Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Свиридюк, Т. Г. Сукачева, О разрешимости нестационарной задачи динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 3, 442–450

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1301>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 17:14:33

УДК 517.952

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

Г. А. Свиридюк, Т. Г. Сукачёва

Исследована локальная разрешимость задачи Коши–Дирихле для системы уравнений

$$\begin{aligned}(1 - \kappa \nabla^2) \mathbf{v}_t &= \nu \nabla^2 \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla p + \mathbf{f}(t), \\ 0 &= -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}),\end{aligned}$$

моделирующей динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости типа Кельвина–Фойгта. Получено описание конфигурационного пространства этой задачи.

Библиография: 14 названий.

Система уравнений Осколкова [1]

$$\begin{aligned}(1 - \kappa \nabla^2) \mathbf{v}_t &= \nu \nabla^2 \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla p + \mathbf{f}(t), \\ 0 &= \nabla \cdot \mathbf{v}\end{aligned}\tag{1}$$

моделирует динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 4$, – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . До сих пор нами [2], [3] рассматривалась задача Коши–Дирихле

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(x, 0) &= \mathbf{v}_0(x), \quad x \in \Omega, \\ \mathbf{v}(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R},\end{aligned}\tag{2}$$

для системы (1) в предположении, что свободный член $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ не зависит от времени, т.е. $f_k = f_k(x)$, $x \in \Omega$, $k = 1, \dots, n$. Такое предположение, во-первых, снижает эвристическую ценность модели, а во-вторых, уступает по общности [4], где задача (1), (2) рассмотрена в случае $f_k = f_k(x, t)$ и $\kappa^{-1} > -\lambda_1$ (λ_1 – наименьшее собственное значение задачи Дирихле для оператора Лапласа в области Ω). С другой стороны, подход, предложенный в [5], позволяет рассмотреть задачу (1), (2) в полной общности, т.е. при нестационарном свободном члене $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, t)$ и любых значениях параметра $\kappa \in \mathbb{R}$, характеризующего упругие свойства жидкости. (Заметим, что отрицательные значения параметра κ подтверждаются экспериментально [6], [7].)

Чтобы избежать вопроса о том, как несжимаемая жидкость может быть упругой, систему (1) рассматривают как предельный (при $\varepsilon \downarrow 0$) случай системы

$$\begin{aligned}(1 - \kappa \nabla^2) \mathbf{v}_t &= \nu \nabla^2 \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla p + \mathbf{f}, \\ \varepsilon p_t &= -\nabla \cdot \mathbf{v},\end{aligned}\tag{3}$$

моделирующей динамику слабосжимаемой вязкоупругой жидкости типа Кельвина–Фойгта. Производя в (3) замену $\mathbf{p} = \nabla p$ и полагая $\varepsilon = 0$, придем к системе

$$\begin{aligned}(1 - \kappa \nabla^2) \mathbf{v}_t &= \nu \nabla^2 \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{p} + \mathbf{f}, \\ 0 &= -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}).\end{aligned}\quad (4)$$

Несмотря на то, что оператор ∇ имеет ядро, натянутое на константу, мы не получим в задаче (4), (2) новых решений по сравнению с задачей (1), (2), благодаря краевому условию (2). Замена $\mathbf{p} = \nabla p$ объясняется тем, что в большинстве гидродинамических задач [8] рассмотрение градиента давления предпочтительнее рассмотрения давления.

Нас будет интересовать локальная однозначная разрешимость задачи (2), (4). Эту задачу удобно рассматривать в рамках теории уравнений типа Соболева. Поэтому сначала мы развиваем некий формализм, изложенный в первой части статьи. Основной результат здесь – существование квазистационарных траекторий [5] полулинейного нестационарного уравнения типа Соболева. Затем задачу (2), (4) рассматриваем в рамках этого формализма.

