Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Д. Лившиц, О скорости сходимости чисто жадного алгоритма, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 4, 539–552

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm130>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 10:25:47

УДК 517.518.8

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ЧИСТО ЖАДНОГО АЛГОРИТМА

Е. Д. Лившиц

Статья посвящена изучению скорости сходимости чисто жадного алгоритма (гриди-алгоритма) в гильбертовом пространстве. Получены оценки сверху на скорость сходимости чисто жадного алгоритма для функций из класса $A_{\alpha, \beta}(D)$.

Библиография: 4 названия.

1. Введение. Настоящая работа посвящена исследованию скорости сходимости чисто жадного алгоритма (гриди-алгоритма) в действительном гильбертовом пространстве H . Для определения чисто жадного алгоритма в пространстве H необходим словарь $\mathcal{D}$ – нормированное подмножество H , линейная оболочка которого всюду плотна, и начальный вектор $f_0 \in H$.

Для произвольного $f \in H$ выберем такой вектор $g(f) \in \mathcal{D}$, который максимизирует $|\langle f, g \rangle|$ (мы будем полагать, что он существует). Определим

$$G(f, \mathcal{D}) := \langle f, g(f) \rangle g(f) \quad \text{и} \quad R(f, \mathcal{D}) := f - G(f, \mathcal{D}).$$

Чисто жадный алгоритм (ЧЖА). Положим $R_0(f_0, \mathcal{D}) := f_0$ и $G_0(f_0, \mathcal{D}) := 0$. Тогда для каждого $m \geq 0$ последовательно определяем

$$g_{m+1} := g(f_m), \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} G_{m+1}(f_0, \mathcal{D}) &:= G_m(f_0, \mathcal{D}) + G(R_m(f_0, \mathcal{D}), \mathcal{D}) = G_m(f_0, \mathcal{D}) + \langle f_m, g_{m+1} \rangle g_{m+1}, \\ R_{m+1}(f_0, \mathcal{D}) &:= f_{m+1} := f - G_{m+1}(f_0, \mathcal{D}) = R(R_m(f_0, \mathcal{D}), \mathcal{D}) = f_m - \langle f_m, g_{m+1} \rangle g_{m+1}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Формальный ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \langle f_m, g_{m+1} \rangle g_{m+1}$$

также называют PGA-разложением вектора f_0 по словарю $\mathcal{D}$.

Джонс [1] доказал, что ЧЖА в гильбертовом пространстве сходится, т.е.

$$G_m(f_0, \mathcal{D}) \rightarrow f_0, \quad f_m = R_m(f_0, \mathcal{D}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00248.

для всех словарей $\mathcal{D}$ и начальных векторов f_0 .

Ясно, что нельзя дать общих оценок на скорость сходимости ЧЖА (PGA-разложений) для произвольного D и произвольного f_0 . Поэтому обычно ставится вопрос о получении оценок на скорость сходимости ЧЖА в случае, если начальный вектор f_0 принадлежит некоторому классу, зависящему от $\mathcal{D}$. Во многих работах по жадным алгоритмам в качестве такого класса рассматривается класс $\mathcal{A}_1(\mathcal{D})$ – замыкание выпуклой оболочки векторов, пропорциональных векторам из словаря $\mathcal{D}$.

Более точно, сначала определяется класс функций

$$\mathcal{A}_1^o(\mathcal{D}, M) := \left\{ f \in H : f = \sum_{k \in \Lambda} c_k w_k, w_k \in \mathcal{D}, \# \Lambda < \infty \text{ и } \sum_{k \in \Lambda} |c_k| \leq M \right\}$$

и класс $\mathcal{A}_1(\mathcal{D}, M)$, являющийся замыканием (в H) класса $\mathcal{A}_1^o(\mathcal{D}, M)$. Далее, определим $\mathcal{A}_1(\mathcal{D})$ как объединение по $M > 0$ всех $\mathcal{A}_1(\mathcal{D}, M)$. Для $f \in \mathcal{A}_1(\mathcal{D})$ введем норму

$$|f|_{\mathcal{A}_1(\mathcal{D})}$$

как наименьшее M , для которого $f \in \mathcal{A}_1(\mathcal{D}, M)$.

В работе [2] Левором и Темляковым была получена первая оценка сверху на скорость сходимости ЧЖА для функций из класса $\mathcal{A}_1(\mathcal{D})$:

$$\|f - G_m(f, \mathcal{D})\| \leq |f|_{\mathcal{A}_1(\mathcal{D})} m^{-1/6}.$$

Это оценка была улучшена Конягиным и Темляковым в [3]. Они доказали, что

$$\|f - G_m(f, \mathcal{D})\| \leq 4|f|_{\mathcal{A}_1(\mathcal{D})} m^{-11/62}. \quad (1.3)$$

Оценка снизу на скорость сходимости ЧЖА в этом классе была получена Лившицем и Темляковым в [4]. Было доказано существование словаря $\mathcal{D}$ и вектора $f \in H$, $f \neq 0$, для которых

$$\|f - G_m(f, \mathcal{D})\| \geq C m^{-0.27} |f|_{\mathcal{A}_1(\mathcal{D})}.$$

Возникает вопрос о скорости сходимости ЧЖА на других классах функций. Представляется естественным сравнить качество приближения, полученного после m шагов ЧЖА, величину $\|f - G_m(f, \mathcal{D})\|$, с величиной наилучшего m -членного приближения $\sigma_m(f, \mathcal{D})$,

$$\sigma_m(f, \mathcal{D}) = \inf_{\substack{c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R} \\ g_1, \dots, g_m \in \mathcal{D}}} \left\| f - \sum_{k=1}^m c_k g_k \right\|.$$

