P}$ – множество алгебраических многочленов степени не выше $n-1$ ($n = 1, 2, \dots$).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00094, и фонда поддержки ведущих научных школ, грант № 96-15-96073.

Обозначим через $\mathbf{E}(p, \alpha, \beta, \rho)$ класс функций $f \in L_{p, \alpha, \beta}$, удовлетворяющих условию

$$E_n(f)_{p, \alpha, \beta} \leq C_1 n^{-\rho}, \quad \rho > 0,$$

где постоянная C_1 не зависит от n ($n = 1, 2, \dots$).

Для данных чисел ν и μ ($\nu \geq \mu \geq -1/2$) определим оператор обобщенного сдвига Якоби $T_t(f, x, \nu, \mu)$ по правилу:

1) для $\nu = \mu = -1/2$

$$T_t(f, x, \nu, \mu) = \frac{1}{2} (f(x \cos t + \sqrt{1-x^2} \sin t) + f(x \cos t - \sqrt{1-x^2} \sin t));$$

2) для $\nu = \mu > -1/2$

$$T_t(f, x, \nu, \mu) = \frac{1}{\gamma(\nu)} \int_{-1}^1 f(x \cos t + y \sqrt{1-x^2} \sin t) (1-y^2)^{\nu-1/2} dy;$$

3) для $\nu > \mu = -1/2$

$$T_t(f, x, \nu, \mu) = \frac{1}{\gamma(\nu)} \int_{-1}^1 f\left(x \cos t + y \sqrt{1-x^2} \sin t - (1-y^2)(1-x) \sin^2 \frac{t}{2}\right) (1-y^2)^{\nu-1/2} dy;$$

4) для $\nu > \mu > -1/2$

$$T_t(f, x, \nu, \mu) = \frac{1}{\gamma(\nu, \mu)} \int_0^1 \int_{-1}^1 f\left(x \cos t + yz \sqrt{1-x^2} \sin t - (1-y^2)(1-x) \sin^2 \frac{t}{2}\right) \times (1-y^2)^{\nu-\mu-1} y^{2\mu+1} (1-z^2)^{\mu-1/2} dz dy,$$

где

$$\gamma(\nu) = \int_{-1}^1 (1-y^2)^{\nu-1/2} dy, \quad \gamma(\nu, \mu) = \int_0^1 \int_{-1}^1 (1-y^2)^{\nu-\mu-1} y^{2\mu+1} (1-z^2)^{\mu-1/2} dz dy.$$

Для $f \in L_{p, \alpha, \beta}$ и данных чисел ν и μ ($\nu \geq \mu \geq -1/2$) введем k -ю обобщенную разность Якоби по правилу

$$\Delta_t^1(f, x, \nu, \mu) = T_t(f, x, \nu, \mu) - f(x),$$

$$\Delta_{t_1, \dots, t_k}^k(f, x, \nu, \mu) = \Delta_{t_k}^1(\Delta_{t_1, \dots, t_{k-1}}^{k-1}(f, x, \nu, \mu), x, \nu, \mu), \quad k = 2, 3, \dots,$$

и k -й обобщенный модуль гладкости Якоби по формуле

$$\tilde{w}_k(f, \delta, \nu, \mu)_{p, \alpha, \beta} = \sup_{\substack{|t_i| \leq \delta \\ i=1, \dots, k}} \|\Delta_{t_1, \dots, t_k}^k(f, x, \nu, \mu)\|_{p, \alpha, \beta}.$$

Обозначим через $\mathbf{H}(p, \alpha, \beta, \rho, \nu, \mu, r)$ класс функций $f \in L_{p, \alpha, \beta}$, удовлетворяющих условию

$$\tilde{w}_r(f, \delta, \nu, \mu)_{p, \alpha, \beta} \leq C_1 \delta^\rho, \quad \rho > 0,$$

где постоянная C_1 не зависит от δ .

Введем также обозначения

$$D_{x,\nu,\mu} = (1-x)^{-\nu}(1+x)^{-\mu} \frac{d}{dx} \cdot (1-x)^{\nu+1}(1+x)^{\mu+1} \frac{d}{dx},$$

$$D_{x,\nu,\mu}^1 = D_{x,\nu,\mu}, \quad D_{x,\nu,\mu}^k = D_{x,\nu,\mu}(D_{x,\nu,\mu}^{k-1}),$$

$$T_t^1(f, x, \nu, \mu) = T_t(f, x, \nu, \mu) = T_t f, \quad T_t^k(f, x, \nu, \mu) = T_t^1(T_t^{k-1}(f, x, \nu, \mu), x, \nu, \mu),$$

$$T_{t_1, \dots, t_k}^k(f, x, \nu, \mu) = T_{t_k}^1(T_{t_1, \dots, t_{k-1}}^{k-1}(f, x, \nu, \mu), x, \nu, \mu),$$

$$k = 2, 3, \dots$$

Обозначим через $P_n^{(\nu,\mu)}(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) алгебраические многочлены степени $n-1$, ортогональные друг другу на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1-x)^\nu(1+x)^\mu$ и нормированные условием $P_n^{(\nu,\mu)}(1) = 1$.