1. Формальная схема. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства; заданы операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ и $M \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{F}$. Поставим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \quad (5)$$

для полулинейного нестационарного уравнения типа Соболева

$$L\dot{u} = M(u) + f. \quad (6)$$

Линейный оператор $L: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$ называется *бирасщепляющим* [9], если его ядро $\ker L$ и образ $\operatorname{im} L$ дополняемы в пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Пусть оператор L бирасщепляющий; обозначим через $M'_{u_0} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ производную Фреше оператора M в точке $u_0 \in \mathfrak{U}$ и введем в рассмотрение цепочки M'_{u_0} -присоединенных векторов оператора L [10], которые будем выбирать из некоторого дополнения $\operatorname{coim} L = \mathfrak{U} \ominus \ker L$ к ядру $\ker L$. Введем в рассмотрение условие:

A1) независимо от выбора $\operatorname{coim} L$ цепочка M'_{u_0} -присоединенных векторов любого вектора $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$ содержит точно p элементов.

Обозначим через $\tilde{L}$ сужение оператора L на $\operatorname{coim} L$. В силу теоремы Банаха о замкнутом графике оператор $\tilde{L}: \operatorname{coim} L \rightarrow \operatorname{im} L$ – топологический изоморфизм. Положим $\mathfrak{U}_0^0 = \ker L$ и построим множества $\mathfrak{U}_q^0 = \tilde{A}^q[\mathfrak{U}_0^0]$, $q = 1, \dots, p$, где $\tilde{A} = \tilde{L}^{-1}M'_{u_0}$. Очевидно, множества $\mathfrak{U}_q^0 \subset \operatorname{coim} L$ являются линейными пространствами. Следовательно, образ $\mathfrak{F}_p^0 = M'_{u_0}[\mathfrak{U}_p^0]$ также является линейным пространством, причем $\mathfrak{F}_p^0 \cap \operatorname{im} L = \{0\}$ (если выполнено условие A1)). Введем в рассмотрение еще одно условие:

A2) $\mathfrak{F}_p^0 \oplus \operatorname{im} L = \mathfrak{F}$.

Обозначим через $Q_p: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}_p^0$ проектор вдоль $\operatorname{im} L$ и построим оператор $A = \tilde{L}^{-1} \times (I - Q_p)M'_{u_0}$. Заметим, что $A[\mathfrak{U}_q^0] = \mathfrak{U}_{q+1}^0$, $q = 0, 1, \dots, p-1$, $A[\mathfrak{U}_p^0] = \{0\}$. Отсюда следует, что

$$A^q[\mathfrak{U}_r^0] = \begin{cases} \{0\}, & q+r > p, \\ \mathfrak{U}_{q+r}^0, & q+r \leq p. \end{cases} \quad (7)$$

Построим оператор D , равный сужению оператора $Q_p M'_{u_0} A^p: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}_p^0$ на $\mathfrak{U}_0^0$. По построению $D[\mathfrak{U}_0^0] = \mathfrak{F}_p^0$ и $D \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}_0^0; \mathfrak{F}_p^0)$. Кроме того, $\ker D = \{0\}$, ибо в противном случае вектор $\varphi \in \ker D \setminus \{0\} \subset \ker L \setminus \{0\}$ имел бы бесконечную цепочку $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p, 0, \dots\}$ M'_{u_0} -присоединенных векторов. В силу упоминавшейся теоремы Банаха оператор $D: \mathfrak{U}_0^0 \rightarrow \mathfrak{F}_p^0$ – топологический изоморфизм.

Обозначим через $P_0: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}_0^0$ проектор вдоль $\text{coim } L$ и построим операторы $P_q = A^q D^{-1} Q_p M'_{u_0} A^{p-q}$, $q = 1, \dots, p$. Операторы $P_q: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{U}_q^0$ – проекторы. Действительно, $\text{im } P_q = \mathfrak{U}_q^0$, $P_q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и

$$P_q^2 = A^q (D^{-1} (Q_p M'_{u_0} A^p)) D^{-1} Q_p M'_{u_0} A^{p-q} = P_q$$

по определению оператора D . Кроме того, в силу (7) и определения проектора P_0

$$P_q P_r = P_r P_q = 0, \quad q, r = 0, 1, \dots, p, \quad q \neq r.$$

Положим

$$\mathfrak{U}^0 = \bigoplus_{q=0}^p \mathfrak{U}_q^0, \quad P = \sum_{q=0}^p P_q.$$

Оператор $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ – проектор, $\text{im } P_0 = \mathfrak{U}^0$. Положим $\mathfrak{U}^1 = \ker P$. Тогда $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$.

