Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Протасов, Топологический центр полугруппы свободных ультрафильтров, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 3, 437–441

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1300>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 05:38:40

УДК 512.536

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ЦЕНТР ПОЛУГРУППЫ СВОБОДНЫХ УЛЬТРАФИЛЬТРОВ

И. В. Протасов

Для любой группы G доказана пустота топологического центра полугруппы свободных ультрафильтров на группе G .

Библиография: 4 названия.

Пусть G – произвольная группа, βG – чех-стоунова компактификация группы G как дискретного пространства. Элементами множества βG являются всевозможные ультрафильтры на группе G , а базу топологии образуют подмножества $\bar{A} = \{p \in \beta G : A \in p\}$, где p пробегает все подмножества группы G . Группа G отождествляется с подмножеством всех главных ультрафильтров из βG ; подмножество всех свободных ультрафильтров $\beta G \setminus G$ обозначается через G^* . Базу топологии пространства G^* образуют множества $A^* = \{p \in G^* : A \in p\}$, где A пробегает все подмножества группы G .

Продолжим операцию умножения элементов группы G на множество βG . Произведение pq ультрафильтров $p, q \in \beta G$ определяется указанием всех подмножеств $A \subset G$, которые являются элементами ультрафильтра pq

$$A \in pq \iff \{g \in G : Ag^{-1} \in p\} \in q.$$

Базу ультрафильтра pq образуют подмножества группы G вида $\cup\{P_x x : x \in Q\}$, где $Q \in q$, $P_x \in p$ для всех $x \in Q$. Операция умножения в βG ассоциативна, а G^* – подполугруппа полугруппы βG . Для ультрафильтров $p, q \in \beta G$ положим $\lambda_q(p) = qp$, $\rho_q(p) = pq$. Отображение $\lambda_q : \beta G \rightarrow \beta G$ непрерывно для любого ультрафильтра $q \in \beta G$, а отображение $\rho_q : \beta G \rightarrow \beta G$ непрерывно для любого $q \in G$.

Топологическим центром полугруппы βG называется подмножество $Z(\beta G)$ всех ультрафильтров $q \in \beta G$ таких, что отображение ρ_q непрерывно. Обозначим через ρ_q^* сужение отображения ρ_q на подполугруппу G^* . *Топологическим центром полугруппы G^** называется подмножество $Z(G^*)$ всех ультрафильтров $q \in G^*$ таких, что отображение ρ_q^* непрерывно.

В статье [1] доказано, что $Z(\beta G) = G$ для любой группы G . В ходе доказательства этого утверждения по каждому ультрафильтру $q \in G^*$ подбирается ультрафильтр $p \in G^*$ такой, что отображение ρ_q разрывно в точке p . Естественно возникает следующий вопрос. Существует ли ультрафильтр $p \in G^*$ такой, что отображение ρ_q разрывно в точке p для любого ультрафильтра $q \in G^*$?

В настоящей заметке доказано (теорема 1) существование точки $p \in G^*$ такой, что отображение ρ_q^* разрывно в точке p для любого ультрафильтра $q \in G^*$ при одном лишь ограничении на бесконечную группу G : мощность $|G|$ неизмерима по Уламу. Основываясь на этом утверждении, покажем (теорема 2), что $Z(G^*) = \emptyset$ для любой группы G .

Приведем два определения, необходимые для дальнейшего изложения. Пусть $\mathbf{k}$ – бесконечный кардинал. Ультрафильтр p на множестве X называется $\mathbf{k}$ -полным, если пересечение любых $\mathbf{k}$ подмножеств из X , которые являются элементами ультрафильтра p , принадлежит ультрафильтру p . Если свободный ультрафильтр p счетно полный, то его дисперсионный характер $\Delta(p) = \min\{|A| : A \in p\}$ измерим по Уламу.