Для $\gamma > 0$ рассмотрим классы, состоящие из функций с фиксированной скоростью убывания m -членных приближений

$$A^\gamma(\mathcal{D}) = \{f \in H : \exists M \forall m \sigma_m(f, \mathcal{D}) \leq M m^{-\gamma}\}.$$

Выяснилось, что в случае произвольного словаря $\mathcal{D}$ принадлежность функции f классу $A^\gamma(\mathcal{D})$ не позволяет получить какую-либо степенную оценку сверху на скорость убывания $\|f - G_m(f, \mathcal{D})\|$, что иллюстрирует следующий

ПРИМЕР 1. Для произвольных $\gamma, \delta > 0$ существует словарь $\mathcal{D}$, функция $f_0 \in A^\gamma(\mathcal{D})$ и $C > 0$ такие, что для всех $m > 1$ выполняется неравенство

$$\|f - G_m(f, \mathcal{D})\| \geq C m^{-\delta}.$$

(Соответствующее построение приведено в п. 4.)

Поэтому для получения содержательных оценок сверху необходимо ввести какие-либо дополнительные ограничения на функциональный класс. В этой работе мы накладываем не только условия на величину m -членного приближения, но и условие на $\mathcal{A}_1(\mathcal{D})$ -норму ($|\cdot|_{\mathcal{A}_1(\mathcal{D})}$) аппроксиманта. А именно, в качестве класса начальных функций рассматривается класс $A_{\alpha, \beta}(\mathcal{D})$, определенный так:

$$A_{\alpha, \beta}(\mathcal{D}) = \bigcup_{M_\alpha, M_\beta > 1} A_{\alpha, \beta}^{M_\alpha, M_\beta}(\mathcal{D}),$$

где

$$A_{\alpha, \beta}^{M_\alpha, M_\beta}(\mathcal{D}) = \left\{ f \in H \mid \forall m \exists g_0, \dots, g_{m-1} \in \mathcal{D}, c_0, \dots, c_{m-1} \in \mathbb{R} : \right. \\ \left. \left\| f - \sum_{i=0}^{m-1} c_i g_i \right\| \leq \frac{M_\alpha}{m^\alpha}, \sum_{i=0}^{m-1} |c_i| \leq M_\beta m^\beta \right\}.$$

Для него получены следующие оценки на скорость сходимости.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < \alpha < 1/6$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta < 1/2$ и $f \in A_{\alpha, \beta}(H, D)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $C > 0$, что для всех $m \geq 0$ выполняется

$$\|f - G_m(f, D)\| \leq C m^{-\alpha/(1+2\alpha)+\varepsilon}. \quad (1.4)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 < \alpha < 1/6$, $0 < \beta < 1/2$, $\alpha/(1+2\alpha) + \beta \geq 1/2$ и $f \in A_{\alpha, \beta}(H, D)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $C > 0$, что для всех $m \geq 0$

$$\|f - G_m(f, D)\| \leq C m^{-(1/2-\beta)+\varepsilon}.$$

Объединяя теоремы 1 и 2, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $0 < \alpha < 1/6$, $0 < \beta < 1/2$ и $f \in A_{\alpha, \beta}(H, D)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $C > 0$, что для всех $m \geq 0$

$$\|f - G_m(f, D)\| \leq C m^{-\min(1/2-\beta, \alpha/(1+2\alpha))+\varepsilon}.$$

Отметим, что при $\beta = 0$ теорема 1 гарантирует скорость сходимости ЧЖА $C m^{-1/8+\varepsilon}$, что уступает оценке (1.3), которая дает скорость $C m^{-11/62}$. С другой стороны, показатель в оценке (1.4) не зависит от β , а классы $A_{\alpha, \beta}(\mathcal{D})$ расширяются с увеличением β ; отсюда вытекает, что теоремы 1 и 3 “наиболее точны” в случае $\beta > 1/2 - \alpha - \varepsilon$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как отмечалось выше, элемент $g(f)$, максимизирующий $|\langle f, g \rangle|$ может не существовать. Чтобы избежать этой проблемы, можно выбирать в качестве $g(f)$ произвольный элемент словаря, удовлетворяющий неравенству

$$|\langle f, g(f) \rangle| \geq t \sup_{g \in \mathcal{D}} |\langle f, g \rangle|,$$

где t , $0 < t < 1$, – фиксированное число (что является простейшей разновидностью слабого жадного алгоритма). В этом случае по наперед заданному ε можно определить такое достаточно близкое к единице число t , что для соответствующего алгоритма утверждения теорем 1–3 останутся истинными.

2. Доказательство теоремы 1. Ясно, что теорема 1 вытекает из следующего утверждения: для любого $\varepsilon_0 > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех функций $f \in A_{\alpha, \beta}^{1,1}(\mathcal{D})$, $\|f\| < \delta < 1$, выполняется

$$\|f - G_m(f, D)\| \leq m^{-\alpha/(1+2\alpha)+\varepsilon_0},$$

которое мы и будем доказывать.