Введем в рассмотрение линейалы $\mathfrak{F}_q^0 = M'_{u_0} [\mathfrak{U}_q^0]$, $q = 0, 1, \dots, p-1$, и построим оператор $B = M'_{u_0} \tilde{L}^{-1} (I - Q_p)$. Поскольку $B[\mathfrak{F}_q^0] = \mathfrak{F}_{q+1}^0$, $q = 0, 1, \dots, p-1$, $B[\mathfrak{F}_p^0] = \{0\}$, выполнено

$$B^q [\mathfrak{F}_r^0] = \begin{cases} \{0\}, & q + r > p, \\ \mathfrak{F}_{q+r}^0, & q + r \leq p. \end{cases} \quad (8)$$

Из (8) аналогично сказанному выше следует, что операторы $Q_q = B^q M'_{u_0} D^{-1} Q_p B^{p-q}$, $q = 0, 1, \dots, p-1$, являются проекторами на $\mathfrak{F}_q^0$, причем

$$Q_q Q_r = Q_r Q_q = 0, \quad q, r = 0, 1, \dots, p, \quad q \neq r.$$

Положим

$$\mathfrak{F}^0 = \bigoplus_{q=0}^p \mathfrak{F}_q^0, \quad Q = \sum_{q=0}^p Q_q.$$

Оператор $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ – проектор, поэтому $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$, где $\mathfrak{F}^0 = \text{im } Q$, $\mathfrak{F}^1 = \ker Q$.

Заметим, что по построению

$$L A^q D^{-1} Q_p = B^{q-1} M'_{u_0} D^{-1} Q_p, \quad q = 1, \dots, p. \quad (9)$$

Кроме того,

$$BL = M'_{u_0} (I - P_0). \quad (10)$$

Из (9), (10) при $q = 1, \dots, p$ получаем

$$\begin{aligned} LP_q &= LP_q (I - P_0) = L A^q D^{-1} Q_p M'_{u_0} A^{p-q} (I - P_0) \\ &= B^{q-1} M'_{u_0} D^{-1} Q_p B^{p-q} M'_{u_0} (I - P_0) = Q_{q-1} L. \end{aligned} \quad (11)$$

Перепишем уравнение (7) в виде

$$L\dot{u} = M'_{u_0} u + F(u) + f, \quad (12)$$

Тогда существует единственное решение задачи (5), (6), являющееся квазистационарной траекторией, причем $u(t) \in \mathfrak{B}^t$ при любом $t \in (-t_0, t_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что решение задачи (5), (6) найдено. Тогда в силу условий A3), A4) из (13) следует, что $L\dot{u}^0 \equiv 0$, т.е. решение является квазистационарной траекторией. Установим существование и единственность решения.

В силу леммы 1 и условий A3), A4) система (13) в окрестности $\mathfrak{D}_{u_0}$ редуцируется к виду

$$\begin{aligned} 0 &= M'_{u_0} u_0^0 + F_0(u) + f_0^0, \\ L\dot{u}^1 &= (I - Q)M(u) + f^1. \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что по построению оператор $M'_{u_0}: \mathfrak{U}_0^0 \rightarrow \mathfrak{F}_0^0$ невырожден, и

$$F'_{0u}|_{u=u_0} \equiv 0,$$

где через F'_{0u} обозначена производная Фреше оператора F_0 в точке u . Отсюда в силу теоремы о неявной функции существует окрестность $\mathfrak{D}_{u_0}^1 \subset (I - P)[\mathfrak{D}_{u_0}]$ и вектор-функция $\delta \in C^\infty(\mathfrak{D}_{u_0}^1 \times \mathbb{R}; \mathfrak{D}_{u_0}^0)$, где $\mathfrak{D}_{u_0}^0 = P[\mathfrak{D}_{u_0}]$, такие, что

$$u(t) = u_0^0(t) + \sum_{q=1}^p u_q^0 + u^1 \in \mathfrak{B}^t \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Здесь $u_0^0(t) = \delta(u^1, t)$ при любом $u^1 \in \mathfrak{D}_{u_0}^1$, а $u_q^0 = P_q u_0 = \text{const}$ при $q = 1, \dots, p$.