Элемент x топологического пространства X называется P -точкой, если пересечение любого счетного набора окрестностей точки x также является окрестностью этой точки. Пусть X – счетное дискретное пространство, $X^* = \beta X \setminus X$, $p \in X^*$. Ультрафильтр p является P -точкой в пространстве X^* тогда и только тогда, когда для любого семейства $\{A_n \in p : n < \omega\}$ найдется подмножество $A \in p$ такое, что подмножество $A \setminus A_n$ конечно для любого $n < \omega$. Вопрос о существовании P -точек в пространстве X^* достаточно нетривиален. Легко построить плотное в X^* подмножество P -точек, используя некоторые дополнительные к системе аксиом ZFC теоретико-множественные предположения, например, континуум-гипотезу. Однако, существуют модели ZFC, в которых пространство X^* не имеет P -точек [2]. С другой стороны, пространство X^* содержит плотное подмножество элементов, которые не являются P -точками.

ЛЕММА 1. Пусть $Y = \{y_n : n < \omega\}$ – подмножество группы G , $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_n \subset \dots$ – возрастающая цепочка конечных подмножеств из G , $X = \bigcup \{X_n : n < \omega\}$. Предположим, что $y_n X_n \cap y_m X_m = \emptyset$ для всех $n < m$. Если $p, q \in \beta G$, $Y \in p$, $X \in q$ и ультрафильтр p не является P -точкой в пространстве G^* , то отображение ρ_q^* разрывно в точке p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем убывающее семейство подмножеств $Y \supset V_1 \supset \dots \supset V_n \supset \dots$ группы G такое, что $V_n \in p$, $y_1, \dots, y_n \notin V_n$, $n < \omega$, и $\bigcap \{V_n^* : n < \omega\}$ не является окрестностью ультрафильтра p в G^* . Положим $V = \bigcup \{V_n X_n : n < \omega\}$ и заметим, что V^* – окрестность ультрафильтра pq в G^* . Допустим, что отображение ρ_q^* непрерывно в точке p . Тогда найдется подмножество $U \in p$ такое, что $U \subset V_1$ и $U^* q \subset V^*$. Так как $\bigcap \{V_n^* : n < \omega\}$ не является окрестностью ультрафильтра p в G^* , найдется номер m такой, что подмножество $W = U \cap (V_m \setminus V_{m+1})$ бесконечно. Зафиксируем произвольный ультрафильтр $r \in W^*$. Поскольку $W^* \subset U^*$, имеем $rq \in V^*$. Из непрерывности умножения по второму аргументу следует, что $rQ \subset V^*$ для некоторого подмножества $Q \in q$, $Q \subset X$. Возьмем произвольный элемент $x \in Q$. Так как $V \in rx$ и $W \in r$, найдется номер $k > m$ такой, что $y_k \in W$, $y_k x \in V$ и $x \in X_k$. Поскольку $y_k \in V_m \setminus V_{m+1}$ и $y_k x \in y_k X_k$, то $y_k x \in y_k X_m$. Значит, $x \in X_m$ и $Q \subset X_m$. Получено противоречие с тем, что $Q \in q$ и q – свободный ультрафильтр.

ЛЕММА 2. Пусть Y, X – подмножества группы G и $Yx \cap Yx' = \emptyset$ для всех различных элементов $x, x' \in X$. Если $p, q \in G^*$, $X \in p$, $Y \in q$, ультрафильтр p не является P -точкой в пространстве G^* , а ультрафильтр q не счетно полный, то отображение ρ_q^* разрывно в точке p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем убывающее семейство подмножеств $Y \supset V_1 \supset \dots \supset V_n \supset \dots$ такое, что $V_n \in p$ и $\bigcap \{V_n^* : n < \omega\}$ не является окрестностью ультрафильтра p в G^* . Разобьем подмножество X на счетное число подмножеств $X = \bigcup \{X_n : n < \omega\}$ так, чтобы $X_n \notin q$ для всех $n < \omega$. Положим $V = \bigcup \{V_n X_n : n < \omega\}$ и заметим,