2. Сформулируем основной результат работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть числа p, ν, μ и r таковы, что $1 \leq p \leq \infty$, $\nu \geq \mu \geq -1/2$, $r \in \mathbb{N}$. Пусть числа α и β удовлетворяют следующим условиям:

	при $p = 1$	при $1 < p < \infty$	при $p = \infty$
при $\nu = \mu = -\frac{1}{2}$	$\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2p} \leq \alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$ $-\frac{1}{2p} \leq \beta < \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$	$0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$
при $\nu = \mu > -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < \alpha \leq \nu$ $-\frac{1}{2} < \beta \leq \nu$	$-\frac{1}{2p} < \alpha < \nu + 1 - \frac{1}{p}$ $-\frac{1}{2p} < \beta < \nu + 1 - \frac{1}{p}$	$0 \leq \alpha < \nu + 1$ $0 \leq \beta < \nu + 1$
при $\nu > \mu = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < \alpha \leq \nu$ $\beta = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2p} < \alpha < \nu + 1 - \frac{1}{p}$ $-\frac{1}{2p} \leq \beta < \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$	$0 \leq \alpha < \nu + 1$ $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$
при $\nu > \mu > -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < \alpha \leq \nu$ $-\frac{1}{2} < \beta \leq \mu$	$-\frac{1}{2p} < \alpha < \nu + 1 - \frac{1}{p}$ $-\frac{1}{2p} < \beta < \mu + 1 - \frac{1}{p}$	$0 \leq \alpha < \nu + 1$ $0 \leq \beta < \mu + 1$

Пусть число ρ такое, что $2r > \rho > \rho_0$, и

$$\rho_0 = \begin{cases} 2 \max \left(|\alpha - \beta|, \min(\alpha, \beta) - \mu + \frac{1}{2p} - \frac{1}{2}, |\alpha - \beta| + \min(\alpha, \beta) - \mu + \frac{1}{2p} - \frac{1}{2} \right) \\ \quad \text{при } \nu = \mu \geq -\frac{1}{2}, \\ 2 \max \left(0, \beta - \alpha, (\alpha - \beta) - (\nu - \mu), \left(\alpha + \frac{1}{2p} \right) - \left(\nu + \frac{1}{2} \right), \left(\beta + \frac{1}{2p} \right) - \left(\mu + \frac{1}{2} \right) \right) \\ \quad \text{при } \nu > \mu \geq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Тогда класс функций $\mathbf{H}(p, \alpha, \beta, \rho, \nu, \mu, r)$ совпадает с классом функций $\mathbf{E}(p, \alpha, \beta, \rho)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 1 содержит в себе прямую и обратную теоремы теории приближений для модулей гладкости $\tilde{w}_k(f, \delta, \nu, \mu)_{p, \alpha, \beta}$ степенного типа. Если ослабить условия теоремы 1, то для общих модулей гладкости $\tilde{w}_k(f, \delta, \nu, \mu)_{p, \alpha, \beta}$ справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть числа p, ν, μ и r таковы, что $1 \leq p \leq \infty$, $\nu \geq \mu \geq -1/2$, $r \in \mathbb{N}$. Пусть числа α и β выбраны по правилу:

- 1) если $\nu = \mu = -1/2$, то $\alpha = \beta = -1/(2p)$ при $1 \leq p \leq \infty$;
- 2) если $\nu = \mu > -1/2$, то $\alpha = \beta$ и $-1/2 < \alpha \leq \nu$ при $p = 1$, $-1/(2p) < \alpha < \nu + 1/2 - 1/(2p)$ при $1 < p < \infty$, $0 \leq \alpha < \nu + 1/2$ при $p = \infty$;
- 3) если $\nu > \mu = -1/2$, то $\beta = -1/(2p)$, $-1/2 < \alpha \leq \nu$ при $p = 1$, $-1/(2p) < \alpha < \nu + 1/2 - 1/(2p)$ при $1 < p < \infty$, $0 \leq \alpha < \nu + 1/2$ при $p = \infty$;
- 4) если $\nu > \mu > -1/2$, то $\nu - \mu > \alpha - \beta \geq 0$ и $-1/2 < \beta < \mu$ при $p = 1$, $\nu - \mu > \alpha - \beta > 0$ и $-1/(2p) < \beta < \mu + 1/2 - 1/(2p)$ при $1 < p < \infty$, $\nu - \mu > \alpha - \beta \geq 0$ и $0 \leq \beta < \mu + 1/2$ при $p = \infty$.

Тогда для $f \in L_{p, \alpha, \beta}$ справедливы неравенства

$$C_1 E_n(f)_{p, \alpha, \beta} \leq \tilde{w}_r\left(f, \frac{1}{n}, \nu, \mu\right)_{p, \alpha, \beta} \leq \frac{C_2}{n^{2r}} \sum_{m=1}^n m^{2r-1} E_m(f)_{p, \alpha, \beta},$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 не зависят от f и n ($n = 1, 2, \dots$).

В этой работе будет доказана теорема 1. Теорема 2 доказана в [2].

3. Приведем вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства основного утверждения.