Далее, из (11) следует, что $QL = LP$. Это значит, что оператор $L: \mathfrak{U}^1 \rightarrow \mathfrak{F}^1$. Обозначим через L_1 сужение оператора L на $\mathfrak{U}^1$. Оператор $L_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$ инъективен по построению. Установим его сюръективность. Пусть $f^1 \in \mathfrak{F}^1$. Тогда существует $\tilde{u} = \tilde{L}^{-1} f^1 \in \text{coim } L$. Предположим, что $P\tilde{u} \neq 0$, т.е.

$$P\tilde{u} = \sum_{q=1}^p P_q \tilde{u} = \sum_{q=1}^p \tilde{u}_q^0 \neq 0.$$

Тогда

$$L\tilde{u} = LP\tilde{u} + L(I - P)\tilde{u} = \sum_{q=1}^p L\tilde{u}_q^0 + L_1(I - P)\tilde{u} = f^1 \notin \mathfrak{F}^1.$$

Противоречие. Итак, оператор $L_1: \mathfrak{U}^1 \rightarrow \mathfrak{F}^1$ непрерывно биективен, причем L^{-1} есть сужение оператора $\tilde{L}^{-1}$ на $\mathfrak{F}^1$.

Из всего сказанного следует, что система (14) на $\mathfrak{D}_{u_0}^1$ может быть редуцирована к виду

$$\dot{u}^1 = L^{-1}(I - Q)M(\delta(u^1, t) + (P - P_0)u_0 + u^1) + g(t) \equiv \Phi(u^1, t), \quad (15)$$

где $\Phi \in C^\infty(\mathfrak{D}_{u_0}^1 \times \mathbb{R}; \mathfrak{U}^1)$, а $g(t) = L^{-1} f^1(t)$. Однозначная локальная разрешимость задачи Коши $u^1(0) = (I - P)u_0$ для уравнения (15) – классический результат [12]. Искомая квазистационарная траектория имеет вид $u(t) = \delta(u^1(t), t) + u^1(t)$, где $u^1 \in C^\infty(-t_0, t_0; \mathfrak{D}_{u_0}^1)$ – решение задачи Коши для уравнения (15).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Анализ доказательства теоремы 1 показывает, что в качестве начального значения можно брать не только точку u_0 , но и любую из некоторой ее окрестности в $\mathfrak{B}^0$. Это означает, что множество $\mathfrak{B}^t$ является (локально) конфигурационным пространством.

2. Интерпретация формальной схемы. Следуя [5], редуцируем задачу (2), (4) к задаче (5), (6). Для этого положим

$$\mathfrak{U} = \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \mathbf{H}_p, \quad \mathfrak{F} = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \mathbf{H}_p, \quad (16)$$

где $\mathbf{H}_\sigma$ – замыкание в норме $L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^n$ линейала соленоидальных векторов $\{\mathbf{v} \in (C_0^\infty(\Omega))^n : \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\}$, $\mathbf{H}_\pi = \mathbf{H}_\sigma^1$, $\mathbf{H}_p = \mathbf{H}_\pi$. Обозначим через $\Sigma: L^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_\sigma$ ортопроектор. Тогда $\Sigma \in \mathcal{L}((W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega))^n)$. Положим $\text{im } \Sigma = \mathbf{H}_\sigma^2$, $\ker \Sigma = \mathbf{H}_\pi^2$. Операторы $L, M: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$ определим формулами

