Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Пилипович, М. Стоянович, Уравнения типа Вольтерра в пространстве $\mathcal{S}'_+$, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 1, 135–141

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm13>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 12:44:24

УДК 517.968

УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРА В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathcal{S}'_+$

Ст. Пилипович, М. Стоянович

Приводятся необходимые и достаточные условия для однозначной разрешимости интегро-дифференциального уравнения Вольтерра в пространстве $\mathcal{S}'_+$.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных изучению линейных уравнений типа Вольтерра в классических пространствах и в пространствах обобщенных функций, а также изучению уравнений типа свертки в пространствах обобщенных функций (см. [1]–[4], и приведенные там ссылки). Простой критерий разрешимости и однозначности для двух классов уравнений, рассматриваемых в настоящей статье, может представлять интерес с обеих точек зрения.

Известно, что преобразование Лапласа устанавливает изоморфное соответствие между пространством $\mathcal{S}'_+(\mathbb{R}) = \mathcal{S}'_+$ обобщенных функций медленного роста с носителем $\mathbb{R} = [0, \infty)$ и пространством функций голоморфных в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ (см. [4]). Применяя этот результат, мы получаем простой критерий разрешимости и однозначности в пространстве $\mathcal{S}'_+$ для интегро-дифференциального уравнения Вольтерра

$$\sum_{i=0}^m a_i g^{(i)} + \lambda f_\alpha * g = (P(\delta) + \lambda f_\alpha) * g = h, \quad \text{для любого } h \in \mathcal{S}'_+, \quad (1)$$

где P – полином, $P(\delta) = \sum_{i=0}^m a_i g^{(i)}$, $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, m$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, δ – обобщенная дельта-функция,

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \mathcal{H}(x)x^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha), & \alpha > 0, \\ f_{\alpha+N}^{(N)}, & \alpha \leq 0, \quad \alpha + N > 0 \quad N \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

символ $^{(N)}$ обозначает производную обобщенной функции, а $\mathcal{H}$ – функция Хевисайда.

В частности, если $\alpha > 0$ и функция g локально интегрируема и обращается в нуль на $(-\infty, 0)$, то уравнение (1) имеет вид

$$\sum_{i=0}^m a_i g^{(i)}(x) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} g(t) dt = h(t).$$

Тогда мы рассмотрим уравнение

$$(g + f) * g = h, \quad f, h \in \mathcal{S}'_+, \quad (2)$$

которое можно легко решить, применяя преобразование Лапласа.

В частности, если положить $f = 1/\lambda \sum_{i=0}^m a_i \delta^{(i)}$ и заменить h на h/λ , то уравнение (2) принимает вид

$$\sum_{i=0}^m a_i g^{(i)} + \lambda g * g \equiv (P(\delta) + \lambda g) * g = h, \quad h \in \mathcal{S}'_+, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (3)$$

(Уравнение (1) включает случай $\lambda = 0$.)

Полученные ранее результаты можно естественным образом обобщить на случай пространства $\mathcal{S}'_+(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}'_+(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{S}'_+(\mathbb{R})$.

2. Утверждения. Напомним, что пространство S_+ – это пространство всех гладких функций на $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющих условию $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |t^k f^{(n)}(t)| < \infty$, $k, n \in \mathbb{N}_0$. Пространство, сопряженное S_+ в сильном смысле, – это пространство $\mathcal{S}'_+$, которое является пространством обобщенных функций медленного роста с носителем $[0, \infty)$.

Следуя [4], для функции $f \in S'_+$ определим преобразование Лапласа (или, следуя [5], преобразование Фурье–Лапласа с $-z$ вместо z) следующим образом:

$$\mathcal{L}(f)(z) = \langle f(t), \eta(t)e^{izt} \rangle, \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

где η – гладкая функция на вещественной оси, равная единице на $(-a, \infty)$ и нулю на $(-\infty, -2a)$, $a > 0$. Это аналитическая функция на $\mathbb{C}_+$, не зависящая от срезающей функции η . Заметим, что

$$\mathcal{L}(f_\alpha)(z) = \hat{f}(z) = \frac{1}{(-iz)^\alpha}, \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Известно [4, гл. 7, с. 50], что при заданном $\phi \in \mathcal{S}'_+$ уравнение $\phi * g = h$ однозначно разрешимо в пространстве $\mathcal{S}'_+$ для любого $h \in S'_+$ тогда и только тогда, когда существуют такие $a, b \in \mathbb{R}$ и $C > 0$, что

$$\frac{1}{|\hat{\phi}(z)|} \leq C \frac{(1 + |z|)^a}{|y|^b}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}_+. \quad (4)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Уравнение (1) однозначно разрешимо в пространстве S'_+ для любого $h \in S'_+$ тогда и только тогда, когда

$$(-iz)^\alpha P(-iz) \neq -\lambda, \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Его решение имеет вид

$$g = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{(-iz)^\alpha \hat{h}}{(-iz)^\alpha P(-iz) + \lambda} \right)$$