ЛЕММА 1. Справедливы следующие свойства оператора обобщенного сдвига Якоби:

- 1) оператор $T_t(f, x, \nu, \mu)$ линеен;
- 2) $T_t(f, \cos \theta, \nu, \mu) = T_\theta(f, \cos t, \nu, \mu)$, $t, \theta \in \mathbb{R}$;
- 3) имеет место теорема умножения

$$T_t(P_n^{(\nu, \mu)}, x, \nu, \mu) = P_n^{(\nu, \mu)}(\cos t) P_n^{(\nu, \mu)}(x);$$

- 4) если $\nu \geq \mu \geq -1/2$ и функция $g(x)T_t(f, x, \nu, \mu) \in L_{1, \nu, \mu}$ для любого $t \in \mathbb{R}$, то верно равенство

$$\int_{-1}^1 g(x)T_t(f, x, \nu, \mu)(1-x)^\nu(1+x)^\mu dx = \int_{-1}^1 f(x)T_t(g, x, \nu, \mu)(1-x)^\nu(1+x)^\mu dx.$$

Свойства 1) и 2) следуют из определения оператора обобщенного сдвига Якоби. Доказательство свойства 3) см. в [3], [4], а свойства 4) – в [5], [1].

ЛЕММА 2 [6]. Пусть $f \in L_{p, \alpha, \beta}$, и пусть числа $\alpha, \beta, \delta, \sigma$ и ν, μ таковы, что $\alpha > -1/p$, $\beta > -1/p$ для $1 \leq p < \infty$ и $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ для $p = \infty$; $\delta \geq 0$, $\sigma \geq 0$, $\lambda > \lambda_0 = 2 \max(\sigma, \delta)$.

Если существует последовательность алгебраических многочленов $P_{2^n}(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) степени не выше $2^n - 1$ таких, что

$$\| (f(x) - P_{2^n}(x))(1-x)^{\alpha+\sigma}(1+x)^{\beta+\delta} \|_p \leq \frac{C_1}{2^{n\lambda}},$$

то справедливы также неравенства

$$\| (f(x) - P_{2^n}(x))(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \|_p \leq \frac{C_2}{2^{n(\lambda-\lambda_0)}},$$

где постоянные C_1 и C_2 не зависят от n ($n = 0, 1, 2, \dots$).

ЛЕММА 3 [7]. Пусть $P_n(x)$ – алгебраический многочлен степени не выше $n-1$, и пусть числа $p, \alpha, \beta, \sigma_1$ и σ_2 таковы, что $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha \geq -1/(2p)$, $\beta \geq -1/(2p)$, $\sigma_1 \geq 0$, $\sigma_2 \geq 0$.

Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|P'_n(x)\|_{p, \alpha+1/2, \beta+1/2} &\leq C_1 n \|P_n(x)\|_{p, \alpha, \beta}, \\ \|P_n(x)\|_{p, \alpha, \beta} &\leq C_2 n^{2 \max(\sigma_1, \sigma_2)} \|P_n(x)\|_{p, \alpha+\sigma_1, \beta+\sigma_2}, \end{aligned}$$

где постоянные C_1 и C_2 не зависят от n ($n = 1, 2, \dots$).

ЛЕММА 4. а) Пусть даны числа p, ν и μ такие, что $1 \leq p \leq \infty$, $\nu = \mu \geq -1/2$, и пусть числа α и β выбраны так, что $\alpha \geq -1/(2p)$ и $\beta \geq -1/(2p)$ при $1 \leq p < \infty$ и $\mu = -1/2$, $\alpha > -1/(2p)$ и $\beta > -1/(2p)$ при $1 \leq p < \infty$ и $\mu > -1/2$, $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$ при $p = \infty$ и $\mu \geq -1/2$. Пусть $\sigma_2 = \min(\alpha, \beta)$,

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_2 + \frac{1}{2p}, & \text{если } \mu = -\frac{1}{2}, \\ \left(\sigma_2 + \frac{1}{2p}\right) - \left(\mu + \frac{1}{2}\right) + a, & \text{если } \mu > -\frac{1}{2} \text{ и } \sigma_2 + \frac{1}{2p} \geq \mu + \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{если } \mu > -\frac{1}{2} \text{ и } \sigma_2 + \frac{1}{2p} < \mu + \frac{1}{2}, \end{cases}$$

где $a = 0$ при $p = 1$ и $0 < a < \mu + 1/2$ при $1 < p \leq \infty$.

Тогда

$$\begin{aligned} \|T_t \varphi\|_{p, \alpha, \beta} &\leq C (\|\varphi\|_{p, \alpha, \beta} + t^{2|\alpha-\beta|} \|\varphi\|_{p, \sigma_2, \sigma_2} + t^{2\sigma} \|\varphi\|_{p, \alpha-\sigma, \beta-\sigma} \\ &\quad + t^{2(\sigma+\alpha-\beta)} \|\varphi\|_{p, \sigma_2-\sigma, \sigma_2-\sigma}), \end{aligned}$$

где постоянная C не зависит от t и φ .

