Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Балаганский, О гладких антипроксиминальных множествах, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 3, 472–474

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1305>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 08:02:45

В. С. Балаганский

Подмножество $A \neq X$ линейного нормированного пространства X называется *антипроксиминальным*, если для любой точки $x \in X \setminus A$ в множестве A нет ближайшей точки.

О выпуклых замкнутых ограниченных антипроксиминальных множествах см. [1]–[3] и приведенную там литературу. Антипроксиминальные множества из [3] не являются гладкими. Автор не знает, являются ли другие известные антипроксиминальные множества гладкими. В настоящей работе (предложение 1) указан метод построения в сепарабельном банаховом пространстве гладкого выпуклого замкнутого ограниченного антипроксиминального множества по имеющемуся выпуклому замкнутому ограниченному антипроксиминальному множеству. В качестве следствия построены такие множества в бесконечномерных сепарабельных пространствах $C(Q)$ и $C_0(T)$.

В работе применяются следующие обозначения: X – вещественное банахово пространство; X^* – пространство, сопряженное к X , $\mathcal{F}(X)$ – класс замкнутых непустых множеств из X , $V(X) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, $S(X) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$, $\mathring{M} = \text{int } M$ – внутренность M , $\partial M = \overline{M} \setminus \mathring{M}$ – граница M ; $\text{span } M$ – линейная оболочка M ; $\Sigma(M) = \{f \in X^* : \exists x \in M f(x) = \sup\{f(z) : z \in M\}\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Выпуклое множество $M \in \mathcal{F}(X)$ называется *гладким в X* , если из условий $x \in M$, $f, g \in S(X^*)$, $f(x) = \sup\{f(y) : y \in M\}$, $g(x) = \sup\{g(y) : y \in M\}$ следует, что $f = g$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Выпуклое тело $M \in \mathcal{F}(X)$ называется *строго выпуклым в X* , если из условий $x, y \in M$, $x \neq y$, следует, что $(x + y)/2 \in \text{int } M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Система $A = \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ называется *полной*, если $\overline{\text{span}} A = X$, и *минимальной*, если существует последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X^*$ такая, что

$$f_n(x_k) = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

Нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть X – банахово пространство. Тогда для того чтобы в X существовало выпуклое гладкое компактное множество, необходимо и достаточно, чтобы X было сепарабельным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть M – выпуклое гладкое компактное множество в X , $H = \overline{\text{span}} M$. Считаем, без потери общности, что $0 \in M$. В силу компактности M получаем, что H – сепарабельное банахово пространство. Пусть $H \neq X$. Тогда по теореме Хана–Банаха найдется линейный непрерывный функционал $g_1 \in S(X^*)$ такой, что $g_1(x) = 0$ для всех $x \in H$. Тогда $g_1(x) = \sup\{g_1(x) : x \in M\} = 0 = \sup\{(-g_1)(x) : x \in M\} = (-g_1)(x)$ для всех $x \in M$, по определению x – негладкая точка. Тогда $H = X$ и X сепарабельно.

Достаточность. Пространство X сепарабельно. Тогда (см., например, [4, с. 130]) X можно эквивалентно перенормировать так, что X^* с новой нормой будет строго выпуклым. Пусть V, V^* – единичные шары пространств X, X^* с новой нормой.

Как известно (см., например, [5, с. 122]), в сепарабельном банаховом пространстве X существует полная минимальная система $\{x_n\}_1^\infty$ с $\|x_n\| = 1$, причем $\{f_n\}_1^\infty$ – тотальна на X (см. выше).

Рассмотрим оператор T из X в X :

$$T(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(y)x_n}{2^n \|f_n\|}.$$

Ясно, что T ядерный (см., например, [6, с. 384]), следовательно, компактный оператор. Пусть $B = T(V)$, $M = \overline{B}$. Из компактности T следует, что M – компакт. Выпуклость M следует из линейности T .