что V^* окрестность ультрафильтра pq в G^* . Допустим, что отображение ρ_q^* непрерывно в точке p . Выберем подмножество $U \in p$ такое, что $U \subset V_1$ и $U^*q \subset V^*$. Так как $\cap\{V_n^* : n < \omega\}$ не является окрестностью ультрафильтра p в G^* , найдется номер m такой, что подмножество $W = U \cap (V_m \setminus V_{m+1})$ бесконечно. Зафиксируем произвольный ультрафильтр $r \in W^*$. Поскольку $W^* \subset U^*$, имеем $rq \in U^*$. Из непрерывности умножения по второму аргументу следует, что $rQ \subset V^*$ для некоторого подмножества $Q \in q$, $Q \subset X$. Возьмем произвольный элемент $x \in Q$. Так как $V \in rx$ и $W \in r$, найдется элемент $y \in W$ такой, что $yx \in V$. Поскольку $y \in V_m \setminus V_{m+1}$, то $yx \in \cup\{V_n X_n : n \leq m\}$. Значит, $x \in \cup\{X_n : n \leq m\}$ и $Q \subset \cup\{X_n : n \leq m\}$. Получено противоречие с тем, что $X_n \notin q$ для всех $n < \omega$.

ЛЕММА 3. Пусть G – бесконечная группа, $\mathbf{k}$ – кардинал, $p, q \in \beta G$. Операция умножения в полугруппе βG совместно непрерывна в точке (p, q) , если выполняется одно из следующих условий:

- 1) ультрафильтр p является $\mathbf{k}$ -полным и $\Delta(q) \leq \mathbf{k}$;
- 2) ультрафильтр q является $\mathbf{k}$ -полным и $2^{\Delta(p)} \leq \mathbf{k}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполняется условие 1). Фиксируем произвольное подмножество $R \in pq$. Подберем подмножества $Q \in q$, $|Q| = \Delta(q)$, $P_x \in p$, $x \in Q$, такие, что $\cup\{P_x x : x \in Q\} \subset R$. Положим $P = \cap\{P_x : x \in Q\}$. Так как ультрафильтр p $\mathbf{k}$ -полный и $|Q| \leq \mathbf{k}$, то $P \in p$. Значит, $PQ \subset R$ и из [3, лемма 1.1] следует, что умножение совместно непрерывно в точке (p, q) .

Пусть выполняется условие 2). Фиксируем произвольные подмножества $R \in pq$, $P \in p$, $|P| = \Delta(p)$. Подберем подмножества $Q \in q$, $P_x \in p$, $x \in Q$, $P_x \subset P$, такие, что $\cup\{P_x x : x \in Q\} \subset R$. Разобьем множество Q на классы эквивалентности, полагая $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $P_x = P_y$. Так как число классов эквивалентности не превосходит $2^{\Delta(p)}$, а ультрафильтр q $\mathbf{k}$ -полный, один из этих классов Q' является элементом ультрафильтра q . Положим $P' = P_x$, $x \in Q'$. Тогда $P'Q' \subset R$ и умножение совместно непрерывно в точке (p, q) .

ЛЕММА 4. Пусть G – бесконечная группа, $p, q \in G^*$. Если $\Delta(p) = \aleph_0$ и ультрафильтр p является P -точкой в пространстве G^* , то операция умножения в полугруппе G^* совместно непрерывна в точке (p, q) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольное подмножество $R \in pq$. Подберем подмножества $Q \in q$, $|Q| = \aleph_0$, $P_x \in p$, $x \in Q$, такие, что $\cup\{P_x x : x \in Q\} \subset R$. Так как p – P -точка в пространстве G^* , найдется подмножество $P \in p$ такое, что подмножество $P \setminus P_x$ конечно для любого $x \in Q$. Тогда $P^*x \in R^*$ для всех $x \in Q$. Значит, $P^*Q^* \subset R^*$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – произвольная бесконечная группа. Существует ультрафильтр $p \in G^*$ такой, что отображение ρ_q^* разрывно в точке p для любого не счетно полного ультрафильтра $q \in G^*$. Множество таких точек p плотно в G^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим вначале, что группа G счетна и представим ее в виде объединения возрастающей цепочки конечных подмножеств $G = \cup\{X_n : n < \omega\}$. Зафиксируем произвольное бесконечное подмножество $A \subset G$. Построим индуктивно бесконечное подмножество $Y = \{y_n : n < \omega\} \subset A$ такое, что $y_n X_n \cap y_m X_m = \emptyset$ для всех $n < m$. Определим ультрафильтр $p \in G^*$ так, что $Y \in p$ и p не является P -точкой в G^* . По лемме 1 отображение ρ_q^* разрывно в точке p для любого ультрафильтра $q \in G^*$.

