Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Ухалов, Почти периодические решения систем дифференциальных уравнений с быстрым и медленным временем в случае вырождения, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 3, 451–456

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1302>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 13:06:24

УДК 517.927

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЫСТРЫМ И МЕДЛЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ В СЛУЧАЕ ВЫРОЖДЕНИЯ

А. Ю. Ухалов

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Правые части системы пропорциональны малому параметру, почти периодически зависят от быстрого времени и периодически от медленного времени. Этой системе сопоставляется усредненная по быстрому времени система. Предполагается, что усредненная система имеет негрубое периодическое решение. Доказывается теорема существования и устойчивости почти периодических решений исходной системы.

Библиография: 6 названий.

1. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, \tau, x, \varepsilon), \quad \tau = \varepsilon t, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*)$ – малый параметр, $X(t, \tau, x, \varepsilon)$ – вектор-функция, почти периодическая по t равномерно относительно остальных аргументов, периодическая по τ с периодом ω и достаточно гладкая по τ , x и ε .

Будем обозначать через $B(\mathbb{R}^n)$ банахово пространство почти периодических функций со значениями в $\mathbb{R}^n$, через $|x|$ – евклидову норму в $\mathbb{R}^n$ и через $\|x(t)\|$ – норму в $B(\mathbb{R}^n)$. Шар $\|x - a\| \leq r$ пространства $B(\mathbb{R}^n)$ с центром в a радиуса r обозначим $U(a, r)$. В дальнейшем вместо “почти периодическая функция” будем писать “п.п.-функция”.

Системе (1) сопоставим усредненную систему

$$\frac{dy}{d\tau} = Y_1(\tau, y), \quad \tau = \varepsilon t, \quad (2)$$

где

$$Y_1(\tau, y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, \tau, y, 0) dt.$$

Пусть система (2) имеет ω -периодическое решение $y_0(\tau)$. Известно (см. [1]), что если линейная периодическая система

$$\frac{dy}{d\tau} = A(\tau)y, \quad \text{где } A(\tau) = Y'_{1y}(\tau, y_0(\tau)), \quad (3)$$

не имеет характеристических показателей с нулевой вещественной частью, то система (1) при достаточно малых ε имеет единственное в шаре $U(y_0(\varepsilon t), b(\varepsilon))$ п.п.-решение $x(t, \varepsilon)$, причем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|x(t, \varepsilon) - y_0(\varepsilon t)\| = 0.$$

Решение $x(t, \varepsilon)$ экспоненциально устойчиво, если все характеристические показатели системы (3) имеют отрицательные вещественные части, и неустойчиво в противном случае.

В настоящей работе исследуется вопрос о существовании п.п.-решения, близкого к $y_0(\tau)$ при малых ε , в случае, когда система (3) имеет характеристические показатели с нулевой вещественной частью. В частном случае, когда система (3) имеет один простой мультипликатор, равный по модулю 1, эта задача изучалась в работе [2]. В [2] дополнительно предполагалось, что $y_0(\tau) \equiv 0$ и что система (1) имеет нулевое решение, т.е. рассматривалась задача о бифуркации малых п.п.-решений из состояния равновесия.

2. Предположим, что система (1) с помощью замены

$$x = y + \sum_{k=1}^m \varepsilon^k u_k(t, \tau, y), \quad (4)$$

где $u_k(t, \tau, y)$ – почти периодические по t и ω -периодические по τ функции, может быть преобразована к виду

$$\frac{dy}{d\tau} = \sum_{k=1}^m \varepsilon^{k-1} Y_k(\tau, y) + \varepsilon^m F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \tau, y, \varepsilon\right), \quad \tau = \varepsilon t. \quad (5)$$

Здесь $Y_k(\tau, y)$ – ω -периодические по τ вектор-функции, достаточно гладкие по τ и y , $F(s, \tau, y, \varepsilon)$ – вектор-функция, почти периодическая по s равномерно относительно остальных переменных, ω -периодическая по τ и достаточно гладкая по y и ε .