Пусть проводится ЧЖА по системе $\mathcal{D}$ с начальным вектором $f_0 := f$, т.е. по формулам (1.1) и (1.2) определяются f_m и g_m . Введем стандартные обозначения:

$$a_m = \langle f_m, f_m \rangle, \quad d_m = |\langle f_m, g_{m+1} \rangle|, \quad b_{m+1} = \sum_{k=0}^m d_m.$$

Из (1.2) следует равенство

$$f_m = f_0 - G_m(f_0, \mathcal{D}) = f_0 - \sum_{j=0}^{m-1} \langle f_j, g_{j+1} \rangle g_{j+1}.$$

С другой стороны, функция $f_0 \in A_{\alpha, \beta}^{1,1}$. Поэтому для всех m найдутся такие $c_{k_j} \in \mathbb{R}$, $\tilde{g}_{k_j} \in D$, $j = 0, \dots, m-1$ и $r_m \in H$, что

$$f_0 - \sum_{j=0}^{m-1} c_{k_j} \tilde{g}_{k_j} = r_m, \quad \|r_m\| \leq m^{-\alpha}, \quad \sum_{j=0}^{m-1} |c_{k_j}| \leq m^\beta.$$

Тогда

$$\begin{aligned} a_m &= \langle f_m, f_m \rangle = \langle f_m, f_0 - G_m \rangle = \left\langle f_m, r_m + \sum_{j=0}^{m-1} c_{k_j} \tilde{g}_{k_j} - \sum_{j=0}^{m-1} \langle f_j, g_{j+1} \rangle g_{j+1} \right\rangle \\ &\leq |\langle f_m, r_m \rangle| + \sum_{j=0}^{m-1} |c_{k_j}| |\langle f_m, \tilde{g}_{k_j} \rangle| + \sum_{j=0}^{m-1} |\langle f_j, g_{j+1} \rangle| |\langle f_m, g_{j+1} \rangle| \\ &\leq |\langle f_m, r_m \rangle| + \sum_{j=0}^{m-1} (|c_{k_j}| + |\langle f_j, g_{j+1} \rangle|) |\langle f_m, g_{m+1} \rangle| \\ &\leq \|f_m\| \|r_m\| + d_m \sum_{j=0}^{m-1} (d_j + |c_{k_j}|) \leq a_m^{1/2} m^{-\alpha} + d_m (b_m + m^\beta), \\ d_m &\geq \frac{a_m - a_m^{1/2} m^{-\alpha}}{b_m + m^\beta}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Пусть

$$\varepsilon = \min\left(\varepsilon_0, \frac{1}{2} - \alpha - \beta, \alpha\right). \quad (2.2)$$

Рассмотрим числа $m_0 \in \mathbb{N}$ со следующим свойством:

$$a_{m_0} \geq m_0^{-2\alpha+\varepsilon/5}, \quad a_{m_0-1} < (m_0-1)^{-2\alpha+\varepsilon/5}, \quad (2.3)$$

и промежуток натурального ряда $\Delta(m_0)$, равный

$$\Delta(m_0) = \{m_0, m_0+1, \dots, s-1\},$$

где s – минимальное число, большее m_0 , для которого $a_s < s^{-2\alpha+\varepsilon/5}$, или, если такого s не существует, равный

$$\Delta(m_0) = \{m_0, m_0+1, \dots\}.$$

Таким образом, для всех $k \in \Delta(m_0)$ выполняется неравенство

$$a_k \geq k^{-2\alpha+\varepsilon/5}. \quad (2.4)$$

Ясно, что для доказательства теоремы достаточно проверить, что для всех m_0 , удовлетворяющих (2.3), и $m \in \Delta(m_0)$ выполняется

$$a_m = \|f_m\|^2 \leq m^{-2\alpha/(1+2\alpha)+2\varepsilon}. \quad (2.5)$$

Мы возьмем настолько малое δ , что первое m_0 , удовлетворяющее (2.3), будет достаточно большим (насколько, насколько это необходимо для верности последующих выкладок). В частности, будем требовать выполнения неравенства

$$a_{m_0} < a_{m_0-1} \leq (m_0-1)^{-2\alpha+\varepsilon/5} < m_0^{-2\alpha+\varepsilon/4}. \quad (2.6)$$

В зависимости от значения b_{m_0} рассмотрим два случая.

Случай 1: $b_{m_0} \geq m_0^{1/2-\alpha-\varepsilon/10}$.

ЛЕММА 2.1. Если $b_{m_0} \geq m_0^{1/2-\alpha-\varepsilon/10}$, то для всех $m \in \Delta(m_0)$ выполняется

$$b_m \geq m^{\beta+\varepsilon/10}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда рассмотрим минимальное $m \in \Delta(m_0)$, для которого

$$b_m < m^{\beta+\varepsilon/10}. \quad (2.7)$$

Пусть $m_0 \leq k \leq m-1$, тогда

$$b_k \geq k^{\beta+\varepsilon/10}. \quad (2.8)$$

В силу монотонности последовательностей $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, а также соотношений (2.1), (2.4) и (2.7) выполняются следующие неравенства:

$$d_k \geq \frac{a_k - a_k^{1/2} k^{-\alpha}}{b_k + k^\beta} = \frac{a_k(1 - k^{-\alpha}/a_k^{1/2})}{b_k(1 + k^\beta/b^k)} \geq \frac{m^{-2\alpha+\varepsilon/5}}{m^{\beta+\varepsilon/10}} \frac{(1 - k^{-\alpha}/a_k^{1/2})}{(1 + k^\beta/b^k)}.$$

Отсюда в силу (2.4) и (2.8) для достаточно больших k и m получаем

$$d_k \geq \frac{m^{-2\alpha+\varepsilon/5}}{m^{\beta+\varepsilon/8}}.$$

Поэтому

$$b_m = b_{m_0} + \sum_{k=m_0}^{m-1} d_k \geq m_0^{1/2-\alpha-\varepsilon/10} + \frac{m^{-2\alpha+\varepsilon/5}}{m^{\beta+\varepsilon/8}}(m - m_0).$$

Проверим, что

$$b_m \geq m^{\beta+\varepsilon/10}. \quad (2.9)$$

Для доказательства (2.9) рассмотрим функцию

$$\Phi(t) = m_0^{1/2-\alpha-\varepsilon/10} + \frac{t^{-2\alpha+\varepsilon/5}}{t^{\beta+\varepsilon/8}}(t - m_0) - t^{\beta+\varepsilon/10}.$$