($\mathcal{L}^{-1}$ – обратное преобразование Лапласа). В частности, интегральное уравнение Абеля–Вольterra второго рода

$$g = h + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds, \quad \lambda \neq 0, \quad (5)$$

однозначно разрешимо в пространстве S'_+ для любого $h \in S'_+$ тогда и только тогда, когда

- (а) $\alpha \in (-2, 2)$ и $\arg \lambda \in (\alpha\pi/2, 2\pi - \alpha\pi/2)$ или
- (б) $|\alpha| = 2$ и $\lambda \in (-\infty, 0]$.

(Интеграл в формуле (5) понимается как свертка $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds = f_\alpha * g$ в пространстве $\mathcal{S}'_+$).

Заметим, что при $\lambda = 0$ уравнение (5) превращается в уравнение $g = h$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f, h \in S'_+$. Уравнение (2) имеет в точности два решения в пространстве S'_+ тогда и только тогда, когда $z \mapsto \sqrt{\hat{h}(z) + \hat{f}^2(z)/4}$ – аналитическое преобразование в $\mathbb{C}_+$, которое никогда не обращается в нуль в $\mathbb{C}_+$.

Уравнение (2) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\hat{h}(z) = -\hat{f}^2(z)/4$, $z \in \mathbb{C}_+$. Его решения имеют вид

$$g_{1,2} = -\frac{1}{2}f \pm \mathcal{L}^{-1}\left(\sqrt{\hat{h} + \frac{1}{4}\hat{f}^2}\right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $h \in \mathcal{S}'_+$. Тогда уравнение (3) имеет в точности два решения в пространстве $\mathcal{S}'_+$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbb{C}_+ \ni z \mapsto \sqrt{4\lambda\hat{h}(z) + \sum_{p=0}^{2m} \left(\sum_{i+j=p} a_i a_j \right) (-iz)^p}$$

– аналитическая функция в пространстве $\mathbb{C}_+$ и не обращается в нуль в $\mathbb{C}_+$. Уравнение (3) имеет единственное решение, если

$$4\lambda\hat{h}(z) = -\sum_{p=0}^{2m} \left(\sum_{i+j=p} a_i a_j \right) (-iz)^p.$$

Решения имеют вид

$$g_{1,2} = -\frac{1}{2\lambda} \left(\sum_{i=0}^m a_i \delta^{(i)} \pm \mathcal{L}^{-1} \sqrt{4\lambda\hat{h}(z) + \sum_{p=0}^{2m} \left(\sum_{i+j=p} a_i a_j \right) (-iz)^p} \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Более общее нелинейное уравнение вида

$$\left(\sum_{\alpha=0}^m a_\alpha u^{(\alpha)} + f \right) * \sum a_\alpha u^{(\alpha)} = h \quad (6)$$

можно решить, применяя сначала теорему 2 при $g = \sum_{\alpha=0}^m a_\alpha u^{(\alpha)}$, а затем теорему 1 (при $\lambda = 0$).

3. Доказательства теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Нам надо доказать, что (4), где $\hat{\phi}(z) = P(-iz) + \lambda \hat{f}_\alpha(z)$, следует из соотношения $P(-iz) + \lambda \hat{f}_\alpha(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}_+$.

Введем обозначение $F(z) = (-iz)^\alpha P(-iz) + \lambda$, $z \in \mathbb{C}_+$. Предположим, что

$$\alpha = \frac{p}{q} > 0, \quad p \in \mathbb{N}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Для полинома P степени m имеем неравенство

$$d^m(\zeta, V_P) |P^{(m)}(\zeta)| \leq m! 2^m |P(\zeta)|, \quad \zeta \in \mathbb{C},$$

где $d(\zeta, V_P)$ – расстояние от точки ζ до множества $V_P = \{\zeta \in \mathbb{C}; P(\zeta) = 0\}$ (см. доказательство леммы 4.1.1 в [5]). Отсюда следует, что

$$|P(\zeta)| \geq \frac{d^m(\zeta, V_P)|a_m|}{2^m m!}, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus V_P. \quad (7)$$

Введем обозначение

$$\Gamma_{j,\omega} = \left\{ \rho e^{\theta i}; \rho > 0, \theta \in \left(j \frac{\pi}{q}, (j+1) \frac{\pi}{q} \right) \right\}, \quad j = 0, \dots, 2q-1.$$

