Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Бекларян, Групповые особенности дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Введение в линейную теорию, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 4, 483–493

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1308>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 15:15:27

УДК 517.927.6

ГРУППОВЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ. ВВЕДЕНИЕ В ЛИНЕЙНУЮ ТЕОРИЮ

Л. А. Бекларян

В работе для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом описан подход, учитывающий структуру группы гомеоморфизмов, порожденной функциями отклонения аргумента. Приведенный формализм особенно нагляден и прост для циклической группы. В рамках такого формализма в классе линейных дифференциальных уравнений с целочисленными отклонениями удается описать регулярные расширения класса обыкновенных дифференциальных уравнений.

Библиография: 8 названий.

Среди дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом наиболее исследованными являются уравнения с запаздывающим аргументом [1]–[3]. В работах [4]–[6] исследовалось уравнение опережающе-запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = f(t, x(g_1(t)), \dots, x(g_s(t))), \quad t \in B_{\mathbb{R}}, \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\dot{x}(t) = \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R} \setminus B_{\mathbb{R}}, \quad (2)$$

$$x(\bar{t}) = \bar{x}, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

где $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – отображение класса $C^{(0)}$; $\varphi(\cdot) \in L_{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$; $g_i(\cdot)$, $1 \leq i \leq s$, – гомеоморфизмы прямой, сохраняющие ориентацию, причем

$$r_i = \sup_{t \in \mathbb{R}} |t - g_i(t)| < +\infty;$$

$B_{\mathbb{R}}$ – интервал, либо полупрямая, либо прямая.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00625.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Абсолютно непрерывная функция $x(\cdot)$, определенная на $\mathbb{R}$, называется *решением* уравнения (1), если при почти всех $t \in B_{\mathbb{R}}$ функция $x(\cdot)$ удовлетворяет этому уравнению. Если $x(\cdot) \in C^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, то такое решение называется *решением класса $C^{(k)}$* .

Подход, описанный в работах [4]–[6], использует группу $G = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$, порожденную гомеоморфизмами $g_1, \dots, g_s$. Для таких уравнений описаны препятствия, в силу которых они не наследуют всех замечательных свойств обыкновенных дифференциальных уравнений. Важнейшим из этих препятствий является отсутствие условий типа неравенства Гронуолла. Получены [4]–[8] неуклучшаемые условия, определяющие подклассы класса дифференциальных уравнений опережающе-запаздывающего типа, для которых сохраняются те или иные замечательные свойства решений обыкновенных дифференциальных уравнений (существование и единственность в выделенном классе функций, непрерывная зависимость решения от начальных условий, точечная полнота решений, n -параметричность пространства решений, “гладкость” решения, свойство “грубости” уравнения и т.д.). Фактически, указанные условия определяют способы регулярного расширения класса обыкновенных дифференциальных уравнений в классе дифференциальных уравнений опережающе-запаздывающего типа в смысле сохранения тех или иных свойств обыкновенных дифференциальных уравнений.

Вместе с тем очень важны исследования уравнений с отклоняющимся аргументом и в случае отсутствия условий типа неравенства Гронуолла. В данной работе результаты подобного типа доказываются для линейных уравнений с постоянными коэффициентами и циклической группой G . Показано, что всякое решение линейного уравнения вида (1) аппроксимируется решениями “максимальной” гладкости (теорема 1). В случае конечного интервала определения для линейного однородного уравнения вида (1) с однородным краевым условием вида (2) дана точная оценка размерности пространства решений как снизу (равная n), так и сверху (предложение 2). Условие вырожденности, когда размерность пространства решений не равна n , характерно только для уравнений опережающе-запаздывающего типа (очевидно, что для обыкновенных дифференциальных уравнений соответствующее условие невырожденно). Вместе с тем показано, что для “типичных” дифференциальных уравнений опережающе-запаздывающего типа указанное условие является невырожденным (теорема 3). Для линейного однородного уравнения вида (1), определенного на интервале или полупрямой, в классе бесконечно дифференцируемых решений доказана корректность краевой задачи с однородными краевыми условиями вида (2), (3) (теорема 2).

