Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Н. Шеремета, О последовательностях максимальных членов и центральных показателей производных рядов Дирихле, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 3, 457–467

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1303>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 12:24:02

УДК 517.537.2

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ МАКСИМАЛЬНЫХ ЧЛЕНОВ И ЦЕНТРАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПРОИЗВОДНЫХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

М. Н. Шеремета

Для представляющего функцию F ряда Дирихле с положительными возрастающими к ∞ показателями и абсциссой абсолютной сходимости $A \in (-\infty, +\infty]$ доказано, что последовательности максимальных членов $(\mu(\sigma, F^{(m)}))$ и центральных показателей $(\Lambda(\sigma, F^{(m)}))$ являются неубывающими к ∞ при $m \rightarrow \infty$ для любого фиксированного $\sigma < A$, и

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu(\sigma, F^{(m)})}{m \ln m} \leq 1 \quad \text{и} \quad \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln \Lambda(\sigma, F^{(m)})}{\ln m} \leq 1.$$

Указаны необходимые и достаточные условия того, что в этих соотношениях можно поставить знак равенства и заменить $\overline{\lim}$ на $\lim$.

Библиография: 3 названия.

1. Введение. Пусть $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, а ряд Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n), \quad s = \sigma + it, \quad (1)$$

имеет абсциссу $A \in (-\infty, +\infty]$ абсолютной сходимости. Будем считать, что все $a_n \neq 0$, так что ряд (1) не сводится к экспоненциальному полиному. Для $\sigma \in (-\infty, A)$ пусть $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \geq 1\}$ – максимальный член, $\nu(\sigma, F) = \max\{n \geq 1 : |a_n| \exp(\sigma\lambda_n) = \mu(\sigma, F)\}$ – центральный индекс, а $\Lambda(\sigma, F) = \lambda_{\nu(\sigma, F)}$ – центральный показатель ряда (1).

В настоящей статье исследуется при $m \rightarrow \infty$ асимптотическое поведение для каждого фиксированного $\sigma \in (-\infty, A)$ последовательностей $(\mu(\sigma, F^{(m)}))$ и $(\Lambda(\sigma, F^{(m)}))$, где $F^{(m)}$ – производная функции F порядка $m \in \mathbb{Z}_+$. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. Для каждого фиксированного $\sigma \in (-\infty, A)$ последовательности $(\mu(\sigma, F^{(m)}))$ и $(\Lambda(\sigma, F^{(m)}))$ неубывающие и стремятся к ∞ при $m \rightarrow \infty$.

На скорость роста этих последовательностей указывает

ТЕОРЕМА 2. Для каждого фиксированного $\sigma \in (-\infty, A)$

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu(\sigma, F^{(m)})}{m \ln m} \leq 1 \quad (2)$$

и

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln \Lambda(\sigma, F^{(m)})}{\ln m} \leq 1. \quad (3)$$

Оценки (2) и (3) точны. Это вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\sigma \in (-\infty, A)$. Для того чтобы

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu(\sigma, F^{(m)})}{m \ln m} = 1 \quad (4)$$

и

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln \Lambda(\sigma, F^{(m)})}{\ln m} = 1, \quad (5)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln \lambda_n} \ln \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} - \sigma \right) = 0. \quad (6)$$

Естественным является вопрос, когда в (4) и (5) можно заменить $\overline{\lim}$ на $\lim$? Ответ на него дает

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\sigma \in (-\infty, A)$. Для того чтобы

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu(\sigma, F^{(m)})}{m \ln m} = 1 \quad (7)$$

и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln \Lambda(\sigma, F^{(m)})}{\ln m} = 1, \quad (8)$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$

1) при $n \geq n_0(\varepsilon)$ выполнялось неравенство

$$\frac{1}{\ln \lambda_n} \ln \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} - \sigma \right) > -\varepsilon; \quad (9)$$

2) существовала возрастающая последовательность (n_k) натуральных чисел такая, что $\ln \lambda_{n_{k+1}} \sim \ln \lambda_{n_k}$ при $k \rightarrow \infty$ и

$$\frac{1}{\ln \lambda_{n_k}} \ln \left(\frac{1}{\lambda_{n_k}} \ln \frac{1}{|a_{n_k}|} - \sigma \right) < \varepsilon. \quad (10)$$

Некоторые следствия из теорем 3 и 4 приведены в конце статьи.