Отображения

$$\Gamma_{j,\omega} \ni \omega \mapsto \omega^q \in \mathbb{C}, \quad j = 0, \dots, 2q-1,$$

устанавливают взаимно однозначные соответствия между $\Gamma_{2s,\omega}$ и $\mathbb{C}_+$ и между $\Gamma_{2s+1,\omega}$ и $\mathbb{C}_-$, $s = 0, \dots, q-1$. Отсюда следует, что

$$F_1(\omega) = F(\omega^q), \quad \omega \in \Gamma_{0,\omega},$$

– это полином. Символом P_1 мы обозначаем расширение F_1 на всю ω -комплексную плоскость $\mathbb{C} = \mathbb{C}_\omega$.

Заметим, что $P_1(\omega)$, $\omega \in \mathbb{C}$, – это полином с главным членом $a_m \omega^{p+mq}$. В силу (7) имеем

$$|P_1(\omega)| \geq \frac{d^{p+mq}(\omega, V_{P_1})|a_m|}{|a_m| 2^{p+mq}}, \quad \omega \in \mathbb{C}_\omega. \quad (8)$$

Пусть $\tilde{V} = \{z \in \mathbb{C}; F(z) = 0\}$. По предположению $\tilde{V} \cap \{z; \operatorname{Im} z > 0\} = \emptyset$. Отсюда следует, что

$$V \cap \Gamma_{2s} = \emptyset, \quad s = 0, 1, \dots, q-1. \quad (9)$$

Применим формулу (9), где $\omega \in \Gamma_0$. Итак, сначала зафиксируем $\omega_0 \in \Gamma_0$. Так как $V \cap \Gamma_0 = \emptyset$, то расстояние от ω_0 до V не может быть меньше, чем $d(\omega_0, \gamma_1)$ или $d(\omega_0, \gamma_2)$, где γ_1 и γ_2 – границы области Γ_0 , имеющие вид: $\gamma_1: \omega = t$, $t \geq 0$, и $\gamma_2: \omega = te^{i\pi/q}$, $t \geq 0$.

Положим $\omega_0 = z_0^{1/q}$. Отображение $\omega \mapsto \omega^q$ переводит область Γ_0 на $\mathbb{C}_+$. Так как это преобразование является композицией вращения и гомотетии, половина расстояния от ω_0 до V_{P_1} , $d(\omega_0, V_{P_1})/2$, преобразуется в $|\operatorname{Im} z_0/2|^{1/q}$. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{|(-iz)^{p/q} P(-iz) + \lambda|} \leq \frac{|a_m| 2^{p/q+m}}{|\operatorname{Im} z|^{p/q+m}}, \quad z \in \mathbb{C}_+. \quad (10)$$

Это и есть (4).

Пусть $\alpha > 0$ – иррациональное число. Предположим, что $(p_n/q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – это убывающая последовательность рациональных чисел, стремящаяся к α при $n \rightarrow \infty$ и удовлетворяющая условию

$$(-iz)^{p_n/q_n} P(-iz) + \lambda \neq 0, \quad z \in \mathbb{C}_+. \quad (11)$$

Докажем, что такая последовательность существует. Если это не так, то существует последовательность, которую мы опять обозначим как $(p_n/q_n)_n$ и которая убывает к α . Также существует такая последовательность $(z_n)_n$ в $\mathbb{C}_+$, что

$$(-iz_n)^{p_n/q_n} P(-iz_n) + \lambda = 0. \quad (12)$$

Таким образом, мы имеем $|z_n| \rightarrow \infty$, так как из ограниченности последовательности $|z_n| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$, следует, что для подходящей подпоследовательности $(z_n)_n$, которую мы опять обозначаем как $(z_n)_n$ и которая сходится к некоторому $z_0 \in \mathbb{C}_+$, мы имеем

$$(-iz_n)^{p_n/q_n} P(-iz_n) + \lambda \rightarrow (-iz_0)^\alpha P(-iz_0) + \lambda = 0,$$

а это противоречит условию (11). Итак, мы доказали, что $|z_n| \rightarrow \infty$. Отсюда и из соотношения (12) следует, что существует такое $C > 0$, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |(-iz_n)^\alpha P(-iz_n)| < C. \quad (13)$$

Докажем (13). Положим $\alpha_n = p_n/q_n$, $n \in \mathbb{N}$. В силу (12) имеем

$$\begin{aligned} (-iz_n)^\alpha P(-iz_n) &= (-iz_n)^{\alpha - \alpha_n} ((-iz_n)^{\alpha_n} P(-iz_n) + \lambda) - \lambda (-iz_n)^{\alpha - \alpha_n} \\ &= \frac{-\lambda}{(-iz_n)^{\alpha_n - \alpha}}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Также имеем $\liminf_{n \rightarrow \infty} |z_n|^{\alpha_n - \alpha} > C_0$ при некотором $C_0 > 0$, откуда следует (13).