б) Пусть даны числа p, ν и μ такие, что $1 \leq p \leq \infty$, $\nu > \mu \geq -1/2$, и пусть числа α и β выбраны так, что $\alpha > -1/(2p)$ и $\beta \geq -1/(2p)$ при $1 \leq p < \infty$ и $\mu = -1/2$, $\alpha > -1/(2p)$ и $\beta > -1/(2p)$ при $1 \leq p < \infty$ и $\mu > -1/2$, $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$ при $p = \infty$ и $\mu \geq -1/2$. Пусть

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta < \alpha, \\ \beta - \alpha + \varepsilon, & \text{если } \beta \geq \alpha, \end{cases}$$

где $0 < \varepsilon < \min(\nu - \mu, \alpha + 1/(2p), \mu + 1/(2p))$ при $1 \leq p < \infty$ и $\mu > -1/2$,
 $0 < \varepsilon < \min(\nu + 1/2, \alpha + 1/(2p))$ при $1 \leq p < \infty$ и $\mu = -1/2$, $\varepsilon = 0$ при $p = \infty$;

$$\gamma = \begin{cases} (\alpha - \beta) - (\nu - \mu) + b, & \text{если } \alpha - \beta \geq \nu - \mu, \\ 0, & \text{если } \alpha - \beta < \nu - \mu, \end{cases}$$

где $b = 0$ при $p = 1$ и $0 < b < \nu - \mu$ при $1 < p \leq \infty$;

$$\sigma = \begin{cases} \beta + \frac{1}{2p}, & \text{если } \beta < \alpha \text{ и } \mu = -\frac{1}{2}, \\ \alpha + \frac{1}{2p} - \varepsilon, & \text{если } \beta \geq \alpha \text{ и } \mu = -\frac{1}{2}, \\ \left(\beta + \frac{1}{2p}\right) - \left(\mu + \frac{1}{2}\right) + a, & \text{если } \beta < \alpha, \mu > -\frac{1}{2} \text{ и } \beta + \frac{1}{2p} \geq \mu + \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{если } \beta < \alpha, \mu > -\frac{1}{2} \text{ и } \beta + \frac{1}{2p} < \mu + \frac{1}{2}, \\ \left(\alpha + \frac{1}{2p}\right) - \left(\mu + \frac{1}{2}\right) + a, & \text{если } \beta \geq \alpha, \mu > -\frac{1}{2} \text{ и } \alpha + \frac{1}{2p} \geq \mu + \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{если } \beta \geq \alpha, \mu > -\frac{1}{2} \text{ и } \alpha + \frac{1}{2p} < \mu + \frac{1}{2}, \end{cases}$$

где $a = 0$ при $p = 1$ и $0 < a < \mu + 1/2 - \varepsilon$ при $1 < p \leq \infty$.

Тогда

$$\|T_t \varphi\|_{p, \alpha, \beta} \leq C (\|\varphi\|_{p, \alpha, \beta} + t^{2\delta} \|\varphi\|_{p, \alpha, \beta - \delta} + t^{2\gamma} \|\varphi\|_{p, \alpha - \gamma, \beta} + t^{2\sigma} \|\varphi\|_{p, \alpha - \sigma, \beta - \sigma} + t^{2(\gamma + \sigma)} \|\varphi\|_{p, \alpha - \delta, \beta - \delta - \sigma}),$$

где постоянная C не зависит от t и φ .

Лемма 4 доказывается заменами переменных.

ЛЕММА 5. Пусть даны числа p, ν и μ такие, что $1 \leq p \leq \infty$, $\nu \geq \mu \geq -1/2$. Пусть числа α и β выбраны так, что $\alpha \leq \nu$ и $\beta \leq \mu$ при $p = 1$, $\alpha < \nu + 1 - 1/p$ и $\beta < \mu + 1 - 1/p$ при $1 < p \leq \infty$.

Тогда если $f \in L_{p, \alpha, \beta}$, то $f \in L_{1, \nu, \mu}$ и $\|f\|_{1, \nu, \mu} \leq C \|f\|_{p, \alpha, \beta}$, где постоянная C не зависит от f .

Лемма 5 доказывается простыми оценками.

4. Построим алгебраический многочлен, с помощью которого будет осуществляться нужное приближение.

ТЕОРЕМА 3. Если $f \in L_{1, \nu, \mu}$, $\nu \geq \mu \geq -1/2$, $q \in \mathbb{N}$, то функция

$$Q(x) = \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi (\Delta_{t_1, \dots, t_r}^r(f, x, \nu, \mu) - (-1)^r f(x)) \prod_{s=1}^r \sin^{2\nu+1} \frac{t_s}{2} \cdot \cos^{2\mu+1} \frac{t_s}{2} \times \left(\frac{\sin(mt_s/2)}{\sin(t_s/2)} \right)^{2q+4} dt_1 \cdots dt_r$$

есть алгебраический многочлен степени не выше $(q+2)(m-1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы 3 достаточно доказать, что для любого $k = 1, 2, \dots, r$

$$Q_1(x) = \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi T_{t_1, \dots, t_k}^k(f, x, \nu, \mu) \prod_{s=1}^r \sin^{2\nu+1} \frac{t_s}{2} \cdot \cos^{2\mu+1} \frac{t_s}{2} \\ \times \left(\frac{\sin(mt_s/2)}{\sin(t_s/2)} \right)^{2q+4} dt_1 \cdots dt_r$$

есть алгебраический многочлен степени не выше $(q+2)(m-1)$.