2. Вспомогательные результаты. Пусть Ω – класс положительных неограниченных на $(-\infty, +\infty)$ функций Φ таких, что производная Φ' непрерывная, положительная и возрастающая к $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$. Обозначим через φ функцию, обратную к Φ' . Пусть $\Psi(\sigma) = \sigma - \Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ – функция, ассоциированная с Φ по Ньютону.

ЛЕММА 1 [1]. Пусть $\Phi \in \Omega$ и ряд Дирихле (1) имеет абсциссу абсолютной сходимости $A = +\infty$. Для того чтобы $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$ для всех $\sigma \geq \sigma_0$, необходимо и достаточно, чтобы $\ln |a_n| \leq -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всех $n \geq n_0$.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ функцию $\Phi \in \Omega$ выберем так, чтобы $\Phi(\sigma) = (1 + \varepsilon)\sigma \ln \sigma$ для всех достаточно больших σ . Тогда $\Phi'(\sigma) = (1 + \varepsilon)(\ln \sigma + 1)$, $\Psi(\sigma) = \sigma/(\ln \sigma + 1)$, $\varphi(t) = \exp(t/(1 + \varepsilon) - 1)$ и $t\Psi(\varphi(t)) = (1 + \varepsilon)\exp(t/(1 + \varepsilon) - 1)$. Поэтому по лемме 1 для того чтобы $\ln \mu(\sigma, F) \leq (1 + \varepsilon)\sigma \ln \sigma$ для всех достаточно больших σ , необходимо и достаточно, чтобы $\ln |a_n| \leq -(1 + \varepsilon)\exp(\lambda_n/(1 + \varepsilon) - 1)$ для всех достаточно больших n . Отсюда вытекает справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 2. Пусть ряд Дирихле (1) имеет абсциссу абсолютной сходимости $A = +\infty$. Для того чтобы

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\sigma \ln \sigma} = 1, \quad (11)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\ln \ln(1/|a_n|)} = 1. \quad (12)$$

Следующая лемма интересна сама по себе и указывает на необходимое и достаточное условие того, что в (11) можно заменить $\overline{\lim}$ на $\lim$.

ЛЕММА 3. Пусть ряд Дирихле (1) имеет абсциссу абсолютной сходимости $A = +\infty$. Для того чтобы

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\sigma \ln \sigma} = 1, \quad (13)$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$

1) при $n \geq n_0(\varepsilon)$ выполнялось неравенство

$$\lambda_n < (1 + \varepsilon) \ln \ln \frac{1}{|a_n|}; \quad (14)$$

2) существовала возрастающая последовательность (n_k) натуральных чисел такая, что $\lambda_{n_{k+1}} \sim \lambda_{n_k}$ при $k \rightarrow \infty$ и

$$\lambda_{n_k} > (1 - \varepsilon) \ln \ln \frac{1}{|a_{n_k}|}. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с *необходимости*. Если выполняется условие (13), то справедливо равенство (12), из которого вытекает свойство 1) леммы 3.

Свойство 2) будем доказывать от противного. Предположим, что существуют числа $\tau > 0$, $\eta \in (0, 1)$ и последовательность интервалов (n'_ν, n''_ν) , $n'_\nu \rightarrow \infty$ ($\nu \rightarrow \infty$), такие, что $\lambda_{n''_\nu} > (1 + \tau)\lambda_{n'_\nu}$ и

$$\lambda_n < (1 - \eta) \ln \ln \frac{1}{|a_n|}, \quad n'_\nu < n < n''_\nu. \quad (16)$$

Положим $\sigma_\nu = \exp((1 + \tau/2)\lambda_{n'_\nu})$ и рассмотрим ряд Дирихле

$$F_*(s) = \left(\sum_{n \leq n'_\nu} + \sum_{n \geq n''_\nu} \right) b_n e^{s\lambda_n}, \quad b_n = \exp\left(-\exp\left(\frac{\lambda_n}{1 + \varepsilon}\right)\right),$$

где $\varepsilon \in (0, \tau/(2 + \tau))$. Из (14) вытекает, что $|a_n| < b_n$ для $n \leq n'_\nu$ и $n \geq n''_\nu$.

