Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. И. Голубов, О преобразованиях Харди и Беллмана пространств H^1 и ВМО, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 3, 475–478

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1306>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 16:35:06

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ХАРДИ И БЕЛЛМАНА ПРОСТРАНСТВ H^1 И ВМО

Б. И. Голубов

1. В работе [1] (см. также [2]) Харди доказал, что пространство L^p при $1 \leq p < \infty$ инвариантно относительно $(C, 1)$ -преобразования коэффициентов Фурье. Это преобразование можно рассматривать как линейный оператор $\mathcal{H}: L^p \rightarrow L^p$ ($1 \leq p < \infty$). Беллман [3] рассмотрел сопряженный оператор $\mathcal{B}: L^p \rightarrow L^q$ ($1/p + 1/q = 1$). В дальнейшем многие авторы изучали действие операторов $\mathcal{H}$ и $\mathcal{B}$ в других функциональных пространствах. Например, Андерсен [4] получил критерии, выраженные в терминах индексов Бойда симметрического пространства измеримых функций, гарантирующие инвариантность указанного пространства относительно операторов $\mathcal{H}$ или $\mathcal{B}$. Из его результатов в качестве следствия получались критерии на N -функцию Φ , при которых пространство Орлича L_Φ^* инвариантно относительно операторов $\mathcal{H}$ или $\mathcal{B}$. В работе автора [5] дан краткий обзор известных результатов об инвариантности различных функциональных пространств относительно операторов $\mathcal{H}$ или $\mathcal{B}$.

В данной статье изучается действие операторов $\mathcal{H}$ и $\mathcal{B}$ в пространствах H^1 и ВМО. Утверждается, что оператор $\mathcal{B}$ ограничен в пространстве ВМО функций ограниченной средней осцилляции, а оператор $\mathcal{H}$ не ограничен в этом пространстве. Кроме того, оператор $\mathcal{H}$ ограничен в пространстве H^1 , а оператор $\mathcal{B}$ не ограничен в этом пространстве.

2. Ниже через $L^p(T)$ ($1 \leq p \leq \infty$) обозначается пространство действительных 2π -периодических измеримых по Лебегу функций с конечной нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_T |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad T = [-\pi, \pi].$$

При этом, как обычно, функции, отличающиеся на множестве нулевой меры, считаются одним элементом пространства, а норма в $L^\infty(T)$ задается равенством

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in T} |f(t)|.$$

Разложим функцию $f \in L^p(T)$, $1 \leq p \leq \infty$, в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (1)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_T f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_T f(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Введем обозначения

$$\mathcal{H}_0(a) = a_0, \quad \mathcal{H}_n(a) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k, \quad \mathcal{H}_n(b) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Харди [1], [2] доказал следующую теорему.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00332.

ТЕОРЕМА А. Если функция $f \in L^p(T)$, $1 \leq p < \infty$, имеет ряд Фурье (1), то ряд

$$\frac{1}{2} \mathcal{H}_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n(a) \cos nx + \mathcal{H}_n(b) \sin nx \quad (2)$$

является рядом Фурье некоторой функции $\mathcal{H}(f) \in L^p(T)$.

При этом, как отметил Ф. Юнг [6], справедливо неравенство $\|\mathcal{H}(f)\|_p \leq C_p \|f\|_p$, т.е. определенный теоремой А оператор $\mathcal{H}: L^p(T) \rightarrow L^p(T)$ ограничен при $1 \leq p < \infty$.

В работе Беллмана [3] доказан двойственный результат. Для его формулировки введем обозначения

$$\mathcal{B}_0(a) = a_0, \quad \mathcal{B}_n(a) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{k}, \quad \mathcal{B}_n(b) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{b_k}{k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

ТЕОРЕМА Б. Если функция $f \in L^p(T)$, $1 < p \leq \infty$, имеет ряд Фурье (1), то ряд

$$\frac{1}{2} \mathcal{B}_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n(a) \cos nx + \mathcal{B}_n(b) \sin nx \quad (3)$$

является рядом Фурье некоторой функции $\mathcal{B}(f) \in L^p(T)$.