Достаточно показать, что $\Phi(t) \geq 0$. Проверим, что

$$\Phi(m_0) \geq 0, \quad \Phi'(t) \geq 0 \quad \text{при } t \geq m_0.$$

Действительно, для достаточно большого m_0

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= (1 - 2\alpha - \beta + 0.075\varepsilon)t^{-2\alpha-\beta+0.075\varepsilon} \\ &\quad - (-2\alpha - \beta + 0.075\varepsilon)t^{-2\alpha-\beta+0.075\varepsilon-1}m_0 - (\beta + \varepsilon/10)t^{\beta+\varepsilon/10-1} \\ &\geq t^{-2\alpha-\beta+0.075\varepsilon} - (\beta + \varepsilon/10)t^{\beta+\varepsilon/10-1} \geq 0. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве была использована оценка $-2\alpha - \beta + 0.075\varepsilon > \beta - 1 + \varepsilon/10$, которая вытекает из соотношения (2.2). Для завершения доказательства леммы оценим $\Phi(m_0)$:

$$\Phi(m_0) = m_0^{1/2-\alpha-\varepsilon/10} - (\beta + \varepsilon/10)m_0^{\beta+\varepsilon/10} > 0.$$

В случае 1 лемма 2.1 и соотношение (2.4) позволяют преобразовать (2.1) для $m \in \Delta(m_0)$:

$$d_m \geq \frac{a_m - a_m^{1/2}m^{-\alpha}}{b_m + m^\beta} \geq \frac{a_m(1 - m^{-\varepsilon/10})}{b_m(1 + m^{-\varepsilon/10})} \geq \frac{a_m}{b_m(1 + m^{-\varepsilon/10})}. \quad (2.10)$$

Пусть $m \in \Delta(m_0)$. Тогда из определения ЧЖА вытекает

$$a_{m+1} = a_m - d_m^2 = a_m \left(1 - \frac{d_m^2}{a_m}\right). \quad (2.11)$$

С другой стороны, используя (2.10), получим

$$b_{m+1} = b_m + d_m = b_m \left(1 + \frac{d_m^2}{d_m b_m}\right) \leq b_m \left(1 + \frac{d_m^2}{a_m}(1 + m^{-\varepsilon/20})\right).$$

Из двух последних соотношений вытекает следующее неравенство:

$$a_{m+1}b_{m+1} \leq a_m b_m \left(1 + \frac{d_m^2}{a_m}m^{-\varepsilon/20}\right).$$

Тогда

$$a_m b_m \leq a_{m_0} b_{m_0} \prod_{k=m_0}^{m-1} \left(1 + \frac{d_k^2}{a_k}k^{-\varepsilon/20}\right). \quad (2.12)$$

ЛЕММА 2.2. *Существует такая константа $C = C(\alpha, \varepsilon) > 0$, что для произвольных m_0 и m , удовлетворяющих неравенствам $m_0 < m < m_0^{2/(1-6\alpha)}$, $a_m \geq m^{-2\varepsilon+\alpha/5}$ и (2.12), имеет место следующая оценка:*

$$a_m b_m \leq C a_{m_0} b_{m_0}. \quad (2.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.11) вытекает, что

$$a_m = a_{m_0} \prod_{k=m_0}^{m-1} \left(1 - \frac{d_k^2}{a_k}\right).$$

Принимая во внимание то, что $a_{m_0} < 1$, $m < m_0^{2/(1-6\alpha)}$ и $a_m \geq m^{-2\varepsilon+\alpha/5}$, получим

$$\begin{aligned} \left(m_0^{2/(1-6\alpha)}\right)^{-2\alpha+\varepsilon/5} &\leq \prod_{k=m_0}^{m-1} \left(1 - \frac{d_k^2}{a_k}\right), \\ \frac{2}{1-6\alpha} \left(-2\alpha + \frac{\varepsilon}{5}\right) \ln m_0 &\leq \sum_{k=m_0}^{m-1} \ln \left(1 - \frac{d_k^2}{a_k}\right), \quad \sum_{k=m_0}^{m-1} \frac{d_k^2}{a_k} \leq \frac{2}{1-6\alpha} \left(2\alpha - \frac{\varepsilon}{5}\right) \ln m_0. \end{aligned}$$

Ясно, что найдется такая константа $C > 0$, что для всех m_0 выполняется

$$\sum_{k=m_0}^{m-1} \frac{d_k^2}{a_k} k^{-\varepsilon/20} \leq \sum_{k=m_0}^{m-1} \frac{d_k^2}{a_k} m_0^{-\varepsilon/20} \leq m_0^{-\varepsilon/20} \frac{2}{1-6\alpha} \left(2\alpha - \frac{\varepsilon}{5}\right) \ln m_0 \leq \ln C.$$

Тогда, используя (2.12), получим

$$\begin{aligned} a_m b_m &\leq a_{m_0} b_{m_0} \exp \left(\sum_{k=m_0}^{m-1} \ln \left(1 + \frac{d_k^2}{a_k} k^{-\varepsilon/20}\right) \right) \\ &\leq a_{m_0} b_{m_0} \exp \left(\sum_{k=m_0}^{m-1} \frac{d_k^2}{a_k} k^{-\varepsilon/20} \right) \leq C a_{m_0} b_{m_0}, \end{aligned}$$

что доказывает (2.13).