Если $n \leq n'_\nu$, то

$$\frac{\ln b_n - \ln b_{n'_\nu}}{\lambda_{n'_\nu} - \lambda_n} \leq \frac{1}{1 + \varepsilon} \exp\left(\frac{\lambda_{n'_\nu}}{1 + \varepsilon}\right) \leq \exp\left(\left(1 + \frac{\tau}{2}\right)\lambda_{n'_\nu}\right) = \sigma_\nu,$$

а если $n \geq n''_\nu$, то

$$\begin{aligned} \frac{\ln b_{n''_\nu} - \ln b_n}{\lambda_n - \lambda_{n''_\nu}} &\geq \frac{1}{1 + \varepsilon} \exp\left(\frac{\lambda_{n''_\nu}}{1 + \varepsilon}\right) \geq \frac{1}{1 + \varepsilon} \exp\left(\frac{1 + \tau}{1 + \varepsilon}\lambda_{n'_\nu}\right) \\ &= \frac{1}{1 + \varepsilon} \exp\left(\frac{1 + \tau}{(1 + \varepsilon)(1 + \tau/2)} \ln \sigma_\nu\right) \geq \sigma_\nu, \quad \nu \geq \nu_0. \end{aligned}$$

Поэтому для $n \leq n'_\nu$

$$\ln |a_n| + \sigma_\nu \lambda_n \leq \ln b_n + \sigma_\nu \lambda_n \leq \ln b_{n'_\nu} + \sigma_\nu \lambda_{n'_\nu} \leq \sigma_\nu \lambda_{n'_\nu} = \frac{1}{1 + \tau/2} \sigma_\nu \ln \sigma_\nu, \quad (17)$$

а при $n \geq n''_\nu$

$$\begin{aligned} \ln |a_n| + \sigma_\nu \lambda_n &\leq \ln b_{n''_\nu} + \sigma_\nu \lambda_{n''_\nu} = -\exp\left(\frac{\lambda_{n''_\nu}}{1 + \varepsilon}\right) + \lambda_{n''_\nu} \exp\left(\left(1 + \frac{\tau}{2}\right)\lambda_{n'_\nu}\right) \\ &\leq -\exp\left(\frac{\lambda_{n''_\nu}}{1 + \varepsilon}\right) + \lambda_{n''_\nu} \exp\left(\frac{1 + \tau/2}{1 + \tau}\lambda_{n'_\nu}\right) \rightarrow -\infty, \quad \nu \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (18)$$

Наконец, если $n'_\nu < n < n''_\nu$, то из (16) имеем

$$\begin{aligned} \ln |a_n| + \sigma_\nu \lambda_n &\leq -\exp\left(\frac{\lambda_n}{1 - \eta}\right) + \sigma_\nu \lambda_n \leq \max\left\{-\exp\left(\frac{t}{1 - \eta}\right) + \sigma_\nu t : t \geq 0\right\} \\ &= (1 + o(1))(1 - \eta)\sigma_\nu \ln \sigma_\nu, \quad \nu \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (17)–(19) следует, что

$$\ln \mu(\sigma_\nu, F) \leq (1 + o(1)) \max \left\{ \frac{2}{2 + \tau}, 1 - \eta \right\} \sigma_\nu \ln \sigma_\nu, \quad \nu \rightarrow \infty,$$

а это невозможно в силу (13).

Перейдем к доказательству достаточности. Из условия 1) вытекает, что

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\sigma \ln \sigma} \leq 1. \quad (20)$$

Далее, рассмотрим ряд Дирихле

$$F^*(s) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^* \exp(s \lambda_{n_k}), \quad b_k^* = \exp \left(- \exp \left(\frac{\lambda_{n_k}}{1 - \varepsilon} \right) \right).$$

Из (15) следует, что $\ln \mu(\sigma, F) \geq \ln \mu(\sigma, F^*)$. Положим

$$\varkappa_k = \frac{\ln b_{k-1}^* - \ln b_k^*}{\lambda_{n_k} - \lambda_{n_{k-1}}}.$$

Заметим, что $\varkappa_k \uparrow \infty$, $k \rightarrow \infty$. Нетрудно показать, что

$$\ln \mu(\sigma, F^*) = \ln b_k^* + \sigma \lambda_{n_k}, \quad \varkappa_k \leq \sigma \leq \varkappa_{k+1}.$$