Пусть H – несчетная группа, B – бесконечное подмножество из H . Выберем счетное подмножество $A \subset B$ и обозначим через G подгруппу, порожденную подмножеством A .

Как и выше, представим G в виде объединения возрастающей цепочки конечных подмножеств $G = \bigcup \{X_n : n < \omega\}$; определим подмножество $Y = \{y_n : n < \omega\}$, $Y \subset A$, и ультрафильтр $p \in G^*$.

Разложим группу H на смежные классы по подгруппе G , $H = \bigcup \{Gh_\alpha : \alpha < |H|\}$. Выберем убывающую цепочку подмножеств $Y \supset V_1 \supset \dots \supset V_n \supset \dots$ так, чтобы $V_n \in p$, $n < \omega$, и $\bigcap \{V_n^* : n < \omega\}$ не было окрестностью ультрафильтра p . Положим

$$V = \bigcup \{V_n X_n h_\alpha : n < \omega, \alpha < |H|\}.$$

Возьмем произвольный не счетно полный ультрафильтр $q \in H^*$ и предположим, что отображение ρ_q^* непрерывно в точке p . Повторяя рассуждения из доказательства леммы 1, заключаем, что $Q \subset \bigcup \{X_m h_\alpha : \alpha < |H|\}$ для некоторых $Q \in q$, $m < \omega$. Выберем подмножество $P \in p$ такое, что $P \subset G$ и $Px \cap Py = \emptyset$ для всех различных элементов x, y из конечного подмножества X_m . Так как $Q \subset \bigcup \{X_m h_\alpha : \alpha < |H|\}$, имеем $Px \cap Py = \emptyset$ для всех различных элементов $x, y \in Q$. Доказательство завершается применением леммы 2.

ТЕОРЕМА 2. *Топологический центр $Z(G^*)$ полугруппы G^* пустой для любой группы G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольный ультрафильтр $q \in G^*$. Если кардинал $\Delta(q)$ неизмерим по Уламу, то по теореме 1 $q \notin Z(G^*)$. Предположим, что кардинал $\Delta(q)$ измерим по Уламу. Выберем подгруппу $H \in q$ такую, что $|H| = \Delta(q)$. Представим подгруппу H в виде объединения трансфинитной цепочки подгрупп

$$H = \bigcup \{H_\alpha : \alpha < \Delta(q)\}, \quad |H_\alpha| < \Delta(q), \quad H_\alpha \subset H_\beta, \quad \alpha < \beta < \Delta(q).$$

Следуя статье [1], разобьем множество $\{\alpha : \alpha < \Delta(q)\}$ на четные и нечетные ординалы. Все предельные ординалы объявим четными, а четность ординала $\alpha + n$, где α — предельный ординал, определяется четностью натурального числа n .

Для каждого элемента $g \in H$ положим $\min g = \min \{\alpha : g \in H_\alpha\}$. Разобьем подгруппу H на два подмножества

$$N_0 = \{g \in H : \min g - \text{четный ординал}\}, \quad N_1 = H \setminus N_0.$$