$$L := \begin{pmatrix} \Sigma A_{\varkappa} \Sigma & \Sigma A_{\varkappa} \Pi & \mathbf{0} \\ \Pi A_{\varkappa} \Sigma & \Pi A_{\varkappa} \Pi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где $\Pi = I - \Sigma$, $A_{\varkappa} = 1 - \varkappa \nabla^2$;

$$M(u) := \begin{pmatrix} \Sigma B(u_\sigma + u_\pi) \\ \Pi B(u_\sigma + u_\pi) - u_p \\ C(u_\sigma + u_\pi) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где $B(u_\sigma + u_\pi) := \nu \nabla^2(u_\sigma + u_\pi) - ((u_\sigma + u_\pi) \cdot \nabla)(u_\sigma + u_\pi)$, $C(u_\sigma + u_\pi) := -\nabla(\nabla \cdot (u_\sigma + u_\pi))$, $u = (u_\sigma, u_\pi, u_p)$.

ЛЕММА 2. Пусть пространства $\mathfrak{U}, \mathfrak{F}$ определены формулами (16), причем $n = 2, 3, 4$, а операторы $L, M: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$ формулами (17), (18). Тогда

- 1) оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, причем если $\varkappa^{-1} \notin \sigma(-\nabla^2)$, то $\ker L = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{H}_p$, $\text{im } L = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \{0\}$;
- 2) оператор $M \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) леммы 2 очевидно, а утверждение 2) проверяется непосредственно. Укажем лишь, что

$$M'_u = \begin{pmatrix} \Sigma B_\sigma & \Sigma B_\pi & \mathbf{0} \\ \Pi B_\sigma & \Pi B_\pi & -I \\ \mathbf{0} & C & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где B_σ (B_π) – частная производная Фреше оператора B в точке $u_\sigma + u_\pi$ по u_σ (u_π).

Положим $f = (f_\sigma, f_\pi, 0)$ и, тем самым, закончим редукцию задачи (2), (4) к задаче (5), (6). Далее проверим условия А1)–А4). Чтобы проверить выполнение А1), обозначим через $A_{\varkappa\sigma}$ сужение оператора $\Sigma A_{\varkappa} \Sigma$ на $\mathbf{H}_\sigma^2$.

ЛЕММА 3. Пусть выполнены условия леммы 2, причем $\ker A_{\varkappa\sigma} = \{0\}$. Тогда каждый вектор $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$ имеет точно один M'_u -присоединенный вектор независимо от точки $u \in \mathfrak{U}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вектор $\varphi \in (0, 0, \varphi_p) \in \ker L$, $\varphi_p \notin 0$. Найдем вектор $\psi \in \mathfrak{U}$ такой, что $L\psi = M'_u \varphi$. Из (17), (19) имеем

$$A_{\mathcal{X}\sigma} \psi_\sigma + \Sigma A_{\mathcal{X}} \psi_\pi = 0, \quad \Pi A_{\mathcal{X}} \psi_\sigma + \Pi A_{\mathcal{X}} \psi_\pi = -\varphi_p. \quad (20)$$

В силу теоремы Солонникова–Воровича–Юдовича (см. [3]) существует оператор $A_{\mathcal{X}\sigma}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_\sigma, \mathbf{H}_\sigma^2)$. Поэтому из (20) получаем $\psi_\sigma = -A_{\mathcal{X}\sigma} \Sigma A_{\mathcal{X}} \psi_\pi$. Значит, если $\psi_\pi = 0$, то $\psi_\sigma = 0$ и $\varphi_p = 0$. Итак, $\psi_\pi \neq 0$.

Пусть

$$\tilde{L}^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma A_{\mathcal{X}}^{-1} \Sigma & \Sigma A_{\mathcal{X}}^{-1} \Pi & 0 \\ \Pi A_{\mathcal{X}}^{-1} \Sigma & \Pi A_{\mathcal{X}}^{-1} \Pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Поскольку

$$\tilde{L}^{-1} L = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & \Pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}), \quad L \tilde{L}^{-1} = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & \Pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}),$$

то $\psi_\sigma = -\Sigma A_{\mathcal{X}}^{-1} \varphi_p$, $\psi_\pi = -\Pi A_{\mathcal{X}}^{-1} \varphi_p$, а компонента ψ_p вектора ψ произвольна.