На $[\varkappa_k, \varkappa_{k+1}]$ функция $\ln \mu(\sigma, F^*)/(\sigma \ln \sigma)$ вогнутая, поэтому

$$\min \left\{ \frac{\ln \mu(\sigma, F^*)}{\sigma \ln \sigma} : \varkappa_k \leq \sigma \leq \varkappa_{k+1} \right\} = \min \left\{ \frac{\ln \mu(\varkappa_k, F^*)}{\varkappa_k \ln \varkappa_k}, \frac{\ln \mu(\varkappa_{k+1}, F^*)}{\varkappa_{k+1} \ln \varkappa_{k+1}} \right\}.$$

Далее,

$$\frac{\ln \mu(\varkappa_k, F^*)}{\varkappa_k \ln \varkappa_k} = \frac{\ln b_k^* + \varkappa_k \lambda_{n_k}}{\varkappa_k \ln \varkappa_k} = \frac{\lambda_{n_k} \ln b_{k-1}^* - \lambda_{n_{k-1}} \ln b_k^*}{(\ln b_{k-1}^* - \ln b_k^*) \ln \varkappa_k} = \frac{\lambda_{n_k} \lambda_{n_{k-1}}}{\ln \varkappa_k} \beta_k, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{(\ln b_{k-1}^*)/\lambda_{n_{k-1}} - (\ln b_k^*)/\lambda_{n_k}}{\ln b_{k-1}^* - \ln b_k^*} = \frac{\exp(\frac{\lambda_{n_k}}{1-\varepsilon})/\lambda_{n_k} - \exp(\frac{\lambda_{n_{k-1}}}{1-\varepsilon})/\lambda_{n_{k-1}}}{\exp(\frac{\lambda_{n_k}}{1-\varepsilon}) - \exp(\frac{\lambda_{n_{k-1}}}{1-\varepsilon})} \\ &= \frac{1}{1-\varepsilon} \left(\frac{1}{\xi_k} - \frac{1}{\xi_k^2} \right), \quad \frac{\lambda_{n_{k-1}}}{1-\varepsilon} < \xi_k < \frac{\lambda_{n_k}}{1-\varepsilon}, \end{aligned}$$

т.е. в силу условия $\lambda_{n_k} \sim \lambda_{n_{k-1}}$, $k \rightarrow \infty$, имеем

$$\beta_k = (1 + o(1)) \lambda_{n_{k-1}}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Аналогично,

$$\ln \varkappa_k = \ln \frac{\exp(\frac{\lambda_{n_k}}{1-\varepsilon}) - \exp(\frac{\lambda_{n_{k-1}}}{1-\varepsilon})}{\lambda_{n_k} - \lambda_{n_{k-1}}} = \ln \left(\frac{1}{1-\varepsilon} e^{\eta_k} \right), \quad \frac{\lambda_{n_{k-1}}}{1-\varepsilon} < \eta_k < \frac{\lambda_{n_k}}{1-\varepsilon},$$

т.е.

$$\ln \varkappa_k = \frac{1 + o(1)}{1 - \varepsilon} \lambda_{n_k}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Значит, из (21) следует, что

$$\frac{\ln \mu(\varkappa_k, F^*)}{\varkappa_k \ln \varkappa_k} = (1 + o(1))(1 - \varepsilon), \quad k \rightarrow \infty;$$

поэтому

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\sigma \ln \sigma} \geq \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mu(\sigma, F^*)}{\sigma \ln \sigma} \geq 1 - \varepsilon. \quad (22)$$

Из (20) и (22) в силу произвольности ε получаем (13). Лемма 3 полностью доказана.

ЛЕММА 4. Пусть ряд Дирихле (1) имеет абсциссу абсолютной сходимости $A = +\infty$. Для того чтобы

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\Lambda(\sigma, F)}{\ln \sigma} = 1, \quad (23)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство (11), а для того чтобы

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\Lambda(\sigma, F)}{\ln \sigma} = 1, \quad (24)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство (13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\ln \mu(\sigma, F) = \ln \mu(0, F) + \int_0^\sigma \Lambda(t, F) dt,$$

по правилу Лопиталья

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\sigma \ln \sigma} \leq \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\Lambda(\sigma, F)}{\ln \sigma}. \quad (25)$$

С другой стороны, А. В. Братищев [2] показал, что если f и g – выпуклые на $[a, +\infty)$ функции, $g'(\sigma) \rightarrow +\infty$, $\sigma \rightarrow +\infty$, и