Запишем систему (1) в виде

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{k=1}^m \varepsilon^k X_k(t, \tau, x) + \varepsilon^{m+1} G(t, \tau, x, \varepsilon). \quad (6)$$

Сделав в (6) замену (4) и приравняв слагаемые при одинаковых степенях ε , получим для определения $Y_k(\tau, y)$ и $u_k(t, \tau, y)$ следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = \Omega_k(t, \tau, y) - Y_k(\tau, y), \quad k = 1, \dots, m. \quad (7)$$

Здесь $\Omega_1(t, \tau, y) = X_1(t, \tau, y)$, а функции $\Omega_i(t, \tau, y)$ ($i = 2, \dots, m$) выражаются через правые части системы (6) и функции $u_1(t, \tau, y), \dots, u_{i-1}(t, \tau, y)$, $Y_1(\tau, y), \dots, Y_{i-1}(\tau, y)$. Например,

$$\Omega_2(t, \tau, y) = X_2(t, \tau, y) + X_1'_x(t, \tau, y)u_1(t, \tau, y) - u_1'_\tau(t, \tau, y) - u_1'_y(t, \tau, y)Y_1(\tau, y).$$

В уравнениях (7) τ и y являются параметрами, а не функциями t . Коэффициенты замены $u_i(t, \tau, y)$ ($i = 1, \dots, m$) могут быть найдены последовательно, начиная с $u_1(t, \tau, y)$, непосредственным интегрированием. Необходимым условием почти периодичности

$u_i(t, \tau, y)$ по t является равенство нулю среднего значения по t правой части i -го уравнения (7). Из этого условия определяется $Y_i(\tau, y)$: нужно положить

$$Y_i(\tau, y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Omega_i(t, \tau, y) dt. \quad (8)$$

После этого находится $u_i(t, \tau, y)$ как решение i -го уравнения (7) с нулевым средним значением по t .

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие (8) является необходимым, но не достаточным, для того чтобы интеграл от правой части (7) являлся п.п.-функцией по t (см. [3, гл. 1, § 2]). Мы будем предполагать, что функции $\Omega_i(t, \tau, y)$ в (7) такие, что $u_i(t, \tau, y)$ – п.п.-функции по переменной t . (Так будет, в частности, если $X_i(t, \tau, y)$ ($i = 1, \dots, m$) в (6) являются тригонометрическими многочленами по t .)

3. Пусть система m -го приближения

$$\frac{dy}{d\tau} = \sum_{k=1}^m \varepsilon^{k-1} Y_k(\tau, y), \quad \tau = \varepsilon t, \quad (9)$$

при достаточно малых ε имеет ω -периодическое решение $y_0(\tau, \varepsilon)$, причем $y_0(\tau, 0) = y_0(\tau)$. (Здесь $y_0(\tau)$ – ω -периодическое решение системы первого приближения (2).) Рассмотрим линеаризованную на $y_0(\tau, \varepsilon)$ систему (9)

$$\frac{dy}{d\tau} = A(\tau, \varepsilon)y, \quad \text{где } A(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=1}^m \varepsilon^{k-1} Y_{k,y}'(\tau, y_0(\tau, \varepsilon)). \quad (10)$$

В дальнейшем нам потребуется

ЛЕММА. Пусть система (10) при достаточно малых ненулевых ε не имеет характеристических показателей с нулевой вещественной частью. Тогда дифференциальный оператор

$$K(\varepsilon)y = \frac{dy}{d\tau} - A(\tau, \varepsilon)y$$

имеет при достаточно малых ε обратный оператор $K^{-1}(\varepsilon)$, определенный на пространстве почти периодических функций, и

$$\|K^{-1}(\varepsilon)\| \leq \frac{M}{\varepsilon^\alpha}, \quad M, \alpha > 0. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{d\tau} = A(\tau, \varepsilon)y + f(\tau), \quad (12)$$