Далее,

$$M'_u \psi = \begin{pmatrix} \Sigma(B_\sigma \psi_\sigma + B_\pi \psi_\pi) \\ \Pi(B_\sigma \psi_\sigma + B_\pi \psi_\pi) - \varphi_p \\ C \psi_\pi \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\psi_\pi \neq 0$, то $C \psi_\pi \neq 0$ [13]. Отсюда $M'_u \psi \notin \operatorname{im} L$ независимо от $u \in \mathfrak{U}$.

Итак, условие A1) выполняется, причем $p = 1$. Приступим к проверке A2). Обозначим через $A_{\mathcal{X}\pi}$ сужение оператора $\Pi A_{\mathcal{X}}^{-1} \Pi$ на $\mathbf{H}_\pi$.

ЛЕММА 4. В условиях леммы 3 оператор $A_{\mathcal{X}\pi}: \mathbf{H}_\pi \rightarrow \mathbf{H}_\pi^2$ – топ-линейный изоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению оператор $A_{\mathcal{X}\pi} \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_\pi, \mathbf{H}_\pi^2)$. Установим его биективность. Пусть $f_\pi \in \ker A_{\mathcal{X}\pi}$. Тогда $A_{\mathcal{X}}^{-1} f_\pi = u_\sigma \in \mathbf{H}_\sigma^2$, т.е. $f_\pi = A_{\mathcal{X}\sigma} u_\sigma$. Отсюда $A_{\mathcal{X}\sigma} u_\sigma = 0$; значит, $u_\sigma = 0$, поэтому $f_\pi = 0$. Итак, оператор $A_{\mathcal{X}\pi}$ инъективен.

Теперь установим его сюръективность. Пусть $u_\pi \in \mathbf{H}_\pi^2$. Положим $u_\sigma = -A_{\mathcal{X}\sigma}^{-1} \Sigma A_{\mathcal{X}} u_\pi \in \mathbf{H}_\sigma^2$. Тогда

$$\Sigma A_{\mathcal{X}} u_\sigma + \Sigma A_{\mathcal{X}} u_\pi = 0, \quad \Pi A_{\mathcal{X}} u_\sigma + \Pi A_{\mathcal{X}} u_\pi = f_\pi.$$

Отсюда $A_{\mathcal{X}}(u_\sigma + u_\pi) = f_\pi$, т.е. $u_\sigma + u_\pi = A^{-1} f_\pi$, $u_\pi = A_{\mathcal{X}\pi} f_\pi$. Доказательство завершено.

В силу леммы 2 оператор L из (17) бирашщепляющий. Положим $\mathfrak{U}_0^0 = \ker L$, $\operatorname{coim} L = \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \{0\}$. Построим линейалы

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_0^0 &= M'_{u_0}[\mathfrak{U}_0^0] = \{0\} \times \mathbf{H}_p \times \{0\} = \{0\} \times \mathbf{H}_\pi \times \{0\} \subset \operatorname{im} L, \\ \mathfrak{U}_1^0 &= \tilde{L}^{-1}[\mathfrak{F}_0^0] = \Sigma A_{\mathcal{X}}^{-1}[\mathbf{H}_p] \times A_{\mathcal{X}\pi}[\mathbf{H}_p] \times \{0\} = \Sigma A_{\mathcal{X}}^{-1} A_{\mathcal{X}\pi}^{-1}[\mathbf{H}_\pi^2] \times \mathbf{H}_\pi^2 \times \{0\}. \end{aligned}$$

В силу леммы 4

$$\mathfrak{F}_1^0 = M'_{u_0}[\mathfrak{U}_1^0] = \Sigma B_0 A_{\mathcal{X}}^{-1}[\mathbf{H}_p] \times \Pi B_0 A_{\mathcal{X}}^{-1}[\mathbf{H}_p] \times C A_{\mathcal{X}}^{-1}[\mathbf{H}_p].$$