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{1}{g'(\sigma)} \inf_{t > \sigma} \frac{g(t)}{t - \sigma} \leq 1, \quad (26)$$

то

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{f(\sigma)}{g(\sigma)} \leq 1 \implies \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{f'(\sigma)}{g'(\sigma)} \leq 1.$$

Легко видеть, что функция $g(\sigma) = \sigma \ln \sigma$ удовлетворяет условию (26), так как

$$g'(\sigma) = \ln \sigma + 1 \quad \text{и} \quad \inf \left\{ \frac{t \ln t}{t - \sigma} : t > \sigma \right\} = \frac{t(\sigma) \ln t(\sigma)}{t(\sigma) - \sigma},$$

где $t(\sigma) = \sigma \ln \sigma + \sigma \ln \ln \sigma + \sigma + o(1)$, $\sigma \rightarrow +\infty$, и значит,

$$\inf \left\{ \frac{t \ln t}{t - \sigma} : t > \sigma \right\} = (1 + o(1)) \frac{\sigma \ln^2 \sigma}{\sigma \ln \sigma} = (1 + o(1)) \ln \sigma, \quad \sigma \rightarrow +\infty.$$

Поэтому

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\sigma \ln \sigma} \leq 1 \implies \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\Lambda(\sigma, F)}{\ln \sigma} \leq 1. \quad (27)$$

Из (25) и (27) получаем эквивалентность равенств (11) и (23).

В [2] также показано, что если $g'(\sigma) \uparrow +\infty$, $\sigma \rightarrow +\infty$, и для каждого $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\alpha(\varepsilon) = \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{g(\sigma^*) + g'(\sigma^*)(\sigma - \sigma^*)}{g(\sigma)} < 1,$$

где $g'(\sigma^*) = (1 - \varepsilon)g'(\sigma)$, то

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{f(\sigma)}{g(\sigma)} = 1 \implies \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{f'(\sigma)}{g'(\sigma)} = 1.$$

В нашем случае $g(\sigma) = \sigma \ln \sigma$, $\sigma^* = \exp((1 - \varepsilon) \ln \sigma - \varepsilon)$ и $\alpha(\varepsilon) = 1 - \varepsilon$. Поэтому

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\sigma \ln \sigma} = 1 \implies \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\Lambda(\sigma, F)}{\ln \sigma} = 1,$$

что вместе с правилом Лопиталья указывает на эквивалентность равенств (13) и (24).

3. Доказательство теоремы 1.

Покажем сначала, что

$$\Lambda(\sigma, F^{(m)}) \leq \frac{\mu(\sigma, F^{(m+1)})}{\mu(\sigma, F^{(m)})} \leq \Lambda(\sigma, F^{(m+1)}), \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad \sigma \in (-\infty, A). \quad (28)$$

Действительно, с одной стороны,

$$\begin{aligned} \mu(\sigma, F^{(m)}) &= |a_{\nu(\sigma, F^{(m)})}| \lambda_{\nu(\sigma, F^{(m)})}^m \exp(\sigma \lambda_{\nu(\sigma, F^{(m)})}) \\ &= \frac{1}{\Lambda(\sigma, F^{(m)})} |a_{\nu(\sigma, F^{(m)})}| \lambda_{\nu(\sigma, F^{(m)})}^{m+1} \exp(\sigma \lambda_{\nu(\sigma, F^{(m)})}) \leq \frac{\mu(\sigma, F^{(m+1)})}{\Lambda(\sigma, F^{(m)})}, \end{aligned}$$

т.е. выполнено левое неравенство в (28). С другой стороны,

$$\begin{aligned} \mu(\sigma, F^{(m+1)}) &= |a_{\nu(\sigma, F^{(m+1)})}| \lambda_{\nu(\sigma, F^{(m+1)})}^{m+1} \exp(\sigma \lambda_{\nu(\sigma, F^{(m+1)})}) \\ &= \Lambda(\sigma, F^{(m+1)}) |a_{\nu(\sigma, F^{(m+1)})}| \lambda_{\nu(\sigma, F^{(m+1)})}^m \exp(\sigma \lambda_{\nu(\sigma, F^{(m+1)})}) \\ &\leq \Lambda(\sigma, F^{(m+1)}) \mu(\sigma, F^{(m)}), \end{aligned}$$

т.е. получаем правое неравенство в (28).