1. Постановка задачи и некоторые предварительные сведения. Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^s A_i x(t + n_i) + \psi(t), \quad t \in B_{\mathbb{R}}, \quad (4)$$

с краевыми условиями

$$\dot{x}(t) = \varphi(t), \quad t \in B \setminus B_{\mathbb{R}}, \quad (5)$$

$$x(\bar{t}) = \bar{x}, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

где A_i – n -мерная матрица, $n_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq s$; $\psi, \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi, \varphi \in C^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 0$; $B_{\mathbb{R}}$ – либо интервал $[m_0, m_1]$, $m_0, m_1 \in \mathbb{Z}$, либо полупрямая $[m_0, +\infty]$, $m_0 \in \mathbb{Z}$, либо прямая. Не нарушая общности, можно считать, что $n_1 < \dots < n_s$. Если уравнение

определено на полупрямой $[-\infty, m_1]$, $m_1 \in \mathbb{Z}$, то заменой $t \rightarrow -t$ оно сводится к случаю полупрямой $[-m_1, +\infty[$.

Для любых $\delta \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$ определим банахово пространство

$$\mathcal{F}_\delta^{(k)}(\mathbb{R}) = \{y(\cdot) \in C^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : \exists N_y > 0 \quad \|y^{(r)}(t)\|_{\mathbb{R}^n} < N_y e^{\delta|t|}, 0 \leq r \leq k\}$$

с нормой

$$\|y\|_\delta^{(k)} = \max_{0 \leq r \leq k} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|y^{(r)}(t) e^{-\delta|t|}\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Рассмотрим векторное пространство $K^n = \prod_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{R}^n$ со стандартной топологией прямого произведения. Элементами пространства K^n являются бесконечные последовательности $\kappa = \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}$, где $x_i \in \mathbb{R}^n$. Будем обозначать i -ю компоненту вектора κ , саму являющуюся n -мерным вектором, через κ_i для любых $i \in \mathbb{Z}$, $\kappa \in K^n$. Если e^r , $1 \leq r \leq n$, — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$, то в пространстве K^n определим естественный базис e_k^r , $1 \leq r \leq n$, $k \in \mathbb{Z}$: для любого $i \in \mathbb{Z}$ $(e_k^r)_i = \delta_i^r e^r$, где δ_i^r — символ Кронекера.

Пусть $\mathcal{B}$ — σ -алгебра всех подмножеств множества $\mathbb{Z}$. Для $B \in \mathcal{B}$ будем обозначать дополнение к B в $\mathbb{Z}$ через $\overline{B}$, т.е. $\overline{B} = \mathbb{Z} \setminus B$. Каждому $B \in \mathcal{B}$ поставим в соответствие непрерывный проектор P_B , действующий в K^n по правилу:

$$(P_B \kappa)_i = \begin{cases} x_i, & i \in B, \\ 0, & i \notin B, \end{cases} \quad \kappa \in K^n, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

В пространствах K^n и $\mathbb{R}$ определим операторы сдвига T и τ :

$$(T\kappa)_i = x_{i+1}, \quad \tau(t) = t + 1, \quad \kappa \in K^n, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Справедливо правило перестановочности $TP_B = P_{\tau^{-1}(B)}T$.

Для любого $\mu \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+ =]0, +\infty[$, определим подпространство K_μ^n пространства K^n :

$$K_\mu^n = \left\{ \kappa \in K^n : \sum_{-\infty}^{+\infty} \|x_i\|_{\mathbb{R}^n}^2 \mu^{2|i|} < +\infty \right\}$$

(положим по определению $K_0^n = K^n$). Пространство K_μ^n является гильбертовым со скалярным произведением

$$(\kappa, \kappa')_\mu = \sum_{-\infty}^{+\infty} (x_i, x'_i) \mu^{2|i|}.$$

Ограничения непрерывных операторов T, P_B на подпространство K_μ^n являются непрерывными отображениями K_μ^n в себя.

Следуя [6], для любых $k \geq 0$, $\mu \in [0, +\infty[$ определим замкнутые подпространства функций

$$D_\mu^k = \left\{ \kappa(\cdot) \in C^{(k)}([0, 1], K_\mu^n) : \left. \frac{d^r}{dt^r} \kappa(t) \right|_{t=1} = T \left(\left. \frac{d^r}{dt^r} \kappa(t) \right|_{t=0} \right), \quad 0 \leq r \leq k \right\}$$

и линейный непрерывный оператор $\Theta_\mu^{(k)} : D_\mu^k \rightarrow C^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, действующий по правилу $\Theta_\mu^{(k)}|_t = x_{[t]}(t - [t])$, где $[\cdot]$ — целая часть числа.