Пусть $\tilde{C}$ – сужение оператора C на $\mathbf{H}_\pi^2$. Поскольку существует оператор $\tilde{C}^{-1}$ [13], в силу леммы 4

$$\mathfrak{F}_1^0 = \Sigma B_0 A_{\mathcal{X}}^{-1} A_{\mathcal{X}\pi}^{-1} \tilde{C}^{-1} [\mathbf{H}_p] \times \Pi B_0 A_{\mathcal{X}}^{-1} A_{\mathcal{X}\pi}^{-1} \tilde{C}^{-1} [\mathbf{H}_p] \times \mathbf{H}_p.$$

Здесь и выше B_0 – производная Фреше оператора B в точке $u_\sigma^0 + u_\pi^0$, а оператор $\tilde{L}^{-1}$ определен в (21).

Построим операторы

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Pi \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & P_1^{12} & 0 \\ 0 & \Pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где $P_1^{12} = \Sigma A_{\mathcal{X}}^{-1} A_{\mathcal{X}\pi}^{-1} \Pi$;

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ Q_0^{21} & \Pi & Q_0^{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & Q_1^{13} \\ 0 & 0 & Q_1^{23} \\ 0 & 0 & \Pi \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где $Q_1^{13} = \Sigma B_0 A_{\mathcal{X}}^{-1} A_{\mathcal{X}\pi}^{-1} \tilde{C}^{-1} \Pi$, $Q_1^{23} = \Pi B_0 A_{\mathcal{X}}^{-1} A_{\mathcal{X}\pi}^{-1} \tilde{C}^{-1} \Pi$, $Q_0^{21} = -\Pi A_{\mathcal{X}} A_{\mathcal{X}\sigma}^{-1} \Sigma$, $Q_0^{23} = -Q_0^{21} Q_1^{13} - Q_1^{23}$. Нетрудно заметить, что операторы $P_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$, $k = 0, 1$, – проекторы, построенные в (22), (23), причем $\text{im } P_k = \mathfrak{U}_k^0$, $\text{im } Q_k = \mathfrak{F}_k^0$, $k = 0, 1$, и $P_0 P_1 = P_1 P_0 = 0$, $Q_0 Q_1 = Q_1 Q_0 = 0$. Поскольку $\ker Q_1 = \text{im}(I - Q_1) = \text{im } L$, то $\mathfrak{F}_1^0 \oplus \text{im } L = \mathfrak{F}$, т.е. условие A2) выполнено.

Условие A3) выполняется, поскольку $Q_1 f = Q_1(f_\sigma, f_\pi, 0) = (0, 0, 0)$.

Для проверки условия A4) построим множество $\mathfrak{U} = \{u \in \mathfrak{U} : P_1 u = \text{const}\} = \{u \in \mathfrak{U} : u_\pi = \text{const}\}$. В нашем случае условие A4) состоит из единственного равенства

$$Q_1 M(u) = \begin{pmatrix} Q_1^{13} C(u_\sigma + u_\pi) \\ Q_1^{23} C(u_\sigma + u_\pi) \\ C(u_\sigma + u_\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которое выполняется тождественно [13], если $u_\pi = 0$. Итак, если положить $\tilde{\mathfrak{U}} = \{u \in \mathfrak{U} : u_\pi = 0\}$, то A4) выполняется.

Построим множество $\mathfrak{B}^t$. Согласно теореме 1

$$\mathfrak{B}^t = \{(u, t) \in \tilde{\mathfrak{U}} \times \mathbb{R} : Q_0(M(u) + f(t)) = 0\}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} Q_0 \left(M \begin{pmatrix} u_\sigma \\ 0 \\ u_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_\sigma(t) \\ f_\pi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \iff (Q_0^{21} \Sigma + \Pi) B(u_\sigma) - u_p + Q_1^{21} f_\sigma(t) + f_\pi(t) &= 0 \end{aligned}$$