Из (28) следует, что последовательности $(\Lambda(\sigma, F^{(m)}))$ и $(\mu(\sigma, F^{(m)}))$ не убывают. Так как $\lambda_n \uparrow +\infty$, то и последовательность $(\nu(\sigma, F^{(m)}))$ также неубывающая, и чтобы доказать стремление $\Lambda(\sigma, F^{(m)})$ к ∞ при $m \rightarrow \infty$, достаточно показать, что таким свойством обладает последовательность $(\nu(\sigma, F^{(m)}))$.

Предположим противное: последовательность $(\nu(\sigma, F^{(m)}))$ ограничена. Так как $\nu(\sigma, F^{(m)})$ – целочисленная функция, существует $p = p(\sigma) \in \mathbb{N}$ такое, что $\nu(\sigma, F^{(m)}) = p$ для всех $m \geq p$. Но все $a_n \neq 0$. Поэтому

$$1 > \frac{|a_{p+1}| \lambda_{p+1}^m \exp(\sigma \lambda_{p+1})}{|a_p| \lambda_p^m \exp(\sigma \lambda_p)} = \left| \frac{a_{p+1}}{a_p} \right| \exp(\sigma(\lambda_{p+1} - \lambda_p)) \left(\frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_p} \right)^m \rightarrow +\infty, \quad m \rightarrow \infty,$$

что невозможно. Значит, $\Lambda(\sigma, F^{(m)}) \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$, и в силу (28) $\mu(\sigma, F^{(m)}) \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$.

4. Доказательство теоремы 2.

Сначала заметим следующее. Предположим, что функциональная последовательность $F(\sigma) = (|a_n| \exp(\sigma \lambda_n))_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию $|a_n| \exp(\sigma \lambda_n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, для любого $\sigma \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $\sigma \in \mathbb{R}$ существует максимальный член $\mu(\sigma, F)$ этой последовательности и все утверждения, полученные для максимального члена абсолютно сходящегося в $\mathbb{C}$ ряда Дирихле (1), остаются верными и для максимального члена указанной функциональной последовательности. В частности, справедливы все леммы, приведенные в п. 2.

Не уменьшая общности, будем считать, что $\lambda_1 \geq 1$, и для каждого фиксированного $\sigma \in (-\infty, A)$, где $A \in (-\infty, +\infty]$ – абсцисса абсолютной сходимости ряда (1), рассмотрим функциональную последовательность

$$F_{\sigma}(x) = (|a_n| e^{\sigma \lambda_n} e^{x \ln \lambda_n})_{n=1}^{\infty}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (29)$$

Покажем, что общий член этой последовательности для любого $x \in \mathbb{R}$ стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$. Для этого, прежде всего, заметим, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln |a_n| \leq -A. \quad (30)$$

Действительно, если $A < +\infty$ и существуют число $\eta > 0$ и возрастающая последовательность натуральных чисел такие, что

$$\frac{1}{\lambda_{n_k}} \ln |a_{n_k}| > -A + \eta,$$

то для $\sigma \in [A - \eta, A)$ имеем

$$|a_{n_k}| \exp(\sigma \lambda_{n_k}) \geq \exp((\sigma - A + \eta) \lambda_{n_k}) \geq 1,$$

что невозможно, так как A — абсцисса абсолютной сходимости ряда (1). В случае $A = +\infty$ доказательство (30) аналогично.

Из неравенства (30) в случае $A \in (-\infty, +\infty)$ при $n \geq n_0(\sigma)$ имеем

$$\begin{aligned} |a_n| e^{\sigma \lambda_n} e^{x \ln \lambda_n} &= \exp \left(\lambda_n \left(\frac{\ln |a_n|}{\lambda_n} + \sigma \right) + x \ln \lambda_n \right) \\ &\leq \exp \left(\lambda_n \left(\sigma - A + \frac{A - \sigma}{2} \right) + x \ln \lambda_n \right) \leq \exp \left(-\frac{A - \sigma}{2} \lambda_n + x \ln \lambda_n \right), \end{aligned} \quad (31)$$