С другой стороны, не существует такое $A > 0$, что

$$|P(-iz_n)| \leq A, \quad n \in \mathbb{N},$$

поскольку для любого $a \in [-A, A]$ соотношение $P(-iz) + a = 0$ выполняется только на множестве конечных точек $z = z_{1,a}, \dots, z_{m,a}$ (нулей полинома). Следовательно, для некоторой подпоследовательности, которую мы опять обозначаем как $(z_n)_n$, мы имеем $|P(-iz_n)| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. А это противоречит (13).

Итак, мы доказали существование убывающей последовательности $(p_n/q_n)_n$, для которой выполняется (11). Отсюда и из предыдущей части доказательства (фактически, из (10)) следует, что

$$\left| \frac{1}{(-iz)^{p_n/q_n} P(-iz) + \lambda} \right| \leq C \frac{|a_m| 2^{p_n/q_n + m}}{|\operatorname{Im} z|^{p_n/q_n + m}}, \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad n \in \mathbb{N},$$

где C не зависит от n . Устремляя $n \rightarrow \infty$, мы получаем

$$\frac{1}{|F(z)|} \leq \frac{|a_m| 2^{\alpha + m}}{|\operatorname{Im} z|^{\alpha + m}}, \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

откуда следует (4). Полученное неравенство завершает доказательство для случая $\alpha > 0$.

Пусть $\alpha < 0$. Предположим, что $\lambda \neq 0$, так как при $\lambda = 0$ уже проведенные рассуждения дают утверждение теоремы. Рассмотрим

$$z \mapsto \frac{P(-iz) + \lambda(-iz)^{-\alpha}}{(-iz)^{-\alpha}}, \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Мы должны доказать оценку вида (4) для ее обратной функции.

Сначала мы докажем, что существует убывающая последовательность $(p_n/q_n)_n$, стремящаяся к $-\alpha$ при $n \rightarrow \infty$ и удовлетворяющая условию

$$P(-iz) + \lambda(-iz)^{\alpha_n} \neq 0, \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad \alpha_n = \frac{p_n}{q_n}. \quad (14)$$

Предположим, что это не так. Тогда мы имеем последовательность, которую мы опять обозначим как $(p_n/q_n)_n$ и которая убывает к $-\alpha$. Также существует такая последовательность $(z_n)_n$ в пространстве $\mathbb{C}_+$, что

$$P(-iz_n) + \lambda(-iz_n)^{\alpha_n} = 0. \quad (15)$$

Отсюда следует, что $|z_n| \rightarrow \infty$. Далее доказательство повторяет рассуждения, проведенные в предыдущем случае.

Имеем

$$\frac{P(-iz_n)}{(-iz_n)^{\alpha_n}} = \frac{(-iz_n)^m [a_m + \mathcal{O}(\frac{1}{|iz_n|^n})]}{(-iz_n)^{\alpha_n}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

(где $\mathcal{O}$ – символ Ландау). Тогда

$$\frac{P(-i\tilde{z}_n)^{\alpha_n}}{(-i\tilde{z}_n)} \rightarrow \infty \quad \text{или} \quad 0 \quad (\text{если } m > -\alpha \text{ или } m < -\alpha),$$

для подпоследовательности $(\tilde{z}_n)_n$, выбранной подходящим образом. Мы приходим к противоречию, так как

$$\frac{P(-iz_n)}{(-iz_n)^{\alpha_n}} \rightarrow -\lambda \neq 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

(см. (12)). Итак, мы снова доказали, что существует последовательность (p_n/q_n) , убывающая к $-\alpha$ и такая, что выполняется соотношение (14).

Теперь, повторяя рассуждения, проведенные в предыдущей части доказательства, мы покажем, что следующие соотношения выполняются для подходящих констант C , не зависящих от n :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|P(-iz) + \lambda(-iz)^{\alpha_n}|} &\leq \frac{C}{|\operatorname{Im} z|^{-\alpha}}, \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad \text{при } -\alpha > m, \\ \frac{1}{|P(-iz) + \lambda(-iz)^{\alpha_n}|} &\leq \frac{C}{|\operatorname{Im} z|^m}, \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad \text{при } -\alpha < m. \end{aligned}$$

Это непосредственно приводит к (4). Таким образом, доказательство основного утверждения завершено.