При этом линейный оператор $\mathcal{B}: L^p(T) \rightarrow L^p(T)$ также ограничен в $L^p(T)$ при $1 < p \leq \infty$.

3. Рассмотрим действие операторов $\mathcal{H}$ и $\mathcal{B}$ в пространствах $H^1(D)$ и $\text{ВМО}(T)$. Напомним определение пространства $H^1(D)$.

Пространство $H^1(D)$ состоит из функций $f(z)$, аналитических в круге $D = \{z : |z| < 1\}$ комплексной плоскости и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{H^1} \equiv \sup_{0 \leq r < 1} \int_T |f(re^{i\varphi})| d\varphi < \infty.$$

Разложим функцию $f \in H^1(D)$ в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad z \in D, \quad (4)$$

и положим

$$\mathcal{H}_0(c) = c_0, \quad \mathcal{H}_n(c) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

ТЕОРЕМА 1. Если функция $f \in H^1(D)$ имеет ряд Тейлора (4), то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n(c) z^n$$

является рядом Тейлора некоторой функции $\mathcal{H}(f) \in H^1(D)$, причем $\|\mathcal{H}(f)\|_{H^1} \leq C \|f\|_{H^1}$, где $C > 0$ — абсолютная постоянная.

Определим теперь пространство $\text{ВМО}(T)$ функций ограниченной средней осцилляции. Его элементами являются такие функции $f \in L(T)$, для которых

$$\|f\|_* = \sup_{I \subset T} \inf_c \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - c| dx < \infty, \quad (5)$$

где $I = (a, b)$, $|I| = b - a > 0$, а инфимум берется по всем постоянным $c \in \mathbb{R}$.

Очевидно, что из условия $\|f\|_* = 0$ следует $f(x) = \text{const}$ почти всюду на $\mathbb{R}$. Мы будем отождествлять функции из $\text{ВМО}(T)$, отличающиеся почти всюду на константы. Тогда равенство (5) будет задавать норму в $\text{ВМО}(T)$, относительно которой это пространство является полным. Пространство $\text{ВМО}(T)$ введено Джоном и Ниренбергом [7].

ТЕОРЕМА 2. Если функция $f \in \text{ВМО}(T)$ имеет ряд Фурье (1), то ряд (3) является рядом Фурье некоторой функции $\mathcal{B}(f) \in \text{ВМО}(T)$, причем линейный оператор $\mathcal{B}: \text{ВМО}(T) \rightarrow \text{ВМО}(T)$ ограничен.

Известно (см., например, [8, с. 542]), что пространство $H^1(D)$ изоморфно действительному пространству $H^1(T)$, которое состоит из таких функций $f \in L(T)$, для которых сопряженные функции

$$\tilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x-t) - f(x+t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt$$

также принадлежат пространству $L(T)$. Норма в пространстве $H^1(T)$ задается равенством $\|f\|_{H^1(T)} = \|f\|_1 + \|\tilde{f}\|_1$.

Учитывая это, теорема 1 может быть сформулирована в следующей эквивалентной форме.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $f \in H^1(T)$ имеет ряд Фурье (1). Тогда ряд (2) является рядом Фурье некоторой функции $\mathcal{H}(f) \in H^1(T)$, причем линейный оператор $\mathcal{H}: H^1(T) \rightarrow H^1(T)$ ограничен.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если функция $f \in H^1(T)$ имеет ряд Фурье (1), то ряд (3) не обязан быть рядом Фурье какой-либо функции из пространства $H^1(T)$.

Справедливость этого замечания легко устанавливается на примере функции

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln^2 n}, \quad x \neq 0 \pmod{2\pi}.$$

Как известно (см. [8, с. 652]), $f \in H^1(T)$. Легко показать, что ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} B_n \cos nx, \quad B_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}, \quad n \in \mathbb{N},$$

не является рядом Фурье функции из пространства $H^1(T)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если функция $f \in H^1(D)$ имеет ряд Тейлора (4), то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(c) z^n, \quad B_0(c) = c_0, \quad B_n(c) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{c_k}{k}, \quad n \in \mathbb{N},$$

не обязан быть рядом Тейлора какой-либо функции из пространства $H^1(D)$.