Из леммы 2.2 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Существует такая константа $C > 0$, что в случае 1 для всех m_0 , обладающих свойством (2.3), и $m \in \Delta(m_0)$, $m < m_0^{2/(1-6\alpha)}$, выполняется неравенство*

$$a_m b_m \leq C a_{m_0} b_{m_0}.$$

Пусть

$$n_0 = [m_0^{1+2\alpha}] + 1. \quad (2.14)$$

Тогда справедлива следующая

ЛЕММА 2.3. Пусть m_0 обладает свойством (2.3) и n_0 определено соотношением (2.14). Тогда для всех $m \in \Delta(m_0)$, $m \geq n_0$, выполняется неравенство

$$\frac{a_m}{b_m^2} \leq \frac{2}{m}. \quad (2.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проверим (2.15) для $m = n_0$. Ясно, что

$$b_{n_0} \geq \sum_{k=m_0}^{n_0-1} d_k.$$

Так как m_0 достаточно велико, то, используя (2.10), получим

$$b_{n_0} \geq (n_0 - m_0) \frac{a_{n_0}}{1.5b_{n_0}}, \quad b_{n_0} \geq n_0 \frac{a_{n_0}}{2b_{n_0}}, \quad \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}^2} \leq \frac{2}{n_0}. \quad (2.16)$$

С другой стороны, следуя работе [2] и используя (2.10) и (2.11), получаем

$$\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}^2} \leq \frac{a_{m+1}}{b_m^2} = \frac{a_m}{b_m^2} \left(1 - \frac{d_m^2}{a_m}\right) \leq \frac{a_m}{b_m^2} \left(1 - \frac{a_m}{2b_m^2}\right).$$

Из этого неравенства, (2.16) и леммы 3.4 из работы [2] (точнее, из индукционного перехода из этой леммы) непосредственно следует справедливость (2.15) для $m \geq n_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 В СЛУЧАЕ 1. Сначала проверим (2.5) для m , $m_0 \leq m \leq n_0$, $m \in \Delta(m_0)$. Из (2.6) и (2.14) вытекает

$$a_m \leq a_{m_0} \leq m_0^{-2\alpha+\varepsilon/4} \leq \left((m-1)^{1/(1+2\alpha)}\right)^{-2\alpha+\varepsilon/4} \leq m^{-2\alpha/(1+2\alpha)+2\varepsilon}.$$

Теперь проверим (2.5) для m , $n_0 < m \leq m_0^{2/(1-6\alpha)}$, $m \in \Delta(m_0)$. Оценим $a_{m_0}b_{m_0}$. Начнем с b_{m_0} : $b_{m_0} = \sum_{k=0}^{m_0-1} d_k$, но

$$\sum_{k=0}^{m-1} d_k^2 \leq a_0 \leq 1.$$

Тогда по неравенству Коши–Буняковского

$$b_{m_0} \leq m_0^{1/2}. \quad (2.17)$$

Учитывая (2.6), получаем

$$a_{m_0}b_{m_0} \leq m_0^{-2\alpha+\varepsilon/4+1/2}.$$

По следствию 2.1

$$a_mb_m \leq Ca_{m_0}b_{m_0} \leq Cm_0^{-2\alpha+\varepsilon/4+1/2};$$

по лемме 2.3

$$\frac{a_m}{b_m^2} \leq \frac{2}{m}.$$

Следовательно, для больших m_0 имеем

$$\begin{aligned} a_m^3 &= (a_m b_m)^2 \frac{a_m}{b_m^2} \leq \frac{m_0^{-4\alpha+\varepsilon/2+1}}{m} 2C^2 \leq \frac{m_0^{-4\alpha+\varepsilon+1}}{m}, \\ a_m &\leq \frac{m_0^{(-4\alpha+\varepsilon+1)/3}}{m^{1/3}}, \\ a_m &\leq \frac{m^{1/(1+2\alpha)} (-4\alpha+\varepsilon+1)/3}{m^{1/3}} \leq m^{(-6\alpha+\varepsilon)/(3(1+2\alpha))} \leq m^{-2\alpha/(1+2\alpha)+2\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Заметим, что из (2.18) вытекает, что при $l = [m_0^{2/(1-6\alpha)}]$ выполняется

$$a_l \leq l^{-2\alpha} < l^{-2\alpha+\varepsilon/5}.$$

Действительно,

$$a_l \leq \frac{m_0^{(-4\alpha+\varepsilon/2+1)/3}}{l^{1/3}} \leq \frac{m_0^{1/2}}{(m_0-1)^{2/(3(1-6\alpha))}} \leq m_0^{-4\alpha/(1-6\alpha)} \leq l^{-2\alpha};$$

здесь мы воспользовались тем, что

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} = \frac{2/3 - 4\alpha}{1 - 6\alpha}.$$

Поэтому $l = [m_0^{2/(1-6\alpha)}] \notin \Delta(m_0)$ и, следовательно, последний случай $m \in \Delta(m_0)$: $m \geq m_0^{2/(1-6\alpha)}$ не нуждается в рассмотрении (таких m просто нет). Случай 1 полностью рассмотрен.