Пусть $M^\pi = \{f \in X^* : f(x) \leq 1 \forall x \in M\}$ – поляр множества M .

Докажем, что M^π – строго выпуклое тело. Для этого достаточно доказать, что для любых функционалов $f, g \in M^\pi$, $f \neq g$, справедливо включение $(f + g)/2 \in \text{int } M^\pi$. Так как M ограничено, то M^π – выпуклое тело. Тогда сразу можем считать, что $f \neq \lambda g$ для любого $\lambda \geq 0$ и $f, g \in \partial M^\pi$. Имеем

$$\begin{aligned} M^\pi &= \{f \in X^* : f(x) \leq 1 \forall x \in M\} = \{f \in X^* : f(x) \leq 1 \forall x \in T(V)\} \\ &= \{f \in X^* : f(T(x)) \leq 1 \forall x \in V\} = \{f \in X^* : (T^*(f))(x) \leq 1 \forall x \in V\} \\ &= \{f \in X^* : \|T^*(f)\| \leq 1\}. \end{aligned}$$

Следовательно, M^π – прообраз множества V^* при линейном непрерывном отображении T^* . Имеем $T(x_k) = x_k/(2^k \|f_k\|)$; поэтому $\overline{T(X)} = X$. Значит, отображение T^* взаимно однозначно. Следовательно, $T^*(\partial M^\pi) = S(X^*)$ и $T^*(f) \neq \lambda T^*(g)$ ни при каком λ .

Тогда имеем $\|T^*(f)\| = \|T^*(g)\| = 1$ и в силу строгой выпуклости V^* выполнено $\|T^*(f+g)\| < \|T^*(f)\| + \|T^*(g)\|$. Следовательно, $(T^*(f) + T^*(g))/2 \in \text{int } V^*$ и $(f + g)/2 \in \text{int } M^\pi$.

Докажем, что M – гладкое множество. Допустим, что существует точка $y \in M$ и гиперплоскости $H_1, H_2 \subset X$, опорные к M в точке y , $H_1 = \{z \in X : g_1(z) = c_1\}$, $H_2 = \{z \in X : g_2(z) = c_2\}$, $g_1, g_2 \neq 0$.

Если $c_1 = 0$, то для каждого номера n имеем

$$0 = g_1(T(x_n)) = g_1\left(f_n(x_n) \frac{x_n}{2^n}\right) = g_1(x_n).$$

Тогда ввиду того, что система $A = \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ является полной, $g_1(z) = 0 \forall z \in X$, что противоречит условию $g_1 \neq 0$. Следовательно, $c_1 \neq 0$, аналогично, $c_2 \neq 0$. Можно считать, что $c_1 = c_2 = 1$; тогда $g_1, g_2 \in \partial M^\pi$, но $(g_1/2 + g_2/2)(y) = 1$. Следовательно, $(g_1 + g_2)/2 \in \partial M^\pi$. Противоречие со строгой выпуклостью M^π . Следовательно, M – гладкое множество.

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Лемма 1 при дополнительном предположении рефлексивности X доказана автором в [7].

ЛЕММА 2 [1]. Пусть X – банахово пространство, $A \in \mathcal{F}(X)$ выпукло. Тогда антипроксиминальность множества A эквивалентна условию $\Sigma(A) \cap \Sigma(S(X)) = \emptyset$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть X – сепарабельное банахово пространство. Тогда если в X существует выпуклое замкнутое ограниченное антипроксиминальное множество $A \in \mathcal{F}(X)$, то в X существует гладкое выпуклое замкнутое ограниченное антипроксиминальное множество $M \in \mathcal{F}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \in \mathcal{F}(X)$ – выпуклое замкнутое ограниченное антипроксиминальное множество в X . По лемме 1 в X существует выпуклое гладкое компактное множество B .