Делая замену переменных $x = \cos \theta$ и пользуясь свойством 2) оператора обобщенного сдвига Якоби (см. лемму 1), получим

$$Q_1(\cos \theta) = \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi T_\theta(T_{t_1, \dots, t_{k-1}}^{k-1} f, \cos t_k, \nu, \mu) \prod_{s=1}^r \sin^{2\nu+1} \frac{t_s}{2} \cdot \cos^{2\mu+1} \frac{t_s}{2} \\ \times \left(\frac{\sin(mt_s/2)}{\sin(t_s/2)} \right)^{2q+4} dt_1 \cdots dt_r.$$

В силу того, что функция $(\sin(mt/2)/\sin(t/2))^{2q+4}$ есть четный тригонометрический полином порядка $(q+2)(m-1)$ и любой алгебраический многочлен можно представить в виде линейной комбинации многочленов $P_n^{(\nu, \mu)}(x)$, имеем

$$\left(\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right)^{2q+4} = \sum_{k=0}^{(q+2)(m-1)} a_k \cos kt = \sum_{k=0}^{(q+2)(m-1)} b_k \cos^k t \\ = \sum_{i=1}^{(q+2)(m-1)+1} c_i P_i^{(\nu, \mu)}(\cos t).$$

Используя это представление, можем записать, что

$$Q_1(\cos \theta) = \sum_{i=1}^{(q+2)(m-1)+1} c_i \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi T_\theta(T_{t_1, \dots, t_{k-1}}^{k-1} f, \cos t_k, \nu, \mu) \\ \times P_i^{(\nu, \mu)}(\cos t_k) \sin^{2\nu+1} \frac{t_k}{2} \cdot \cos^{2\mu+1} \frac{t_k}{2} dt_k \\ \times \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^r \sin^{2\nu+1} \frac{t_s}{2} \cdot \cos^{2\mu+1} \frac{t_s}{2} \left(\frac{\sin(mt_s/2)}{\sin(t_s/2)} \right)^{2q+4} dt_1 \cdots dt_{k-1} dt_{k+1} \cdots dt_r.$$

Пусть

$$J_1 = 2^{\nu+\mu+1} \int_0^\pi T_\theta(T_{t_1, \dots, t_{k-1}}^{k-1} f, \cos t_k, \nu, \mu) P_i^{(\nu, \mu)}(\cos t_k) \sin^{2\nu+1} \frac{t_k}{2} \cdot \cos^{2\mu+1} \frac{t_k}{2} dt_k.$$

Сделаем замену переменной $\cos t_k = y$. Тогда в силу свойств 4) и 3) оператора обобщенного сдвига Якоби (см. лемму 1) имеем

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{-1}^1 T_{\theta}(T_{t_1, \dots, t_{k-1}}^{k-1} f, y, \nu, \mu) P_i^{(\nu, \mu)}(y) (1-y)^{\nu} (1+y)^{\mu} dy \\ &= \int_{-1}^1 T_{t_1, \dots, t_{k-1}}^{k-1}(f, y, \nu, \mu) T_{\theta}(P_i^{(\nu, \mu)}, y, \nu, \mu) (1-y)^{\nu} (1+y)^{\mu} dy \\ &= P_i^{(\nu, \mu)}(\cos \theta) \int_{-1}^1 T_{t_1, \dots, t_{k-1}}^{k-1}(f, y, \nu, \mu) P_i^{(\nu, \mu)}(y) (1-y)^{\nu} (1+y)^{\mu} dy. \end{aligned}$$

Применяя свойство 3) оператора обобщенного сдвига $k-1$ раз, получим, что

$$\begin{aligned} J_1 &= P_i^{(\nu, \mu)}(\cos \theta) \prod_{m=1}^{k-1} P_i^{(\nu, \mu)}(\cos t_m) \int_{-1}^1 f(y) P_i^{(\nu, \mu)}(y) (1-y)^{\nu} (1+y)^{\mu} dy \\ &= P_i^{(\nu, \mu)}(\cos \theta) \prod_{m=1}^{k-1} P_i^{(\nu, \mu)}(\cos t_m) d_i, \end{aligned}$$

где

$$d_i = \int_{-1}^1 f(y) P_i^{(\nu, \mu)}(y) (1-y)^{\nu} (1+y)^{\mu} dy.$$

Подставляя J_1 в выражение для $Q_1(\cos \theta)$ и полагая

$$\begin{aligned} \lambda_{\nu} &= 2^{-\nu-\mu-1} \int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi} \prod_{m=1}^{k-1} P_i^{(\nu, \mu)}(\cos t_m) \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^r \sin^{2\nu+1} \frac{t_s}{2} \cdot \cos^{2\mu+1} \frac{t_s}{2} \\ &\quad \times \left(\frac{\sin(mt_s/2)}{\sin(t_s/2)} \right)^{2q+4} dt_1 \dots dt_{k-1} dt_{k+1} \dots dt_r, \end{aligned}$$

имеем

$$Q_1(\cos \theta) = \sum_{i=1}^{(q+2)(m-1)+1} c_i d_i \lambda_i P_i^{(\mu, \nu)}(\cos \theta).$$

Отсюда следует утверждение теоремы 3.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Докажем сначала вложение $\mathbf{H}(p, \alpha, \beta, \rho, \nu, \mu, r) \subset \mathbf{E}(p, \alpha, \beta, \rho)$.