где $f(\tau)$ – произвольная почти периодическая функция. Матрица $A(\tau, \varepsilon)$ – ω -периодическая по τ ; следовательно (см. [4, гл. 4]), существует линейная замена $y = P(\tau, \varepsilon)z$, приводящая (12) к виду

$$\frac{dz}{d\tau} = R(\varepsilon)z + P^{-1}(\tau, \varepsilon)f(\tau),$$

где $R(\varepsilon)$ – не зависящая от τ матрица, не имеющая при малых $\varepsilon \neq 0$ собственных значений с нулевой вещественной частью. При этом матрица $R(0)$ имеет собственные значения с нулевой вещественной частью. Матрица $P(\tau, \varepsilon)$ – вещественная, невырожденная, достаточно гладкая по ε , периодическая по τ с периодом T (T – целое, кратное ω) и $\|P(\tau, \varepsilon)\|, \|P^{-1}(\tau, \varepsilon)\| \leq C$, $C = \text{const}$. Как известно, при этих условиях оператор

$$L(\varepsilon)z = \frac{dz}{d\tau} - R(\varepsilon)z$$

обратим в пространстве почти периодических функций при достаточно малых ε и

$$\|L^{-1}(\varepsilon)\| \leq \frac{M_1}{\varepsilon^\alpha}, \quad M_1, \alpha > 0$$

(см. [5]). Следовательно, уравнение (12) имеет при достаточно малых ε единственное почти периодическое решение

$$y^*(\tau, \varepsilon) = P(\tau, \varepsilon)L^{-1}(\varepsilon)P^{-1}(\tau, \varepsilon)f(\tau),$$

причем

$$\|y^*(\tau, \varepsilon)\| \leq \frac{C^2 M_1}{\varepsilon^\alpha} \|f(\tau)\|,$$

т.е. существует оценка вида (11). Лемма доказана.

Систему (5) запишем в виде

$$\frac{dy}{d\tau} = A(\tau, \varepsilon)y + (H(\tau, y, \varepsilon) - A(\tau, \varepsilon)y) + \varepsilon^m F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \tau, y, \varepsilon\right), \quad (13)$$

где

$$H(\tau, y, \varepsilon) = \sum_{k=1}^m \varepsilon^{k-1} Y_k(\tau, y), \quad A(\tau, \varepsilon) = H'_y(\tau, y_0(\tau, \varepsilon), \varepsilon).$$

ТЕОРЕМА. Пусть

- 1) при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ все характеристические показатели системы (10) имеют ненулевые вещественные части и выполняется неравенство (11) с некоторыми константами $M, \alpha > 0$;
- 2) при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ для некоторого шара $U(y_0(\varepsilon t, \varepsilon), r(\varepsilon))$ пространства $B(\mathbb{R}^n)$ при $y_1(t), y_2(t) \in U(y_0(\varepsilon t, \varepsilon), r(\varepsilon))$ выполняются неравенства

$$\|H(\varepsilon t, y_1(t), \varepsilon) - H(\varepsilon t, y_2(t), \varepsilon) - A(\varepsilon t, \varepsilon)(y_1(t) - y_2(t))\| \leq r(\varepsilon)\|y_1(t) - y_2(t)\|,$$

$$\text{где } r(\varepsilon) = c_0 \varepsilon^\eta, \quad c_0 = \text{const}, \quad \eta > \alpha,$$

$$\|F(t, \varepsilon t, y_1(t), \varepsilon) - F(t, \varepsilon t, y_2(t), \varepsilon)\| \leq K_0 \|y_1(t) - y_2(t)\|, \quad K_0 = \text{const};$$

- 3) $m > \alpha + \eta$.

