Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. В. Базалий, Об одной модельной задаче со вторыми производными по геометрическим переменным в граничном условии для параболического уравнения второго порядка, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 3, 468–472

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1304>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 16:41:50

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ СО ВТОРЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПО ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ПЕРЕМЕННЫМ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Б. В. Базалий

Рассмотрим следующую задачу. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, и на ее границе Γ введены некоторые координаты $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$. Пусть $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, $\Gamma_T = \Gamma \times (0, T)$. Требуется найти функции $u(x, t)$, $v(\omega, t)$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - Lu &= f_0(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \\ \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + L_0 v &= f_1(x, t), \quad u - v = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_T, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad x \in \Omega, \quad v(\omega, 0) = \psi(\omega), \quad \omega \in \Gamma, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$L = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) D_{x_i x_j}^2 + \sum_{i=1}^n a_i(x, t) D_{x_i} + a(x, t), \quad L_0 = \sum_{i,j=1}^{n-1} \gamma_{ij}(\omega, t) D_{\omega_i \omega_j}^2 + \gamma(\omega, t)$$

– равномерно эллиптические операторы, $(\vec{b}(x, t), \vec{n}) \geq b_0 > 0$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$, $\vec{n}$ – внутренняя к Ω нормаль на Γ . Ясно, что при $\psi(\omega) = \varphi(x)|_{\Gamma}$ система (1) эквивалентна задаче нахождения одной функции $u(x, t)$ с граничными условиями, содержащими вторые производные по касательным к границе направлениям.

По-видимому, впервые такая неклассическая граничная задача была сформулирована в работе [1]. Эллиптический вариант таких задач рассматривался в [2]. В работе [3] изучалась аналогичная задача в том случае, когда на границе Γ_T задается параболический оператор, в работе [4] исследован более сложный случай квазилинейной задачи с параболическим квазилинейным оператором на границе. Наконец, в [5] при некоторых ограничениях на коэффициенты и правые части задачи было показано существование фундаментального решения задачи (1) в полупространстве. Очевидно, что наличие в граничном условии в (1) только эллиптического оператора делает эту задачу в линейном случае более содержательной.

Общая схема доказательства разрешимости классических граничных задач для параболического уравнения (задача Дирихле, задача Неймана), изложенная в [6, гл. 4], основана на изучении некоторых модельных задач в полупространстве, так что свойства этих модельных задач затем переносятся на случай произвольной области и произвольных коэффициентов из некоторых классов. Следуя этой концепции, модельная граничная задача в рассматриваемом случае получается замораживанием аргументов в коэффициентах, отбрасыванием младших членов и распрямлением куска границы Γ , что в данной ситуации приводит к следующей задаче. Требуется найти функции $u(x, t)$,

Работа выполнена при частичной поддержке ДФФД Украины, грант № 1.4/127.

$v(x', t), x = (x', x_n)$, определенные соответственно в $\mathbb{R}_+^{n,T} = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, x_n > 0, t \in (0, T)\}$ и $\mathbb{R}^{n-1,T} = \{(x', t) : x' \in \mathbb{R}^{n-1}, t \in (0, T)\}$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= f_0(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}_+^{n,T}, \\ \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} &= f_1(x, t), \quad u - v = f_2(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^{n-1,T}, \\ u(x, 0) = 0, \quad v(x', 0) &= 0, \quad \vec{b} = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, 1), \quad \min_i \gamma_i \geq \gamma_0 > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Трудности, которые возникают при изучении задачи (2), связаны прежде всего с исследованием свойств гладкости функции $v(x', t)$ по переменной t , и именно этим обстоятельством диктуется выбор пространств, в которых будет доказана разрешимость задачи (2).

Пусть $H^{k+\alpha, (k+\alpha)/2}(\Omega_T)$, k – целое число, $\alpha \in (0, 1)$, пространство гёльдеровых функций с нормой $|u|_{\Omega_T}^{(k+\alpha)}$ и полунормами [6, с. 16]

$$\begin{aligned} \langle u \rangle_x^{(\alpha)} &= \sup_{x, y, t} \frac{|u(x, t) - u(y, t)|}{|x - y|^\alpha}, \quad \langle u \rangle_t^{(\alpha)} = \sup_{x, t, \tau} \frac{|u(x, t) - u(x, \tau)|}{|t - \tau|^\alpha}, \\ \langle u \rangle^{(k+\alpha)} &= \langle u \rangle_x^{(k+\alpha)} + \langle u \rangle_t^{(k+\alpha)}, \quad \langle u \rangle_x^{(k+\alpha)} = \sum_{2r+s=k} \langle D_t^r D_x^s u \rangle_x^{(\alpha)}, \\ \langle u \rangle_t^{(k+\alpha)} &= \sum_{0 < k+\alpha-2r-s < 2} \langle D_t^r D_x^s u \rangle_t^{((k+\alpha-2r-s)/2)}. \end{aligned}$$