Пусть $f \in \mathbf{H}(p, \alpha, \beta, \rho, \nu, \mu, r)$. В силу леммы 5 при условиях теоремы 1 $f \in L_{1, \nu, \mu}$. Согласно теореме 3

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{1}{\gamma_m^r} \int_0^{\pi} \dots \int_0^{\pi} (\Delta_{t_1, \dots, t_r}^r(f, x, \nu, \mu) - (-1)^r f(x)) \prod_{s=1}^r \sin^{2\nu+1} \frac{t_s}{2} \cdot \cos^{2\mu+1} \frac{t_s}{2} \\ &\quad \times \left(\frac{\sin(mt_s/2)}{\sin(t_s/2)} \right)^{2q+4} dt_1 \dots dt_r, \end{aligned}$$

где

$$\gamma_m = \int_0^{\pi} \sin^{2\nu+1} \frac{t}{2} \cdot \cos^{2\mu+1} \frac{t}{2} \left(\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)} \right)^{2q+4} dt,$$

есть алгебраический многочлен степени не выше $(q+2)(m-1)$.

Для каждого натурального n выберем натуральное число m так, чтобы было выполнено условие

$$\frac{n-1}{q+2} < m \leq \frac{n-1}{q+2} + 1. \quad (1)$$

Тогда алгебраический многочлен $Q(x)$ имеет степень не выше $n-1$.

Рассмотрим $J = E_n(f)_{p,\alpha,\beta}$. Ясно, что

$$\begin{aligned} J &\leq \|f(x) - Q(x)(-1)^{r+1}\|_{p,\alpha,\beta} \\ &= \frac{1}{\gamma_m^r} \left\| \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \Delta_{t_1, \dots, t_r}^r(f, x, \nu, \mu) \prod_{s=1}^r \sin^{2\nu+1} \frac{t_s}{2} \cdot \cos^{2\mu+1} \frac{t_s}{2} \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{\sin(mt_s/2)}{\sin(t_s/2)} \right)^{2q+4} dt_1 \cdots dt_r \right\|_{p,\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского, получим, что

$$\begin{aligned} J &\leq \frac{1}{\gamma_m^r} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \sup_{\substack{0 \leq u_i \leq t_1 + \cdots + t_r \\ i=1, \dots, r}} \|\Delta_{u_1, \dots, u_r}^r(f, x, \nu, \mu)\|_{p,\alpha,\beta} \prod_{s=1}^r \sin^{2\nu+1} \frac{t_s}{2} \cdot \cos^{2\mu+1} \frac{t_s}{2} \\ &\quad \times \left(\frac{\sin(mt_s/2)}{\sin(t_s/2)} \right)^{2q+4} dt_1 \cdots dt_r \\ &= \frac{1}{\gamma_m^r} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \tilde{w}_r(f, t_1 + \cdots + t_r, \nu, \mu)_{p,\alpha,\beta} \prod_{s=1}^r \sin^{2\nu+1} \frac{t_s}{2} \cdot \cos^{2\mu+1} \frac{t_s}{2} \\ &\quad \times \left(\frac{\sin(mt_s/2)}{\sin(t_s/2)} \right)^{2q+4} dt_1 \cdots dt_r. \end{aligned}$$

Поскольку $f \in \mathbf{H}(p, \alpha, \beta, \rho, \nu, \mu, r)$, имеем

$$\begin{aligned} J &\leq \frac{C_2}{\gamma_m^r} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi (t_1 + \cdots + t_r)^\rho \prod_{s=1}^r \sin^{2\nu+1} \frac{t_s}{2} \cdot \cos^{2\mu+1} \frac{t_s}{2} \\ &\quad \times \left(\frac{\sin(mt_s/2)}{\sin(t_s/2)} \right)^{2q+4} dt_1 \cdots dt_r \\ &\leq \frac{C_3}{\gamma_m^r} \sum_{j=1}^r \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi t_j^\rho \prod_{s=1}^r \sin^{2\nu+1} \frac{t_s}{2} \cdot \cos^{2\mu+1} \frac{t_s}{2} \left(\frac{\sin(mt_s/2)}{\sin(t_s/2)} \right)^{2q+4} dt_1 \cdots dt_r. \end{aligned}$$

Из стандартных оценок ядра Джексона вытекает неравенство

$$\frac{1}{\gamma_m} \int_0^\pi h^\rho \cdot \sin^{2\nu+1} \frac{h}{2} \cdot \cos^{2\mu+1} \frac{h}{2} \left(\frac{\sin(mh/2)}{\sin(h/2)} \right)^{2q+4} dh \leq \frac{C_4}{m^\rho},$$

где постоянная C_4 не зависит от m .

Используя эту оценку, определение γ_m и неравенство (1), получим, что $J \leq C_5 n^{-\rho}$, где положительная постоянная C_5 не зависит от n ($n = 1, 2, \dots$).

Таким образом, показано, что $f \in E(p, \alpha, \beta, \rho)$. Тем самым, доказано вложение $\mathbf{H}(p, \alpha, \beta, \rho, \nu, \mu, r) \subset \mathbf{E}(p, \alpha, \beta, \rho)$.

Докажем обратное вложение. Пусть $f \in E(p, \alpha, \beta, \rho)$. Тогда найдутся алгебраические многочлены $P_n(x)$ степени не выше $n - 1$ такие, что

$$\|f(x) - P_n(x)\|_{p, \alpha, \beta} \leq C_1 n^{-\rho}. \quad (2)$$

Образуем многочлены $Q_k(x)$ по правилу

$$Q_0(x) = P_1(x), \quad Q_k(x) = P_{2^k}(x) - P_{2^{k-1}}(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим $J = \|\Delta_{h_1, \dots, h_r}^r(f, x, \nu, \mu)\|_{p, \alpha, \beta}$.