а в случае $A = +\infty$ выполняется

$$|a_n| e^{\sigma \lambda_n} e^{x \ln \lambda_n} = \exp \left(-\lambda_n \left(\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} - \sigma \right) + x \ln \lambda_n \right) \leq \exp(-\lambda_n + x \ln \lambda_n), \quad (32)$$

так как в этом случае, как видно из (30),

$$\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Из (31) и (32) вытекает, что максимальный член $\mu(x, F_\sigma)$ и центральный индекс $\nu(x, F_\sigma)$ последовательности (29) определены для любого $x \in \mathbb{R}$. Из этих неравенств вытекает также, что с определенной постоянной $K = K(\sigma)$ верны соотношения

$$\ln \mu(x, F_\sigma) \leq \max\{-Kt + x \ln t : t \geq 1\} = -x + x \ln \frac{x}{K} = (1 + o(1))x \ln x, \quad x \rightarrow +\infty,$$

т.е.

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mu(x, F_\sigma)}{x \ln x} \leq 1. \quad (34)$$

Учитывая то, что у функциональной последовательности (29) показателями являются $\ln \lambda_n$, из (34) и (27) имеем

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \lambda_{\nu(x, F_\sigma)}}{\ln x} \leq 1. \quad (35)$$

Для ряда (1)

$$F^{(m)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^m e^{s \lambda_n}.$$

Поэтому

$$\mu(\sigma, F^{(m)}) = \mu(m, F_\sigma), \quad \Lambda(\sigma, F^{(m)}) = \lambda_{\nu(m, F_\sigma)}. \quad (36)$$

Значит, из (34) и (35) вытекают неравенства (2) и (3).

5. Доказательство теорем 3 и 4. Применим лемму 2 к максимальному члену функциональной последовательности (29) и получим, что условие

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \lambda_n}{\ln \ln(1/(|a_n| \exp(\sigma \lambda_n)))} = 1 \quad (37)$$

является необходимым и достаточным, для того чтобы

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mu(x, F_\sigma)}{x \ln x} = 1, \quad (38)$$

а согласно лемме 4 и для того чтобы

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \lambda_{\nu(x, F_\sigma)}}{\ln x} = 1. \quad (39)$$

Нетрудно проверить, что условие (37) равносильно условию (6). В силу (36), неубывания функций $\ln \mu(x, F_\sigma)$ и $\ln \lambda_{\nu(x, F_\sigma)}$ и соотношения

$$(x + O(1)) \ln(x + O(1)) = (1 + o(1))x \ln x, \quad x \rightarrow +\infty,$$

равенства (38) и (39) эквивалентны соответственно равенствам (4) и (5). Теорема 3 доказана.

Применяя лемму 3 к $\mu(x, F_\sigma)$, получим, что выполнение для любого $\varepsilon > 0$ следующих двух условий:

$$1') \text{ для всех } n \geq n_0(\varepsilon)$$

$$\ln \lambda_n < (1 + \varepsilon) \ln \ln \frac{1}{|a_n| \exp(\sigma \lambda_n)}; \quad (40)$$

$$2') \text{ существует возрастающая последовательность } (n_k) \text{ натуральных чисел такая, что } \ln \lambda_{n_{k+1}} \sim \ln \lambda_{n_k}, \quad k \rightarrow \infty, \text{ и}$$

$$\ln \lambda_{n_k} > (1 - \varepsilon) \ln \ln \frac{1}{|a_{n_k}| \exp(\sigma \lambda_{n_k})}; \quad (41)$$

является необходимым и достаточным, для того чтобы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mu(x, F_\sigma)}{x \ln x} = 1. \quad (42)$$

Условия 1') и 2') по лемме 4 также являются необходимыми и достаточными, для того чтобы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \lambda_{\nu(x, F_\sigma)}}{\ln x} = 1. \quad (43)$$

Нетрудно показать, что неравенство (40) равносильно неравенству (9), а неравенство (41) – неравенству (10). Поэтому условия 1'), 2') эквивалентны условиям 1), 2) теоремы 4. Используя приемы, примененные при доказательстве теоремы 3, легко показать, что равенство (42) равносильно равенству (7), а равенство (43) – равенству (8). Теорема 4 также доказана.