и

$$Q_0^{21} \Sigma + \Pi = A_{\mathcal{X}\pi}^{-1} \Pi A_{\mathcal{X}}^{-1} \Sigma + A_{\mathcal{X}\pi}^{-1} \Pi A_{\mathcal{X}}^{-1} \Pi = A_{\mathcal{X}\pi}^{-1} \Pi A_{\mathcal{X}}^{-1}, \quad (24)$$

имеет место

$$\mathfrak{B}^t = \{(u, t) \in \mathfrak{U} \times \mathbb{R} : A_{\pi}^{-1} P A_{\pi}^{-1} (B(u_{\sigma}) + f_{\sigma}(t)) + f_{\pi}(t) = u_p, u_{\pi} = 0\}. \quad (25)$$

Для доказательства (24) заметим, что

$$P A_{\pi}^{-1} A_{\pi\sigma} \Sigma + P A_{\pi}^{-1} P A_{\pi} \Sigma = P A_{\pi}^{-1} (\Sigma A_{\pi} + P A_{\pi}) \Sigma = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} P A_{\pi}^{-1} A_{\pi\sigma} \Sigma &= -A_{\pi\pi} P A_{\pi} \Sigma, & A_{\pi\pi}^{-1} P A_{\pi}^{-1} A_{\pi\sigma} \Sigma &= -P A_{\pi} \Sigma, \\ A_{\pi\pi}^{-1} P A_{\pi}^{-1} \Sigma &= -P A_{\pi} A_{\pi\sigma}^{-1} \Sigma = Q_0^{21} \Sigma. \end{aligned}$$

Доказана

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия леммы 3. Пусть $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$, $a(v_0, 0) \in \mathfrak{B}^0$ (25). Тогда для некоторого $t_0 = t_0(v_0)$ существует единственное решение (v, p) задачи (2), (4) такое, что $v \in C^{\infty}((-t_0, t_0); \mathbf{H}_{\sigma}^2)$, $v_{\pi} = 0$, а $p = A_{\pi\pi}^{-1} P A_{\pi}^{-1} (B(v_{\sigma}) + f_{\sigma}(t)) + f_{\pi}(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Изложенный здесь формализм задачи (2), (4) отличается от формализма, рассмотренного в работах [2], [3], [14].

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если не заниматься построением множества $\mathfrak{B}^t$, то теорема 2 может быть доказана проще [6], [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Осколков А. П. Начально-краевые задачи для уравнения движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. МИАН. 1988. Т. 179. С. 126–164.
- [2] Свиридюк Г. А., Сукачёва Т. Г. Фазовые пространства одного класса операторных уравнений // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 2. С. 250–258.
- [3] Свиридюк Г. А., Сукачёва Т. Г. Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева // Сиб. матем. ж. 1990. Т. 31. № 5. С. 109–119.
- [4] Осколков А. П. К теории жидкостей Фойгта // Записки науч. семин. ЛОМИ. 1980. Т. 96. С. 233–236.
- [5] Свиридюк Г. А. Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно ограниченными операторами // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 4. С. 828–831.
- [6] Свиридюк Г. А. Об одной модели динамики несжимаемой вязко-упругой жидкости // Изв. вузов. Матем. 1988. № 1. С. 74–79.
- [7] Свиридюк Г. А. О многообразии решений одной задачи несжимаемой вязкоупругой жидкости // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 10. С. 1846–1848.
- [8] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. 3-е изд. М.: Наука, 1986.
- [9] Борисович Ю. Г., Звягин В. Г., Сапронов Ю. И. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере–Шаудера // УМН. 1977. Т. 32. № 4. С. 3–54.
- [10] Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
- [11] Levine H. A. Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equation of the form $Pu_t = -Au + F(u)$ // Arch. Rational Mech. Anal. 1973. V. 51. № 5. P. 371–386.
- [12] Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. М.: Мир, 1967.
- [13] Капитанский Л. В., Пилецкас К. Н. О некоторых задачах векторного анализа // Записки науч. семин. ЛОМИ. 1984. Т. 138. С. 65–85.
- [14] Осколков А. П. Нелокальные проблемы для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С. Л. Соболева // Записки науч. семин. ЛОМИ. 1991. Т. 198. С. 31–48.