В силу свойства 1) оператора обобщенного сдвига Якоби для любого целого неотрицательного N имеем

$$J \leq \|\Delta_{h_1, \dots, h_r}^r(f - P_{2^N}, x, \nu, \mu)\|_{p, \alpha, \beta} + \|\Delta_{h_1, \dots, h_r}^r(P_{2^N}, x, \nu, \mu)\|_{p, \alpha, \beta}.$$

Так как

$$P_{2^N}(x) = \sum_{k=0}^N Q_k(x),$$

имеем

$$J \leq \|\Delta_{h_1, \dots, h_r}^r(f - P_{2^N}, x, \nu, \mu)\|_{p, \alpha, \beta} + \sum_{k=0}^N \|\Delta_{h_1, \dots, h_r}^r(Q_k, x, \nu, \mu)\|_{p, \alpha, \beta} = A + \sum_{k=1}^N J_k.$$

Пусть для каждого $\delta \in (0, \pi)$ выбрано N так, что

$$\frac{\pi}{2^{N+1}} < \delta \leq \frac{\pi}{2^N}. \quad (3)$$

Покажем, что для любых h_i ($i = 1, \dots, r$) таких, что $0 < h_i \leq \delta$, $r \in \mathbb{N}$, $\rho_0 < \rho < 2r$, справедливы неравенства

$$A \leq C_6 \delta^\rho, \quad (4)$$

$$J_k \leq C_7 \delta^{2^r} 2^{k(2r-\rho)}. \quad (5)$$

Пусть $r = 1$ и $\varphi(x) = f(x) - P_{2^N}(x)$. Тогда

$$A = \|T_{h_1}(\varphi, x, \nu, \mu) - \varphi(x)\|_{p, \alpha, \beta} \leq \|T_{h_1}(\varphi, x, \nu, \mu)\|_{p, \alpha, \beta} + \|\varphi(x)\|_{p, \alpha, \beta}.$$

Применяя лемму 4, неравенство (2) и лемму 2, получим, что при $\nu = \mu \geq -1/2$ и $\rho > 2(\sigma + |\alpha - \beta|)$

$$A \leq C_8 (2^{-N\rho} + h_1^{2|\alpha-\beta|} 2^{-N(\rho-2|\alpha-\beta|)} + h_1^{2\sigma} 2^{-N(\rho-2\sigma)} + h_1^{2(\sigma+|\alpha-\beta|)} 2^{-N(\rho-2(\sigma+|\alpha-\beta|))}),$$

а при $\nu > \mu \geq -1/2$ и $\rho > 2 \max(\gamma + \sigma, \delta + \sigma)$

$$A \leq C_9 (2^{-N\rho} + h_1^{2\delta} 2^{-N(\rho-2\delta)} + h_1^{2\gamma} 2^{-N(\rho-2\gamma)} + h_1^{2\sigma} 2^{-N(\rho-2\sigma)} + h_1^{2(\gamma+\sigma)} 2^{-N(\rho-2(\gamma+\sigma))} + h_1^{2(\delta+\sigma)} 2^{-N(\rho-2(\delta+\sigma))}),$$

где $\sigma, \sigma_2, \delta, \gamma$ выбраны согласно лемме 4.

Поскольку при $\nu = \mu \geq -1/2$ выполнено $2(\sigma + |\alpha - \beta|) \leq \rho_0 + d$, где d – любое число из промежутка $0 < d < \mu + 1/2$, а при $\nu > \mu \geq -1/2$ выполнено $2 \max(\gamma + \sigma, \delta + \sigma) \leq \rho_0 + d$, где d – любое число из промежутка $0 < d < \min(\nu - \mu, \alpha + 1/(2p), \mu + 1/2 - \varepsilon/2)$ (ε выбрано согласно лемме 4), с учетом $h_1 \leq \delta$, $1/2^N < 2\delta/\pi$ получаем, что $A \leq C_{10}\delta^\rho$ при $\rho > \rho_0 + d$. Так как d – любое число из указанного промежутка, то неравенство $A \leq C_{10}\delta^\rho$ справедливо при любом $\rho > \rho_0$.

Итак, неравенство (4) для $r = 1$ доказано.

Докажем для $r = 1$ неравенство (5). Поскольку любой многочлен можно представить в виде линейной комбинации многочленов Якоби, в силу свойства 3) оператора обобщенного сдвига Якоби

$$T_h Q_k(x) = \sum_{s=1}^{2^k} c_s P_s^{(\nu, \mu)}(\cos h) P_s^{(\nu, \mu)}(x), \quad (6)$$

где $T_h f = T_h(f, x, \nu, \mu)$.