Случай 2: $b_{m_0} < m_0^{1/2-\alpha-\varepsilon/10}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 В СЛУЧАЕ 2. Докажем, что в случае 2 промежуток $\Delta(m_0) = \{m_0\}$, другими словами,

$$a_{m_0+1} < (m_0+1)^{-2\alpha+\varepsilon/5}. \quad (2.19)$$

Из (2.3) следует, что

$$m_0^{-2\alpha+\varepsilon/5} \leq a_{m_0} < a_{m_0-1} \leq (m_0-1)^{-2\alpha+\varepsilon/5}.$$

Поэтому для доказательства (2.19) достаточно проверить, что

$$d_{m_0}^2 \geq (m_0-1)^{-2\alpha+\varepsilon/5} - (m_0+1)^{-2\alpha+\varepsilon/5}.$$

Проверим, что

$$d_{m_0} \geq 2m_0^{-1/2-\alpha+\varepsilon/10}.$$

Действительно, из (2.1) и неравенств

$$m^\beta \leq m^{1/2-\alpha-\varepsilon}, \quad a_{m_0} \leq m_0^{-2\alpha+\varepsilon/5}$$

вытекает, что для достаточно больших m_0 выполняется неравенство

$$d_{m_0} \geq \frac{m_0^{-2\alpha+\varepsilon/5}}{m_0^{1/2-\alpha}} = m_0^{-1/2-\alpha+\varepsilon/5} > 2m_0^{-1/2-\alpha+\varepsilon/10}.$$

Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Так же, как и при доказательстве теоремы 1, нам достаточно проверить справедливость следующего утверждения: для любого $\varepsilon_0 > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех функций $f \in A_{\alpha, \beta}^{1,1}(\mathcal{D})$, $\|f\| < \delta < 1$, выполняется

$$\|f - G_m(f, D)\| \leq m^{-(1/2-\beta)+\varepsilon_0}. \quad (3.1)$$

Будем действовать в обозначениях п. 2. Пусть

$$\varepsilon = \min\left(\varepsilon_0, \alpha + \beta - \frac{1}{2}, \alpha, \frac{\beta}{10}, \frac{1}{2} - \beta\right). \quad (3.2)$$

Мы докажем, что если для $m_1 := m$ выполняются неравенства

$$a_{m_1} > m_1^{-(1-2\beta)+\varepsilon/2}, \quad (3.3)$$

$$a_{m_1-1} \leq (m_1 - 1)^{-(1-2\beta)+\varepsilon/2}, \quad (3.4)$$

то уже для $m_1 := m + 1$ неравенство (3.3) неверно. Таким образом, для достаточно больших m будет выполняться

$$\begin{aligned} \text{или } a_m &\leq m^{-(1-2\beta)+\varepsilon/2}, \quad \text{или } a_m < a_{m-1} \leq (m-1)^{-(1-2\beta)+\varepsilon/2}, \\ a_m &\leq m^{-(1-2\beta)+0.51\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Выберем δ таким образом, что для всех $1 \leq n \leq n_0$

$$a_n \leq \delta \leq n_0^{-2\alpha} \leq n^{-2\alpha} \leq n^{-(1-2\beta)}, \quad (3.6)$$

где n_0 – наперед заданное число. Это обеспечивает справедливость (3.5) для малых m и дает выполнение (3.1).

Пусть для m_1 выполняются (3.3) и (3.4) и для всех $m \leq m_1$ выполняется (3.5). Проверим, что

$$a_{m_1+1} \leq (m_1 + 1)^{-(1-2\beta)+\varepsilon/2}. \quad (3.7)$$

В зависимости от значения b_{m_1} рассмотрим два случая.

Случай 1: $b_{m_1} \leq m_1^{\beta+\varepsilon/5}$.

Из неравенств (2.1), (3.3), (3.5) и $\varepsilon \leq \alpha + \beta - 1/2$ (см. (3.2)) следует, что для достаточно больших m_1

$$\begin{aligned} d_{m_1} &\geq \frac{a_{m_1} - a_{m_1}^{1/2} m_1^{-\alpha}}{b_{m_1} + m_1^{\beta}} \geq \frac{m_1^{-(1-2\beta)+\varepsilon/2} - m_1^{1/2(-1-2\beta)+0.51\varepsilon} m_1^{-\alpha}}{m_1^{\beta+\varepsilon/5} + m_1^{\beta}} \\ &= \frac{m_1^{(-(1-2\beta)+\varepsilon/2)} (1 - m_1^{1/2-\alpha-\beta-0.245\varepsilon})}{m_1^{\beta+\varepsilon/5} (1 + m_1^{-\varepsilon/5})} \geq m_1^{-1-\beta+0.28\varepsilon}, \\ d_{m_1}^2 &= m_1^{-2+2\beta+0.56\varepsilon} > 10m_1^{-(1-2\beta)+\varepsilon/2-1}. \end{aligned}$$

Согласно (2.11) и (3.4)

$$\begin{aligned} a_{m_1+1} &= a_{m_1} - d_{m_1}^2 < a_{m_1-1} - d_{m_1}^2 \\ &\leq (m_1 - 1)^{-(1-2\beta)+\varepsilon/2} - 10m_1^{-(1-2\beta)+\varepsilon/2-1} < (m_1 + 1)^{-(1-2\beta)+\varepsilon/2}, \end{aligned}$$

что и доказывает (3.7) в случае 1.

Случай 2: $b_{m_1} > m_1^{\beta+\varepsilon/5}$.

Покажем, что этот случай вообще не может реализоваться. Предположим противное. Пусть m_0 – наибольшее из чисел, не превосходящих m_1 , для которых выполняется хотя бы одно из следующих утверждений:

$$m_0 - 1 \leq m_1^{(1-6\alpha)/2}, \quad (3.8)$$

$$b_{m_0-1} \leq (m_0 - 1)^{\beta+\varepsilon/10}, \quad (3.9)$$

$$a_{m_0-1} \leq (m_0 - 1)^{-2\alpha+\varepsilon/5}. \quad (3.10)$$

В силу неравенств (3.6) такое m_0 найдется. Следовательно, для m , $m_0 \leq m \leq m_1$, выполняются неравенства

$$b_m > m^{\beta+\varepsilon/10}, \quad (3.11)$$

$$a_m \geq m^{-2\alpha+\varepsilon/5}, \quad (3.12)$$

$$m_0^{2/(1-6\alpha)} \geq m_1. \quad (3.13)$$

Из (2.1), (3.11) и (3.12) вытекает, что для m , $m_0 \leq m \leq m_1$, справедлива оценка (2.10):

$$d_m \geq \frac{a_m - a_m^{1/2} m^{-\alpha}}{b_m + m^\beta} \geq \frac{a_m(1 - m^{-\varepsilon/10})}{b_m(1 + m^{-\varepsilon/10})} \geq \frac{a_m}{b_m(1 + m^{-\varepsilon/20})}.$$