Введем также полунорму [7]

$$[u]^{(\alpha, \beta)} = \sup_{x', y', t, \tau} \frac{|u(x', x_n, t) - u(y', x_n, t) - u(x', x_n, \tau) + u(y', x_n, \tau)|}{|x' - y'|^\alpha |t - \tau|^\beta}, \quad \alpha, \beta \in (0, 1),$$

и рассмотрим пространства $\Pi^{k+\alpha}$, $k = 0, 1, 2$, которые являются подпространствами соответствующих пространств $H^{k+\alpha, (k+\alpha)/2}$ и для которых конечны следующие полунормы:

$$\begin{aligned} \langle\langle u \rangle\rangle^{(\alpha)} &= \langle u \rangle^{(\alpha)} + [u]^{(\alpha, \alpha/2)}, \quad \langle\langle u \rangle\rangle^{(1+\alpha)} = \langle u \rangle^{(1+\alpha)} + [u]^{(\alpha, (1+\alpha)/2)} + [u_x]^{(\alpha, \alpha/2)}, \\ \langle\langle u \rangle\rangle^{(2+\alpha)} &= \langle u \rangle^{(2+\alpha)} + [u_x]^{(\alpha, (1+\alpha)/2)} + [u_{xx}]^{(\alpha, \alpha/2)} + [u_t]^{(\alpha, \alpha/2)}. \end{aligned}$$

Подмножества функций из $\Pi^{k+\alpha}$, обращающихся в 0 при $t = 0$ вместе со своими допустимыми производными по t , обозначим через $\Pi_0^{k+\alpha}$. Нормы в пространствах $\Pi^{k+\alpha}$ будем обозначать через $\|\cdot\|_{\Pi^{k+\alpha}}$; они включают в себя указанные полунормы и нормы из $H^{k+\alpha, (k+\alpha)/2}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть в задаче (2) $f_0 \in \Pi_0^\alpha(\mathbb{R}_+^{n,T})$, $f_k \in \Pi_0^{k+\alpha}(\mathbb{R}^{n-1,T})$, $k = 1, 2$. Тогда задача (2) имеет единственное решение и выполняется неравенство

$$\langle\langle u \rangle\rangle_{\mathbb{R}_+^{n,T}}^{(2+\alpha)} + \langle\langle v \rangle\rangle_{\mathbb{R}^{n-1,T}}^{(2+\alpha)} + \langle\langle D_x^2 v \rangle\rangle_{\mathbb{R}^{n-1,T}}^{(1+\alpha)} \leq c(T) \left(\langle\langle f_0 \rangle\rangle_{\mathbb{R}_+^{n,T}}^{(\alpha)} + \langle\langle f_1 \rangle\rangle_{\mathbb{R}^{n-1,T}}^{(1+\alpha)} + \langle\langle f_2 \rangle\rangle_{\mathbb{R}^{n-1,T}}^{(2+\alpha)} \right), \quad (3)$$

где $c(T)$ остается ограниченной при $T \rightarrow 0$.

Доказательство теоремы состоит в получении явного представления решения в виде некоторых потенциалов и доказательстве соответствующих оценок. Пусть

$$\Gamma(x, t) = \begin{cases} (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

– фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Рассмотрим объемный потенциал и потенциал простого слоя

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \Gamma(x, t) * f(x, t), & f(x, t) &\in \Pi_0^\alpha(\mathbb{R}^n, T), \\ w_1(x, t) &= -2\Gamma(x', x_n, t) * f_1(x', t), & f_1(x', t) &\in \Pi_0^{1+\alpha}(\mathbb{R}^{n-1}, T), \end{aligned}$$

Имеют место оценки

$$\langle\langle w \rangle\rangle_{\mathbb{R}^n, T}^{(2+\alpha)} \leq c \langle\langle f \rangle\rangle_{\mathbb{R}^n, T}^{(\alpha)}, \quad \langle\langle w_1 \rangle\rangle_{\mathbb{R}_+^n, T}^{(2+\alpha)} \leq c \langle\langle f_1 \rangle\rangle_{\mathbb{R}^{n-1}, T}^{(1+\alpha)}, \quad (4)$$

где постоянные не зависят от T . Это позволяет без потери общности рассматривать задачу (2) в предположении $f_0(x, t) \equiv 0$.