6. Приложения. В случае, когда $A = +\infty$, в силу (33) в соотношениях (6), (9) и (10) можно σ устранить. Поэтому из теорем 3 и 4 вытекают соответственно следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $A = +\infty$. Для того чтобы для каждого фиксированного $\sigma \in \mathbb{R}$ выполнялись равенства (4) и (5), необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln \lambda_n} \ln \ln \frac{1}{|a_n|} = 1.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $A = +\infty$. Для того чтобы для каждого фиксированного $\sigma \in \mathbb{R}$ выполнялись равенства (7) и (8), необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$

1) при $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\frac{1}{\ln \lambda_n} \ln \ln \frac{1}{|a_n|} > 1 - \varepsilon;$$

2) существовала возрастающая последовательность (n_k) натуральных чисел такая, что $\ln \lambda_{n_{k+1}} \sim \ln \lambda_{n_k}$, $k \rightarrow \infty$, и

$$\frac{1}{\ln \lambda_{n_k}} \ln \ln \frac{1}{|a_{n_k}|} < 1 + \varepsilon.$$

Случай $A = 0$ более богатый, чем случай $A = +\infty$. Во-первых, существуют ряды Дирихле (1), для которых $A = 0$ и выполняются (30). Для них остаются в силе утверждения следствий 1 и 2 при всех $\sigma < 0$. Примером такого ряда может служить

$$F(s) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \exp\left(s \frac{\ln n}{\ln \ln n}\right).$$

Во-вторых, если $A = 0$ и $\ln n = o(\lambda_n)$, $n \rightarrow \infty$, то по теореме Валирона

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln |a_n| = 0.$$

Поэтому (6) выполняется для любого $\sigma < 0$, и из теоремы 3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $A = 0$ и $\ln n = o(\lambda_n)$, $n \rightarrow \infty$. Тогда для каждого фиксированного $\sigma \in (-\infty, 0)$ выполняются равенства (4) и (5).

Из теоремы 4 легко получить

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $A = 0$, $\ln \lambda_{n+1} \sim \ln \lambda_n$, $n \rightarrow \infty$, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln |a_n| = 0.$$

Тогда выполняются равенства (9) и (10).

Для ряда (1) и $\sigma \in (-\infty, A)$ положим $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$. Предположим, что $A = +\infty$ и $\ln |a_n| \leq -\lambda_n \alpha(\lambda_n)$, $n \geq n_0$, где α — положительная непрерывная

возрастающая к $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функция. Тогда для того чтобы $\ln M(\sigma, F) \sim \ln \mu(\sigma, F)$ при $\sigma \rightarrow +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы $\ln n = O(\alpha(\lambda_n))$, $n \rightarrow \infty$ (см. [3]). Если $\ln \mu(\sigma, F) \leq (1 + o(1))\sigma \ln \sigma$, $\sigma \rightarrow +\infty$, то, как при доказательстве леммы 2, имеем

$$\ln |a_n| \leq -\exp((1 + o(1))\lambda_n) = -\lambda_n \exp((1 + o(1))\lambda_n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, $\ln M(\sigma, F) \sim \ln \mu(\sigma, F)$, $\sigma \rightarrow +\infty$, если только

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln n}{\lambda_n} \leq 1.$$

Отсюда следует, что если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln n}{\ln \lambda_n} \leq 1 \quad (44)$$

и

$$F_\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{\sigma \lambda_n} e^{x \ln \lambda_n}, \quad \sigma < A, \quad x \in \mathbb{R},$$

то $\ln F_\sigma(x) \sim \ln \mu(x, F_\sigma)$ при $x \rightarrow +\infty$. С другой стороны,

$$\mu(m, F_\sigma) = \mu(\sigma, F^{(m)}) \leq M(\sigma, F^{(m)}) \leq F_\sigma(m).$$

Поэтому в теоремах 2, 3 и следствиях 1–4 в случае выполнения условия (44) можно заменить $\ln \mu(\sigma, F^{(m)})$ на $\ln M(\sigma, F^{(m)})$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шеремета М. Н. Двучленная асимптотика целых рядов Дирихле // Теор. функций, функционал. анализ и их прилож. 1990. Т. 54. С. 16–25.
- [2] Братищев А. В. Об обращении правила Лопиталья // Механика сплошной среды. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1985. С. 28–42.
- [3] Шеремета М. Н. О соотношениях между максимальным членом и максимумом модуля целого ряда Дирихле // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 5. С. 141–148.

Львовский государственный университет

Поступило
01.04.96