Отсюда следует (см. п. 2) неравенство (2.12):

$$a_m b_m \leq a_{m_0} b_{m_0} \prod_{k=m_0}^{m-1} \left(1 + \frac{d_k^2}{a_k} k^{-\varepsilon/20}\right).$$

Тогда с учетом (3.13) мы можем применить лемму 2.2 при $m = m_1$ и, используя (3.3), получим

$$a_{m_1} b_{m_1} \leq C a_{m_0} b_{m_0},$$

$$m_1^{-1+3\beta+0.7\varepsilon} = m_1^{-(1-2\beta)+\varepsilon/2} m_1^{\beta+\varepsilon/5} \leq a_{m_1} b_{m_1} \leq C a_{m_0} b_{m_0}. \quad (3.14)$$

Заметим также, что из неравенств

$$\frac{\alpha}{1+2\alpha} + \beta \geq \frac{1}{2}, \quad \alpha < \frac{1}{6}, \quad \beta < \frac{1}{2}$$

вытекают оценки

$$\frac{1}{2} > \beta \geq \frac{1/2}{1+2\alpha} \geq \frac{3}{8}, \quad (3.15)$$

$$\alpha \geq \frac{1}{4\beta} - \frac{1}{2}. \quad (3.16)$$

Предположим, что для m_0 выполняется (3.8). Тогда согласно (2.17), (3.5) и (3.14) должно выполняться следующее неравенство:

$$m_1^{-1+3\beta+0.7\varepsilon} \leq C a_{m_0} b_{m_0} \leq C m_0^{-(1-2\beta)+0.51\varepsilon} m_0^{1/2}.$$

Соотношения (3.8) и (3.16) дают

$$m_1 \geq (m_0 - 1)^{2/(1-6\alpha)} > m_0^{1.5/(1-6\alpha)} \geq m_0^{1.5/(1-6(1/(4\beta)-1/2))} = m_0^{3\beta/(8\beta-3)}.$$

Подставляя эту оценку в предыдущее неравенство и учитывая, что $\varepsilon \leq \beta/10$ (см. (3.2)), получаем

$$\begin{aligned} m_0^{3\beta(-1+3\beta+0.7\varepsilon)/(8\beta-3)} &\leq C m_0^{2\beta-1/2+0.51\varepsilon}, \\ m_0^{3\beta(-1+3\beta+0.7\varepsilon)/(8\beta-3)-(2\beta-1/2+0.51\varepsilon)} &\leq C, \\ m_0^{3\beta(-1+3\beta)/(8\beta-3)-(2\beta-1/2+\beta/10)} &\leq C. \end{aligned}$$

Но это неравенство не может выполняться в силу того, что

$$\frac{3\beta(-1+3\beta)}{8\beta-3} - \left(2\beta - \frac{1}{2} + \frac{\beta}{10}\right) > 0.001$$

при $3/8 \leq \beta \leq 1/2$. (Последняя оценка может быть получена непосредственной проверкой.) Значит, m_0 не может удовлетворять (3.8).

Предположим, что m_0 удовлетворяет (3.9). Тогда

$$b_{m_0} = b_{m_0-1} + d_{m_0-1} \leq (m_0 - 1)^{\beta+\varepsilon/10} + a_{m_0-1}^{1/2} < m_0^{\beta+0.11\varepsilon}.$$

Согласно (3.5) и (3.14)

$$m_1^{-1+3\beta+0.7\varepsilon} \leq C m_0^{(\beta+0.11\varepsilon)+(-(1-2\beta)+0.51\varepsilon)},$$

что не может быть верно, так как $m_1 \geq m_0$ и $-1+3\beta+0.7\varepsilon > -1+3\beta+0.62\varepsilon > 0$. Поэтому m_0 не может удовлетворять (3.9).

Рассмотрим последнюю возможность: m_0 удовлетворяет (3.10). В силу того, что $a_{m_1} < a_{m_0-1}$ и $-(1-2\beta) + \varepsilon/2 < 0$ (см. (3.2)), с учетом (3.3) и (3.10) имеем

$$\begin{aligned} m_1^{-(1-2\beta)+\varepsilon/2} &< a_{m_1} < a_{m_0-1} \leq (m_0 - 1)^{-2\alpha+\varepsilon/5}, \\ m_1 &> m_0^{(2\alpha-0.19\varepsilon)/(1-2\beta-\varepsilon/2)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Соотношения (2.17), (3.10), (3.14) и (3.17) дают

$$\begin{aligned} m_1^{-1+3\beta+0.7\varepsilon} &\leq C a_{m_0} b_{m_0} \leq C a_{m_0-1} b_{m_0}, \\ m_0^{(2\alpha-0.19\varepsilon)(-1+3\beta+0.7\varepsilon)/(1-2\beta-\varepsilon/2)} &\leq C (m_0 - 1)^{-2\alpha+\varepsilon/5} m_0^{1/2} < C m_0^{1/2-2\alpha+0.21\varepsilon}. \end{aligned}$$