Тогда при достаточно малых ε система (1) имеет в шаре $U(y_0(\varepsilon t, \varepsilon), r(\varepsilon))$ единственное почти периодическое решение $x_0(t, \varepsilon)$. Это решение будет асимптотически устойчиво, если при достаточно малых ε все характеристические показатели системы (10) имеют отрицательные вещественные части, и неустойчиво в противном случае.

Прежде чем перейти к доказательству, остановимся подробнее на условиях теоремы. Предположим, что система (3) имеет мультипликаторы на единичной окружности. В этом случае изучения усредненной системы первого приближения (2) недостаточно, чтобы судить о существовании п.п.-решения системы (1) близкого к $y_0(\varepsilon t)$. С помощью процедуры, описанной в п. 2, будем строить системы более высоких приближений до тех пор, пока при некотором $m_0 > 1$ не будут выполнены условия теоремы. Требуется, чтобы при достаточно малых $\varepsilon > 0$ все мультипликаторы соответствующей системы в вариациях (10) не лежали на единичной окружности. После этого необходимо найти константу α , с которой выполняется неравенство (11). Отметим, что α может оказаться нецелым. Число η – порядок по ε величины, характеризующей радиус шара, в котором находится искомое п.п.-решение, может быть выбрано произвольным, но с условием $\eta > \alpha$. Далее следует продолжить построение систем высших приближений для системы (1) до порядка $m \geq m_0$, для которого выполняется неравенство $m > \alpha + \eta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Так как замена (4) обратима при малых ε , достаточно доказать утверждения теоремы для системы (13). Задача о существовании п.п.-решений для системы (13) эквивалентна при достаточно малых $\varepsilon > 0$ задаче о п.п.-решениях операторного уравнения

$$y = \Pi(y, \varepsilon), \quad \Pi(y, \varepsilon) = K^{-1}(\varepsilon)(H(\tau, y, \varepsilon) - A(\tau, \varepsilon)y) + \varepsilon^m K^{-1}(\varepsilon)F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \tau, y, \varepsilon\right). \quad (14)$$

Пусть $y_0(\tau, \varepsilon)$ – п.п.-решение системы m -го приближения (9), т.е.

$$\frac{dy_0(\tau, \varepsilon)}{d\tau} \equiv H(\tau, y_0(\tau, \varepsilon), \varepsilon).$$

Рассмотрим функцию $\Pi(y_0 + z, \varepsilon)$, где z – произвольная п.п.-функция такая, что $\|z\| \leq r(\varepsilon)$. Имеем

$$\begin{aligned} \Pi(y_0 + z, \varepsilon) &= K^{-1}(\varepsilon)(H(\tau, y_0 + z, \varepsilon) - A(\tau, \varepsilon)(y_0 + z)) + \varepsilon^m K^{-1}(\varepsilon)F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \tau, y_0 + z, \varepsilon\right) \\ &= K^{-1}(\varepsilon)(H(\tau, y_0 + z, \varepsilon) - H(\tau, y_0, \varepsilon) - A(\tau, \varepsilon)z) \\ &\quad + \varepsilon^m K^{-1}(\varepsilon)F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \tau, y_0 + z, \varepsilon\right) + K^{-1}(\varepsilon)(H(\tau, y_0, \varepsilon) - A(\tau, \varepsilon)y_0). \end{aligned}$$

Из определения оператора $K^{-1}(\varepsilon)$ следует, что

$$K^{-1}(\varepsilon)(H(\tau, y_0, \varepsilon) - A(\tau, \varepsilon)y_0) = y_0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Pi(y_0 + z, \varepsilon) &= K^{-1}(\varepsilon)(H(\tau, y_0 + z, \varepsilon) - H(\tau, y_0, \varepsilon) - A(\tau, \varepsilon)z) \\ &\quad + \varepsilon^m K^{-1}(\varepsilon)F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \tau, y_0 + z, \varepsilon\right) + y_0. \end{aligned}$$