Обозначим преобразование Фурье по x' и преобразование Лапласа по t функции $f(x', t)$ через

$$\tilde{f}(\lambda, p) = \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x', t) e^{-i(\lambda, x')} dx', \quad \lambda \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Тогда задачу (2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} (p + |\lambda|^2) \tilde{u}(\lambda, x_n, p) - \frac{d^2 \tilde{u}}{dx_n^2}(\lambda, x_n, p) &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n}(\lambda, 0, p) + i \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \lambda_k \tilde{u}(\lambda, 0, p) - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k \lambda_k^2 \tilde{v}(\lambda, p) &= \tilde{f}_1(\lambda, p), \\ \tilde{u}(\lambda, 0, p) - \tilde{v}(\lambda, p) &= \tilde{f}_2(\lambda, p). \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть $\tilde{u}(\lambda, x_n, p) = \tilde{m}(\lambda, p) \exp(-x_n \sqrt{p + |\lambda|^2})$ – убывающее на бесконечности решение дифференциального уравнения в (5). Тогда из граничных условий получаем

$$\begin{aligned} \tilde{m}(\lambda, p) &= -\tilde{K}(\lambda, p) (\tilde{f}_1(\lambda, p) + (\sqrt{p + |\lambda|^2} - i(\beta, \lambda)) \tilde{f}_2(\lambda, p)) + \tilde{f}_2(\lambda, p), \\ \tilde{v}(\lambda, p) &= \tilde{m}(\lambda, p) - \tilde{f}_2(\lambda, p), \quad \tilde{K}(\lambda, p) = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k \lambda_k^2 + \sqrt{p + |\lambda|^2} - i(\beta, \lambda) \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Прообразом функции $\tilde{K}(\lambda, p)$ является функция

$$K(x, t) = \frac{c}{t^{3/2}} \int_0^\infty \tau \frac{\exp\left(-\frac{\tau^2}{4t} - \frac{(x_1 + \beta_1 \tau)^2}{4(t + \gamma_1 \tau)} - \dots - \frac{(x_{n-1} + \beta_{n-1} \tau)^2}{4(t + \gamma_{n-1} \tau)}\right)}{(t + \gamma_1 \tau)^{1/2} \dots (t + \gamma_{n-1} \tau)^{1/2}} d\tau.$$

Соотношения (6) формально определяют решение задачи (2), а для получения оценки (3) на первом шаге достаточно исследовать свойства гладкости функции

$$g(x, t) = \int_{-\infty}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi, \quad f \in \Pi_0^\alpha(\mathbb{R}^{n-1}, T),$$

где образом функции $g(x, t)$ является функция $-\tilde{m}(\lambda, p) \sqrt{p + |\lambda|^2}$, так что

$$g(x, t) = \frac{\partial u(x', x_n, t)}{\partial x_n} \Big|_{x_n=0}.$$

ЛЕММА 1. Функция $g(x, t) \in \Pi_0^{1+\alpha}(\mathbb{R}^{n-1}, T)$ и выполняется оценка

$$\langle\langle g \rangle\rangle_{\mathbb{R}^{n-1}, T}^{(1+\alpha)} \leq c \langle\langle f \rangle\rangle_{\mathbb{R}^{n-1}, T}^{(\alpha)}. \quad (7)$$

Отметим, что оценка (7) вместе со второй оценкой из (4) сразу приводит к оценкам $\langle\langle u \rangle\rangle_{\mathbb{R}_+^{n, T}}^{(2+\alpha)}$, $\langle\langle v \rangle\rangle_{\mathbb{R}^{n-1}, T}^{(2+\alpha)}$ через правую часть в (3).