Частный случай утверждения теоремы следует из основного утверждения, так как в этом случае мы имеем $\mathcal{L}(P)(\delta) = 1$. Это дает нам следующий критерий:

$$\lambda \neq (-iz)^\alpha, \quad z \in \mathbb{C}_+ \setminus \{0\}.$$

Положим $z = re^{\theta i}$, $r > 0$, $\theta \in (0, \pi)$. Имеем

$$\lambda \neq r^\alpha e^{i\alpha(\theta - \frac{\pi}{2})}, \quad r > 0, \quad \theta \in (0, \pi).$$

При $|\alpha| > 2$ мы получаем $\alpha(\theta - \pi/2) \in (-|\alpha|\pi/2, |\alpha|\pi/2)$. Таким образом, любое комплексное число в $\mathbb{C}$ может быть записано в виде $r^\alpha e^{i\alpha(\theta - \pi/2)}$, где $r > 0$ и $\theta \in (0, \pi)$. Следовательно, должны быть $|\alpha| \leq 2$. Пусть $|\alpha| < 2$. Тогда из соотношения $\arg \lambda \notin (-|\alpha|\pi/2, |\alpha|\pi/2)$ следует утверждение пункта а). Если $|\alpha| = 2$, то из соотношения $\arg \lambda \notin (-\pi, \pi)$ следует утверждение пункта б).

Теорема 1 полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Заметим, что если $\theta, \psi \in \mathcal{S}'_+$ и $\theta * \psi = 0$, то $\theta \equiv 0$ или $\psi \equiv 0$.

Пусть $g_1 \in \mathcal{S}'_+$ – решение уравнения (2). Запишем другое решение $g_2 \in \mathcal{S}'_+$ уравнения (2) в виде $g_2 = g_1 + r$, $r \in \mathcal{S}'_+$. Имеем

$$(g_1 + r) * (g_1 + r) + f * (g_1 + r) = h(g_1 + r) \Rightarrow 2g_1 * r + r * r + f * r = 0.$$

Отсюда следует, что $r = 0$ или $r = -2g_1 - f$. Таким образом, если g – решение уравнения (2), то решением уравнения (2) является и $-g - f$.

Мы имеем преобразование

$$g * g + f * g + \frac{1}{4}f * f = h + \frac{1}{4}f * f,$$

которое переводит (2) в соотношение

$$G * G = H, \quad (16)$$

где $G = g + \frac{1}{2}f$, $H = h + \frac{1}{4}f * f$. Применяя преобразование Лапласа, мы видим, что (16) эквивалентно $\widehat{G}\widehat{G} = \widehat{H}$.

Предположим, что $\sqrt{\widehat{H}} \neq 0$ – аналитическая функция в $\mathbb{C}_+$. Так как $H \in \mathcal{S}'_+$, существуют такие $C > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, что

$$|H(z)| \leq \frac{C(1 + |z|)^\alpha}{|y|^\beta}, \quad z \in \mathbb{C}_+. \quad (17)$$

Следовательно, $\sqrt{\widehat{H}}$ имеет оценку того же вида. Таким образом, решениями являются функции $\pm \mathcal{L}^{-1}(\sqrt{\widehat{H}}) \in \mathcal{S}'_+$, потому что преобразование $\mathcal{L}$ взаимно однозначно отображает $\mathcal{S}'_+$ на пространство аналитических функций на $\mathbb{C}_+$, удовлетворяющих (17) при должным образом выбранных $C > 0$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Принимая во внимание первую часть доказательства, мы в этом случае получаем в точности два решения $g_{1,2}$ данного вида. Заметим, что $-f - g_{1,2} = g_{2,1}$, и отсюда следует утверждение первой части теоремы 2.

Если $H = 0$, то мы имеем единственное решение данного вида.

Обратно, если уравнение (16) имеет решение G в пространстве $\mathcal{S}'_+$, то $\sqrt{\widehat{H}} = \widehat{G}$ или $\sqrt{\widehat{H}} = -\widehat{G}$ являются аналитическими функциями. Это завершает доказательство теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hörmander L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators II. Berlin–Göttingen–Heidelberg: Springer-Verlag, 1985.
- [2] Corduneanu C. Integral Equations and Applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.
- [3] Guo D., Lakshmikantham V., Liu X. Nonlinear Integral Equations in Abstract Spaces. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [4] Владимиров В.С., Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. Тауберовы теоремы для обобщенных функций. М.: Наука, 1987.
- [5] Hörmander L. Linear Partial Differential Operators. Berlin–Göttingen–Heidelberg: Springer-Verlag, 1985.