Легко проверяется, что

$$f(t) = \frac{-1 + 3t + 0.7\varepsilon}{1 - 2t - \varepsilon/2}$$

возрастает на отрезке $[3/8, 1/2 - \varepsilon/2]$; поэтому, используя (3.15), получим

$$\begin{aligned} m_0^{\frac{(2\alpha-0.19\varepsilon)(-1+3/(2(1+2\alpha))+0.7\varepsilon)}{1-1/(1+2\alpha)-\varepsilon/2}} &\leq m_0^{(2\alpha-0.19\varepsilon)(-1+3\beta+0.7\varepsilon)/(1-2\beta-\varepsilon/2)}, \\ m_0^{\frac{(2\alpha-0.19\varepsilon)(-1+3/(2(1+2\alpha))+0.7\varepsilon)}{1-1/(1+2\alpha)-\varepsilon/2}} &\leq C(m_0 - 1)^{-2\alpha+\varepsilon/5} m_0^{1/2} < C m_0^{1/2-2\alpha+0.21\varepsilon}, \\ m_0^{\frac{(2\alpha-0.19\varepsilon)(1/2-2\alpha+0.7(1+2\alpha)\varepsilon)}{2\alpha-0.5(1+2\alpha)\varepsilon}} &\leq C m_0^{1/2-2\alpha+0.21\varepsilon}, \\ m_0^{1/2-2\alpha+0.7(1+2\alpha)\varepsilon} &\leq C m_0^{1/2-2\alpha+0.21\varepsilon}, \end{aligned}$$

что не может быть верно для больших m_0 (показатель в левой части больше показателя в правой). Таким образом, m_0 не может удовлетворять (3.10), случай 2 невозможен, и теорема 2 полностью доказана.

4. Построение примера 1. Пусть $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ – ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H . Рассмотрим векторы

$$h_0 = e_0, \quad h_n = e_0 + n^{-S} e_n, \quad n \geq 1,$$

где $S > \gamma + 1/2$ будет определено позже. Определим словарь

$$D = \left\{ \frac{h_n}{\|h_n\|} \right\}_{n=0}^\infty.$$

Положим

$$f_0 = \sum_{n=1}^\infty n^{-\gamma-1/2} e_n. \quad (4.1)$$

Легко видеть, что

$$\sigma_m(f_0, \mathcal{D}) \leq \left(\sum_{n=m}^\infty n^{-2\gamma-1} \right)^{1/2} \leq \frac{1}{(2\gamma)^{1/2}} (m-1)^{-\gamma},$$

откуда следует, что $f \in A^\gamma(\mathcal{D})$. Будем действовать в обозначениях, введенных в начале п. 2. Оценим величину a_0 :

$$a_0 = \langle f_0, f_0 \rangle = \sum_{n=1}^\infty n^{-2\gamma-1} \leq \left(1 + \frac{1}{2\gamma} \right).$$

Согласно неравенству Коши–Буняковского

$$b_m = \sum_{n=0}^m d_n \leq m^{1/2} \left(\sum_{n=0}^m d_n^2 \right)^{1/2} \leq m^{1/2} a_0^{1/2} \leq m^{1/2} \left(\frac{1}{2\gamma} + 1 \right)^{1/2}.$$

Учитывая, что все векторы словаря $\mathcal{D}$ пропорциональны векторам h_n , $n \geq 0$, и то, что $\|h_n\| \geq 1$, $n \geq 0$, имеем

$$f_0 - f_m = \sum_{n=0}^{\infty} c_n h_n,$$

где лишь конечное число ($\leq m$) коэффициентов c_n отличны от нуля и

$$|c_n| \leq m^{1/2} \left(\frac{1}{2\gamma} + 1 \right)^{1/2}, \quad n \geq 0.$$

Следовательно,

$$|\langle f_0 - f_m, e_n \rangle| = |\langle c_n h_n, e_n \rangle| \leq m^{1/2} \left(\frac{1}{2\gamma} + 1 \right)^{1/2} n^{-S}, \quad n \geq 1. \quad (4.2)$$

Обозначим

$$\lambda = \frac{1/2}{S - \gamma - 1/2}.$$

Ясно, что найдется такое число C_1 , что для $n > C_1 m^\lambda$ выполняется

$$m^{1/2} \left(\frac{1}{2\gamma} + 1 \right)^{1/2} n^{-S} < \frac{1}{2} n^{-\gamma-1/2}.$$

Тогда, учитывая (4.1) и (4.2), для $n > C_1 m^\lambda$ имеем

$$|\langle f_m, e_n \rangle| \geq |\langle f_0, e_n \rangle| - |\langle f_0 - f_m, e_n \rangle| \geq \frac{1}{2} n^{-\gamma-1/2}.$$

Отсюда

$$\|f_m\|^2 \geq \sum_{n=[C_1 m^\lambda]+1}^{\infty} |\langle f_m, e_n \rangle|^2 \geq \sum_{n=[C_1 m^\lambda]+1}^{\infty} \frac{1}{4} n^{-2\gamma-1} \geq C^2 m^{-2\lambda\gamma},$$

что дает требуемую оценку

$$\|f - G_m(f, \mathcal{D})\| = \|f_m\| > C m^{-\delta}.$$

В случае, если $\lambda < \delta/\gamma$, это верно при любом $S > 2\gamma/\delta + \gamma + 1/2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Jones L. K. On a conjecture of Huber concerning the convergence of PP-regression // Ann. Statist. 1987. V. 15. P. 880–882.
- [2] DeVore R. A., Temlyakov V. N. Some remarks on greedy algorithms // Adv. Comput. Math. 1996. V. 5. P. 173–187.
- [3] Konyagin S. V., Temlyakov V. N. Rate of convergence of pure greedy algorithms // East J. Approx. 1999. V. 5. P. 493–499.
- [4] Livshitz E. D., Temlyakov V. N. Two lower estimates in greedy approximation // Constructive Approximation. 2003. V. 19. P. 509–524.