Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Коваль, Об асимптотическом пределе матричных элементов канонического оператора для комплексного ростка в точке, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 3, 479–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1307>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 13:20:26

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПРЕДЕЛЕ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КАНОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ДЛЯ КОМПЛЕКСНОГО РОСТКА В ТОЧКЕ

Г. В. Коваль

Рассмотрим функции из $L^2(\mathbb{R}^n)$, соответствующие комплексному росту [1] в точке:

$$\psi_\nu(x) = N_\nu e^{iS(x)/h} \overline{\Lambda}_1^{\nu_1} \dots \overline{\Lambda}_n^{\nu_n} 1, \quad (1)$$

где $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ – мультииндекс, N_ν – нормировочная константа, действие $S(x)$ имеет вид

$$S(x) = \langle p_0, x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle x - x_0, BC^{-1}(x - x_0) \rangle,$$

а дифференциальные операторы $\overline{\Lambda}_j$ выражаются следующим образом:

$$\overline{\Lambda}_j = \frac{\sqrt{h}}{i} \left\langle \overline{z}_j, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{h}} \langle \overline{w}_j - BC^{-1} \overline{z}_j, x - x_0 \rangle, \quad j = \overline{1, n}.$$

Здесь матрицы B и C построены из n -мерных столбцов $w_i, z_i, i = \overline{1, n}$, соответственно, которые удовлетворяют условиям

$$\langle w_i, z_j \rangle - \langle w_j, z_i \rangle = 0, \quad \langle w_i, \overline{z}_j \rangle - \langle \overline{w}_j, z_i \rangle = 2i\delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Функции вида (1) при $h \rightarrow 0$ являются приближенными собственными функциями уравнений на собственные значения в различных задачах, в том числе в задачах квантовой теории поля и задачах о большом числе тождественных бозонов [2], когда размерность пространства n бесконечна. В этих случаях в качестве $z_i, w_i, i = \overline{1, n}$, берутся решения соответствующей данной задаче системы в вариациях [1]. Пусть $L(p, x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ есть символ h -псевдодифференциального оператора (см. [3]), $\hat{L} = L(\frac{2}{h}p, \frac{1}{h}x)$. Тогда для матричных элементов оператора $\hat{L}$ на функциях (1),

$$\langle \psi_\mu, \hat{L} \psi_\nu \rangle = \iint dx dp L(p, x) \psi_\nu(x) \tilde{\psi}_\mu^*(p) \frac{e^{-\frac{i}{h} \langle p, x \rangle}}{(2\pi h)^{n/2}},$$

можно найти предел при $h \rightarrow 0$. Именно, легко показать, что

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{|\mu - \nu|/2}} \iint dp dx L(p, x) \psi_\nu(x) \tilde{\psi}_\mu^*(p) \frac{e^{-\frac{i}{h} \langle p, x \rangle}}{(2\pi h)^{n/2}} \\ = \prod_{i=1}^n \alpha_i(\nu_i, \mu_i) (A_i(\nu_i, \mu_i))^{|\mu_i - \nu_i|} F(x, p) \Big|_{(x, p) = (x_0, p_0)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где константы $\alpha_i(\nu_i, \mu_i)$ имеют вид

$$\alpha_i(\nu_i, \mu_i) = \left(\frac{1}{i\sqrt{2}} \right)^{|\mu_i - \nu_i|} \frac{1}{|\mu_i - \nu_i|!} \left(\sqrt{\frac{\mu_i!}{\nu_i!}} \right)^{\text{sign}(\mu_i - \nu_i)},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке объединенного проекта фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-91.

операторы $A_i(\nu_i, \mu_i)$ выражаются следующим образом:

$$A_i(\nu_i, \mu_i) = \begin{cases} 1, & \nu_i = \mu_i, \\ \left\langle z_i, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + \left\langle w_i, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle, & \nu_i < \mu_i, \\ \left\langle \bar{z}_i, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \bar{w}_i, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle, & \mu_i < \nu_i, \end{cases} \quad (3)$$

и $|\mu - \nu| = \sum_{i=1}^n |\mu_i - \nu_i|$. В частности, в задаче для n -мерного осциллятора функции (1) являются точными решениями уравнения Шрёдингера. Из (2) видно, что функции Вигнера

$$\rho_{\nu\mu}(p, x) = \frac{1}{h^{|\mu-\nu|/2}} \psi_{\nu}(x) \tilde{\psi}_{\mu}^*(p) \frac{e^{-\frac{i}{h}\langle p, x \rangle}}{(2\pi h)^{n/2}}$$

при $h \rightarrow 0$ сходятся в слабом смысле к обобщенным функциям

$$\lim_{h \rightarrow 0} \rho_{\nu\mu}(p, x) = (-1)^{|\mu-\nu|} \prod_{i=1}^n \alpha_i(\nu_i, \mu_i) (A_i(\nu_i, \mu_i))^{|\mu_i - \nu_i|} \delta(p) \delta(x), \quad (4)$$

где операторы $A_i(\nu_i, \mu_i)$ даются формулой (3), в которой в качестве z_i, w_i взяты решения соответствующей системы в вариациях [1]. Так как функции Вигнера при $h \rightarrow 0$ сходятся в слабом смысле к собственным функциям оператора Лиувилля, функции (4), очевидно, являются обобщенными собственными функциями оператора Лиувилля для осциллятора. В этом смысле операторы (3) можно назвать *операторами рождения для уравнения Лиувилля*, поскольку собственные значения оператора Лиувилля, соответствующие (4), суть

$$\lambda_{\nu\mu} = \sum_{i=1}^n \beta_i(\nu_i - \mu_i),$$

где β_i – собственные значения системы в вариациях [1]. Отметим также, что в одномерном случае обобщенная функция

$$\rho_k(p, x) = \frac{1}{\varepsilon^{|k|/2}} \delta\left(\frac{x^2 + p^2}{2} - \varepsilon\right) e^{ik\varphi},$$

где k – целое число, а φ – угловая переменная, является собственной функцией оператора Лиувилля на уровне энергии ε и слабо сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к функциям вида (4).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977. 2. Маслов В. П., Шведов О. Ю. // ТМФ. 1995. Т. 104. № 3. С. 479–506. 3. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
05.01.98