Возьмем $M = A + B$. Очевидно, что M – выпуклое замкнутое ограниченное множество в X ; замкнутость M следует из замкнутости A и компактности B по лемме 3 [8, с. 449].

Докажем, что M – гладкое множество. Допустим противное: существует точка $y \in M$ и гиперплоскости $H_1, H_2 \subset X$, опорные к M в точке y .

По построению множества M имеем $y = x + z$, где $x \in A, z \in B$.

Пусть $f_1, f_2 \in S(X^*)$, $f_1(y) = \sup\{f_1(v) : v \in M\}$, $f_2(y) = \sup\{f_2(v) : v \in M\}$. Имеем

$$\begin{aligned}\sup\{f_1(v) : v \in M\} &= \sup\{f_1(v) : v \in A\} + \sup\{f_1(v) : v \in B\}, \\ f_1(x) &\leq \sup\{f_1(v) : v \in A\}, \quad f_1(z) \leq \sup\{f_1(v) : v \in B\}.\end{aligned}$$

Следовательно, $f_1(x) = \sup\{f_1(v) : v \in A\}$, $f_1(z) = \sup\{f_1(v) : v \in B\}$. Аналогично, $f_2(x) = \sup\{f_2(v) : v \in A\}$, $f_2(z) = \sup\{f_2(v) : v \in B\}$. В силу гладкости множества B получаем, что $f_1 = f_2$. Тогда $H_1 = H_2$, противоречие; M – гладкое множество.

Докажем, что множество M антипроксиминально. Допустим противное: существуют точки $w \in X \setminus M$ и $y \in P_M(w)$. По теореме Хана–Банаха найдется функционал $f \in S(X^*)$, разделяющий множество M , и шар $V(w, d(w, M))$. Тогда $f \in \Sigma(S)$ и можно считать, без потери общности, что $f(y) = \sup\{f(v) : v \in M\}$. По построению множества M имеем $y = x + z$, где $x \in A, z \in B$. Как в предыдущем пункте, получаем, что $f(x) = \sup\{f(v) : v \in A\}$, т.е. $f \in \Sigma(A)$, тогда по лемме 2 пришли к противоречию с антипроксиминальностью множества A . Следовательно, множество M антипроксиминально.

ЗАМЕЧАНИЯ. Если в предложении 1 дополнительно потребовать чтобы A было центрально-симметрично, то построенное M тоже будет центрально-симметричным, а если A – тело, то M – тоже тело.

В предложении 1 можно вместо сепарабельности X потребовать существование выпуклого гладкого слабо компактного множества.

СЛЕДСТВИЕ 1. В бесконечномерных пространствах $X = C(Q)$, где Q – метризуемый бикомпакт, и $X = C_0(T)$, T – метризуемое локально бикомпактное пространство, существует ограниченное гладкое выпуклое замкнутое антипроксиминальное тело.

Доказательство получается из предложения 1, теорем 1 и 4 из [3], так как X будет сепарабельным.

СЛЕДСТВИЕ 2. В пространствах $X = C(0, 1), c_0$, существует гладкое ограниченное выпуклое центрально-симметричное замкнутое антипроксиминальное тело.

Доказательство получается из предложения 1 и соответствующих результатов [2], так как X будет сепарабельным, а построенные в [2] антипроксиминальные множества являются центрально-симметричными телами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Edelstein M., Thompson A. C. // Pacific J. Math. 1972. V. 40. № 3. P. 553–560.
2. Фонф В. П. // Матем. заметки. 1983. Т. 33. № 4. С. 549–558.
3. Балаганский В. С. // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 5. С. 643–657.
4. Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств. Избранные главы. Киев: Вища школа, 1980.
5. Мильман В. Д. // УМН. 1970. Т. 25. № 3. С. 113–174.
6. Йосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
7. Балаганский В. С. // Матем. заметки. 1991. Т. 49. № 3. С. 135–144.
8. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Т. 1. М.: ИЛ, 1962.