Это следует из замечания 1 на основании изоморфизма пространств $H^1(T)$ и $H^1(D)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если функция $f \in \text{ВМО}(T)$ имеет ряд Фурье (1), то ряд (2) не обязан быть рядом Фурье какой-либо функции из пространства $\text{ВМО}(T)$.

Справедливость этого замечания можно установить на примере 2π -периодической функции f , которая на отрезке T совпадает с функцией $\ln |x|$. Тот факт, что эта функция принадлежит пространству $\text{ВМО}(T)$, хорошо известен (см., например, [9, с. 200]).

4. Для доказательства теорем 1 и 2 используются следующие леммы.

ЛЕММА 1. Если $f \in \text{ВМО}(T)$, $a, g \in L(T)$, то $\|f * g\|^* \leq \|g\|_1 \cdot \|f\|^*$, где

$$(f * g)(x) = \int_T f(x-t)g(t) dt$$

– свертка функций f и g , $a \parallel \cdot \parallel^*$ – эквивалентная норма в пространстве $\text{ВМО}(T)$, которая задается равенством

$$\|f\|^* = \sup_{0 < |I| \leq 2\pi} \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - f_I| dx, \quad f_I = \frac{1}{|I|} \int_I f(x) dx, \quad I = (a, b), \quad |I| = b - a.$$

Пусть $\text{ВМО}(T)_0$ – подпространство таких функций из $\text{ВМО}(T)$, для которых среднее значение на периоде равно 0, т.е. $f_T = 0$. Далее через $\text{ВМО}_+(T)_0$ (через $\text{ВМО}_-(T)_0$) обозначим подпространство четных (соответственно нечетных) функций из $\text{ВМО}(T)_0$. Для функций $f \in \text{ВМО}_\pm(T)_0$ положим

$$\mathcal{B}_1(f)(x) = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \int_0^x f(t) dt, \quad \tilde{\mathcal{B}}_1(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, \quad 0 < |x| \leq \pi.$$

ЛЕММА 2. Если $f \in \text{ВМО}_\pm(T)_0$, то $\|\mathcal{B}_1(f) - \tilde{\mathcal{B}}_1(f)\|^* \leq 2\pi C \|f\|^*$, где

$$C = \sup_{0 < |x| < \pi} \left| \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \frac{1}{x} \right| < +\infty.$$

Кроме того, используется интегральное представление операторов Харди $\mathcal{H}$ и Беллмана $\mathcal{B}$ в подпространствах $L_\pm^p(T)$ четных и нечетных функций из $L^p(T)$ (см. [10]).

Теоремы 3 и 2 доказываются сначала для подпространств $H_\pm^1(T)$ и $\text{ВМО}_\pm(T)$ соответственно четных и нечетных функций, а затем используются разложения в прямые суммы

$$H^1(T) = H_+^1(T) \oplus H_-^1(T), \quad \text{ВМО}(T) = \text{ВМО}_+(T) \oplus \text{ВМО}_-(T).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hardy G. H. // Messenger of Math. 1919. V. 49. P. 149–155.
2. Hardy G. H. // Messenger of Math. 1928. V. 58. P. 50–52.
3. Bellman R. // Bull. Amer. Math. Soc. 1944. V. 50. P. 741–744.
4. Andersen K. F. // Pacific J. Math. 1982. V. 100. № 2. P. 243–248.
5. Голубов Б. И. // Ряды Фурье: теория и приложения. Киев: ИМ НАН Украины, 1992. С. 18–26.
6. Young F. H. // Proc. Amer. Math. Soc. 1952. V. 3. P. 783–791.
7. John F., Nirenberg L. // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 415–426.
8. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
9. Torchinsky A. Real-Variable Methods in Harmonic Analysis. New York: Acad. Press, 1986.
10. Голубов Б. И. // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 11. С. 31–40.

Московский физико-технический институт

Поступило

29.03.96

Исправленный вариант

28.11.97