Используя равенства (6) и $D_{x, \nu, \mu} P_s^{(\nu, \mu)}(x) = s(s + \nu + \mu + 1) P_s^{(\nu, \mu)}(x)$, легко проверить, что

$$T_h D_{x, \nu, \mu} Q_k(x) = D_{\cos h, \nu, \mu} T_h Q_k(x). \quad (7)$$

Применяя равенство (7), имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^t \sin^{-2\nu-1} \frac{\omega}{2} \cdot \cos^{-2\mu-1} \frac{\omega}{2} \int_0^\omega \sin^{2\nu-1} \frac{u}{2} \cdot \cos^{2\mu-1} \frac{u}{2} \cdot T_u(D_{x, \nu, \mu} Q_k(x), x, \nu, \mu) du d\omega \\ &= T_t(Q_k, x, \nu, \mu) - Q_k(x). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} J_k &= \|T_{h_1}(Q_k, x, \nu, \mu) - Q_k(x)\|_{p, \alpha, \beta} \\ &= \left\| \int_0^{h_1} \sin^{-2\nu-1} \frac{\omega}{2} \cdot \cos^{-2\mu-1} \frac{\omega}{2} \right. \\ &\quad \times \left. \int_0^\omega \sin^{2\nu-1} \frac{u}{2} \cdot \cos^{2\mu-1} \frac{u}{2} \cdot T_u(D_{x, \nu, \mu} Q_k(x), x, \nu, \mu) du d\omega \right\|_{p, \alpha, \beta}. \end{aligned}$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского, при $0 < h_1 \leq \pi/2$ имеем

$$J_k \leq C_{11} h_1^2 \sup_{0 \leq u_1 \leq h_1} \|T_{u_1}(D_{x, \nu, \mu} Q_k(x), x, \nu, \mu)\|_{p, \alpha, \beta}.$$

Если $\pi/2 < h_1 < \pi$, то

$$J_k \leq \|T_{h_1}(Q_k, x, \nu, \mu) - T_{\pi/2} Q_k(x)\|_{p, \alpha, \beta} + \|T_{\pi/2}(Q_k, x, \nu, \mu) - Q_k(x)\|_{p, \alpha, \beta}.$$

С помощью равенства (7) легко получаем, что

$$-\int_{\pi/2}^{h_1} \sin^{-2\nu-1} \frac{\omega}{2} \cdot \cos^{-2\mu-1} \frac{\omega}{2} \int_0^\omega \sin^{2\nu-1} \frac{u}{2} \cdot \cos^{2\mu-1} \frac{u}{2} \\ \times T_u(D_{x,\nu,\mu} Q_k(x), x, \nu, \mu) du d\omega = T_{h_1}(Q_k, x, \nu, \mu) - T_{\pi/2} Q_k(x).$$

Используя это равенство и обобщенное неравенство Минковского, получим, что в случае $\pi/2 < h_1 \leq \pi$ также выполнено

$$J_k \leq C_{12} h_1^2 \sup_{0 \leq u_1 \leq h_1} \|T_{u_1}(D_{x,\nu,\mu} Q_k(x), x, \nu, \mu)\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Таким образом, доказано, что для любого $0 < h_1 \leq \pi$

$$J_k \leq C_{13} h_1^2 \sup_{0 \leq u_1 \leq h_1} \|T_{u_1}(D_{x,\nu,\mu} Q_k(x), x, \nu, \mu)\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Далее, применяя леммы 4, 3, неравенство (2) и лемму 2 учитывая, что $u_1 \leq h_1 \leq \delta \leq \pi/2^N \leq C_{14}/2^k$ для $k = 0, 1, \dots, N$, при $\rho > \rho_0$ и $k = 0, 1, \dots, N$ имеем

$$J_k \leq C_{15} \delta^2 2^{k(2-\rho)}.$$

Итак, при $r = 1$ неравенства (4) и (5) доказаны.

Для произвольного r неравенства (4) и (5) доказываются по индукции.

Из неравенства (5) следует, что

$$\sum_{k=1}^N J_k \leq C_{16} \sum_{k=1}^N \delta^{2r} 2^{k(2r-\rho)} \leq C_{17} \delta^{2r} 2^{N(2r-\rho)}.$$

В силу (3) при $\rho_0 < \rho < 2r$ имеем

$$\sum_{k=1}^N J_k \leq C_{18} \delta^\rho. \quad (8)$$

Из неравенств (4) и (8) следует, что при $\rho_0 < \rho < 2r$ выполнено

$$\tilde{w}_r(f, \delta, \nu, \mu)_{p,\alpha,\beta} \leq C_{19} \delta^\rho.$$

Тем самым, доказано вложение $\mathbf{E}(p, \alpha, \beta, \rho) \subset \mathbf{H}(p, \alpha, \beta, \rho, \nu, \mu, r)$.

Теорема 1 полностью доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Потапов М. К. Об условиях совпадения некоторых классов функций // Тр. семин. им. И. Г. Петровского. 1981. Т. 6. № 223–238.
- [2] Казимиров Г. Н. О теоремах Джексона для k -го обобщенного модуля гладкости // Деп. ВИНТИ 27.12.94. М.: ВИНТИ 1994. № 3054–В94.
- [3] Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.
- [4] Koornwinder Т. Н. The addition formula for Jacobi polynomials. I: Summary of results // Indag. Math. (N.S.). 1972. V. 75. P. 188–191.
- [5] Потапов М. К. О структурных характеристиках классов функций с данным порядком наилучшего приближения // Тр. МИАН. 1975. Т. 134. С. 260–277.
- [6] Потапов М. К. О структурных и конструктивных характеристиках некоторых классов функций // Тр. МИАН. 1974. Т. 131. С. 211–231.
- [7] Халилова Б. А. О некоторых оценках для полиномов // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-матем. 1974. № 2. С. 46–55.