Доказательство леммы основано на оценках вида

$$\int_0^\infty |D_x^l K(x, t)| dt \leq c |x|^{-n+2-l}, \quad \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |D_x^l K(x, t)| dt \leq c t^{-(l+1)/2}.$$

Из первого граничного условия в (2) теперь следует, что функция $v(x', t) \in \Pi_0^{2+\alpha}(\mathbb{R}^{n-1}, T)$ удовлетворяет соотношению

$$\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = F(x', t), \quad F(x', t) \in \Pi_0^{1+\alpha}(\mathbb{R}^{n-1}, T).$$

ЛЕММА 2. Пусть функция $w(x, t) \in \Pi_0^{2+\alpha}(\mathbb{R}^{n-1}, T)$ удовлетворяет равенству

$$\Delta w = F(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^{n-1, T}, \quad F(x, t) \in \Pi_0^{1+\alpha}(\mathbb{R}^{n-1}, T).$$

Тогда справедливы оценки

$$\langle\langle D x_i D x_j w \rangle\rangle_{\mathbb{R}^{n-1}, T}^{(1+\alpha)} \leq c(T) \left(\langle\langle F \rangle\rangle_{\mathbb{R}^{n-1}, T}^{(1+\alpha)} \langle\langle w \rangle\rangle_{\mathbb{R}^{n-1}, T}^{(2+\alpha)} \right), \quad (8)$$

где $c(T)$ остается ограниченной при $T \rightarrow 0$.

Доказательство леммы основано на представлении $w(x, t)$ с помощью объемного потенциала [8, гл. III]. Именно для получения оценок (8) нам понадобилось ввести полунормы $[\cdot]^{(\alpha, \beta)}$. Неравенства (7), (8) приводят к оценке (3).

В качестве применения теоремы 1 рассмотрим задачу (1) при $\Omega = \mathbb{R}_+^n$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $a_{ij}(x, t) \in \Pi_+^{1+\alpha}(\mathbb{R}_+^{n, T})$, $a_i(x, t), a(x, t) \in \Pi^\alpha(\mathbb{R}_+^{n, T})$, $\gamma_{ij}(x, t), \gamma(x, t) \in \Pi^{1+\alpha}(\mathbb{R}^{n-1, T})$, $\varphi(x), D_{x'} \varphi \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}_+^n)$, $\psi(x) \in C^{3+\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$, $D_{x'} f_0(x, 0) \in C^\alpha(\mathbb{R}_+^n)$, $f_0(x, t) \in \Pi^\alpha(\mathbb{R}_+^{n, T})$, $f_k(x, t) \in \Pi^{k+\alpha}(\mathbb{R}^{n-1, T})$, $k = 1, 2$, и выполняются условия согласования нулевого порядка. Тогда при $\alpha < 1/2$ существует $T_0 > 0$ такое, что при $0 < T < T_0$ найдется единственное решение задачи (1) и справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \|u\|_{\Pi^{2+\alpha}(\mathbb{R}_+^{n, T})} + \|v\|_{\Pi^{2+\alpha}(\mathbb{R}^{n-1, T})} + \|D_x^2 v\|_{\Pi^{1+\alpha}(\mathbb{R}^{n-1, T})} \\ & \leq c \left(\|f_0\|_{\Pi^\alpha(\mathbb{R}_+^{n, T})} + \|f_1\|_{\Pi^{1+\alpha}(\mathbb{R}^{n-1, T})} + \|f_2\|_{\Pi^{2+\alpha}(\mathbb{R}^{n-1, T})} \right. \\ & \quad \left. + \|D_{x'} f_0(x, 0)\|_{C^\alpha(\mathbb{R}_+^n)} + \|\varphi\|_{C^{2+\alpha}(\mathbb{R}_+^n)} + \|D_{x'} \varphi\|_{C^{2+\alpha}(\mathbb{R}_+^n)} + \|\psi\|_{C^{3+\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})} \right). \end{aligned}$$

Разрешимость задачи (1) только в малом по времени и завышенные условия гладкости на коэффициенты задачи и начальные данные объясняются потерей гладкости при обращении оператора, соответствующего задаче (1). Тем не менее, как нам кажется, полученные результаты могут найти применение, например, при исследовании разрешимости нелинейных задач в малом по времени в классах гладких функций без применения более сложной техники теоремы о неявной функции Нэша-Мозера.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель А. Д. // Теория вероятн. и ее примен. 1959. Т. 2. № 2. С. 172–185. 2. Luo Y. S., Trudinger N. S. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1991. V. 118. P. 193–207. 3. Zeng Y., Luo Y. S. // Bull. Austral. Math. Soc. 1995. V. 51. P. 465–479. 4. Apushkinskaya D. E., Nazarov A. I. // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1995. V. 164. P. 1–13. 5. Копытко В. И. // Random Oper. Stochastic Equations. 1992. V. 1. № 1. P. 95–102. 6. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 7. Солонников В. А. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41. № 6. С. 1388–1424. 8. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.