Положим для определенности, что $N_0 \in q$. Выберем ультрафильтр $p \in G^*$ такой, что $N_1 \in p$ и $H_\alpha \notin p$ для всех $\alpha < \Delta(q)$. Ясно, что $pq \in N_1^*$. Допустим, что отображение ρ_q^* непрерывно в точке p . Тогда найдется подмножество $P \subset N_1$ такое, что $P \in p$ и $P^*q \in N_1$. Возьмем произвольное счетное подмножество $R \subset P$ и фиксируем любой ультрафильтр $r \in R^*$. Конфинальность неизмеримого по Уламу кардинала $\Delta(q)$ не-счетна. Отсюда легко следует, что $rq \in N_0^*$. Получили противоречие с тем, что $r \in R^*$, $R^*q \subset N_1^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть мощность $|G|$ неизмерима по Уламу. По теореме 1 множество ультрафильтров $p \in G^*$ таких, что отображение ρ_q^* разрывно в точке p для любого ультрафильтра $q \in G^*$, плотно в G^* . Из леммы 3 следует, что это утверждение неверно, если мощность $|G|$ измерима по Уламу.

ВОПРОС 1. Пусть мощность $|G|$ измерима по Уламу. Существует ли ультрафильтр $p \in G^*$ такой, что отображение ρ_q^* разрывно в точке p для любого ультрафильтра $q \in G^*$?

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть G – произвольная группа, $p \in \beta G$. Если отображение ρ_q непрерывно в точке p для любого ультрафильтра $q \in G^*$, то по теореме 3.5 из [1] $p \in G$. Если группа G счетна и p – P -точка в пространстве G^* , то по лемме 4 отображение ρ_q^* непрерывно в точке p для любого ультрафильтра $q \in G^*$.

ВОПРОС 2. Пусть G – счетная группа, $p \in G^*$ и отображение ρ_q^* непрерывно в точке p для любого ультрафильтра $q \in G^*$. Верно ли, что p – P -точка в пространстве G^* ?

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В связи с теоремой 1 и замечанием 2 возникает следующий вопрос. Пусть свободный ультрафильтр p на счетной группе G не является P -точкой в пространстве G^* . Верно ли, что отображение ρ_q^* разрывно в точке p для любого ультрафильтра $q \in G^*$? При некоторых естественных теоретико-множественных предположениях ответ на этот вопрос отрицательный.

ПРИМЕР. Пусть B – счетная группа экспоненты 2, p – сильно суммируемый ультрафильтр из B^* . По определению [4] для каждого подмножества $P \in p$ найдется подгруппа H такая, что $H \setminus \{e\} \subset P$, $H \in p$, где e – единица группы B . Очевидно, что отображение ρ_p непрерывно в точке p . Поскольку p – идемпотент полугруппы B^* , p не является P -точкой в B^* .

Выберем произвольную подгруппу бесконечного индекса $Y \subset B$ так, что $Y \in p$. По лемме 2 найдется ультрафильтр $q \in B^*$ такой, что отображение ρ_q^* разрывно в точке p .

Этот же пример и теорема 4.2 из [3] показывают, что из непрерывности отображения ρ_p в точке p не следует совместная непрерывность умножения в полугруппе βG в точке (p, p) .

Сильно суммируемые ультрафильтры на группе B можно построить, например, с помощью аксиомы Мартина. В статье [4] доказано, что существование сильно суммируемого ультрафильтра на группе B влечет существование P -точки в пространстве $\mathbb{N}^*$, где $\mathbb{N}$ – дискретное пространство натуральных чисел.

ВОПРОС 3. Предположим, что на некоторой счетной группе найдутся свободные ультрафильтры p, q такие, что отображение ρ_q^* непрерывно в точке p . Следует ли из этого предположения существование P -точки в пространстве $\mathbb{N}^*$?

Автор признателен профессору Дж. Пиму, предоставившему рукопись статьи [1] до ее опубликования.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Lau A., Pym J. The topological centre of a compactification of a locally compact group // Math. Z. 1995. V. 219. P. 567–579.
- [2] Shelah S. Proper Forcing. Lecture Notes in Math. V. 940. Berlin: Springer, 1982.
- [3] Протасов И. В. Точки совместной непрерывности полугруппы ультрафильтров абелевой группы // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 2. С. 131–140.
- [4] Blass A., Hindman N. On strongly summable and union ultrafilters // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. V. 304. № 1. P. 83–99.