Оценим норму п.п.-функции $\Pi(y_0 + z, \varepsilon) - y_0$. Получим

$$\begin{aligned} \|\Pi(y_0 + z, \varepsilon) - y_0\| &\leq \|K^{-1}(\varepsilon)(H(\tau, y_0 + z, \varepsilon) - H(\tau, y_0, \varepsilon) - A(\tau, \varepsilon)z)\| \\ &\quad + \left\| \varepsilon^m K^{-1}(\varepsilon) F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \tau, y_0 + z, \varepsilon\right) \right\|. \end{aligned}$$

Из условий теоремы следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\|\Pi(y_0 + z, \varepsilon) - y_0\| \leq \Delta_1(\varepsilon) + \Delta_2(\varepsilon),$$

где $\Delta_1(\varepsilon) = O(\varepsilon^{2\eta-\alpha})$, $\Delta_2(\varepsilon) = O(\varepsilon^{m-\alpha})$, $2\eta - \alpha > \eta$, $m - \alpha > \eta$. Так как $r(\varepsilon) = c_0\varepsilon^\eta$, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ из $\|z\| \leq r(\varepsilon)$ следует, что $\|\Pi(y_0 + z, \varepsilon) - y_0\| \leq r(\varepsilon)$. Это означает, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ оператор $\Pi(y, \varepsilon)$ отображает шар $U(y_0, r(\varepsilon))$ в себя. Покажем, что оператор $\Pi(y, \varepsilon)$ при малых ε является сжимающим. Пусть $y_1, y_2 \in U(y_0, r(\varepsilon))$. Оценим норму п.п.-функции $\Pi(y_1, \varepsilon) - \Pi(y_2, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \|\Pi(y_1, \varepsilon) - \Pi(y_2, \varepsilon)\| &\leq \|K^{-1}(\varepsilon)\| \cdot \|H(\tau, y_1, \varepsilon) - H(\tau, y_2, \varepsilon) - A(\tau, \varepsilon)(y_1 - y_2)\| \\ &\quad + \varepsilon^m \|K^{-1}(\varepsilon)\| \cdot \left\| F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \tau, y_1, \varepsilon\right) - F\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \tau, y_2, \varepsilon\right) \right\|. \end{aligned}$$

Из условий теоремы следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\|\Pi(y_1, \varepsilon) - \Pi(y_2, \varepsilon)\| \leq (\Delta_3(\varepsilon) + \Delta_4(\varepsilon))\|y_1 - y_2\|,$$

где $\Delta_3(\varepsilon) = O(\varepsilon^{\eta-\alpha})$, $\Delta_4(\varepsilon) = O(\varepsilon^{m-\alpha})$, $\eta - \alpha > 0$, $m - \alpha > 0$. Следовательно, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ оператор $\Pi(y, \varepsilon)$ – сжимающий на шаре $U(y_0, r(\varepsilon))$. Таким образом, уравнение (14) имеет при достаточно малых ε в шаре $U(y_0, r(\varepsilon))$ единственное п.п.-решение. Существование п.п.-решения $x(t, \varepsilon)$ для уравнения (1) доказано. Доказательство утверждений об устойчивости решения $x(t, \varepsilon)$ аналогично доказательству теорем об устойчивости и неустойчивости по первому приближению (см., например, [6, § 11]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Roseau M. Sur une classe des systemes dynamiques soumis à des excitations periodiques de longue periode // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A. 1969. V. 268. № 7. P. 409–412.
- [2] Бурд В. Ш. Малые почти периодические колебания в системах с быстрыми и медленными параметрическими возбуждениями // Деп. ВИНТИ. М.: ВИНТИ, 1982. № 176-83.
- [3] Левитан Б. М. Почти-периодические функции. М.: Гостехиздат, 1953.
- [4] Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
- [5] Штокало И. З. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Киев: Изд-во АН УССР, 1960.
- [6] Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С. Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1970.

Ярославский государственный университет
E-mail: uhl@uniyar.ac.ru

Поступило
29.02.96
Исправленный вариант
14.10.96