Пусть $\psi \in C^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Положим $F = (\Theta_0^{(k)})^{-1}\psi$. В [6] показано, что оператор $\Theta_\mu^{(k)}$ действует из пространства D_μ в пространство $\mathcal{F}_\delta^{(k)}(\mathbb{R})$, где $\mu < e^{-\delta}$; если $\psi \in \mathcal{F}_\delta^{(k)}(\mathbb{R})$, $\delta \in \mathbb{R}$, то $F \in D_\mu^{(k)}$ при $\mu < e^{-\delta}$. Линейный ограниченный оператор $A \in \mathcal{L}(K_\mu^n, K_\mu^n)$ в базисе e_k^r , $1 \leq r \leq n$, $k \in \mathbb{Z}$, задается бесконечномерной блочной матрицей $\|a_{i,j}\|$, $i, j \in \mathbb{Z}$, где каждый элемент $a_{i,j}$ является квадратной матрицей размера n с элементами $a_{i,j}^{mp}$, $1 \leq m, p \leq n$. Определим оператор $A \in \mathcal{L}(K_\mu^n, K_\mu^n)$ следующим образом:

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^s \delta_{i+n_k}^j A_k, \quad (7)$$

где $\delta_{i+n_k}^j$ – символ Кронекера, а матрицы A_k , $1 \leq k \leq s$, взяты из уравнения (4). Такие операторы относятся к классу тепличевых операторов. Оператор A перестановочен со сдвигом, т.е. $T \circ A = A \circ T$. В дальнейшем, для уравнения (4) под B будем понимать множество $B = (B_\mathbb{R} \cap \mathbb{Z}) \setminus m_1$.

Пусть $F, v \in D_\mu^{(k)}$, $k \geq 0$, $\mu \in]0, 1[$, а оператор A тот же, что и в (7). В банаховом пространстве K_μ^n рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = P_B A x(t) + P_B F(t) + P_{\bar{B}} v(t), \quad t \in [0, 1], \quad (8)$$

с краевым условием

$$T x(0) = x(1) \quad (9)$$

(краевое условие (9) эквивалентно тому, что $x(\cdot) \in D_\mu^{(0)}$).

В работе [6] показано, что исследование краевой задачи (4), (5) в пространствах $\mathcal{F}_\delta^{(k)}(\mathbb{R})$, $\delta > 0$, эквивалентно исследованию краевой задачи (8), (9) в K_μ^n , где $\mu \in]0, 1[$, $\mu < e^{-\delta}$, $F = (\Theta_\mu^{(k)})^{-1}\psi$, $v = (\Theta_\mu^{(k)})^{-1}\varphi$.

В рамках такого формализма для линейных дифференциальных уравнений опережающе-запаздывающего типа удастся получить теорему существования решения типа теоремы Нётер.

Решение уравнения (8) имеет вид

$$x(t) = e^{P_B A t} x(0) + \int_0^t e^{P_B A(t-\xi)} (P_B F(\xi) + P_{\bar{B}} v(\xi)) d\xi. \quad (10)$$

Функция $x(t)$ из (10) является решением краевой задачи (8), (9) тогда и только тогда, когда $x_0 = x(0)$ удовлетворяет уравнению

$$(E - T^{-1} e^{P_B A}) x_0 = \int_0^1 T^{-1} e^{P_B A(1-\xi)} (P_B F(\xi) + P_{\bar{B}} v(\xi)) d\xi. \quad (11)$$

2. Теорема о гладкости решения. Для обыкновенных дифференциальных уравнений решения имеют “максимальную” гладкость, которая на единицу больше гладкости правой части. Для уравнений опережающе-запаздывающего типа, даже при аналитической правой части, решение может быть лишь абсолютно непрерывным. Поэтому следует переформулировать теорему о гладкости решения так, чтобы уравнения опережающе-запаздывающего типа, в смысле этого свойства, определяли регулярное расширение класса обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом пункте сформулированы необходимые и достаточные условия гладкости для произвольного решения в виде системы алгебраических соотношений (предложение 1), доказана теорема об

аппроксимации произвольного решения решениями “максимальной” гладкости. Будем рассматривать исходное уравнение (4) на интервале, полупрямой и прямой одновременно. Операторы A, P_B, T те же, что и в п. 1, функции $\varphi(\cdot), \psi(\cdot)$ принадлежат пространствам $\mathcal{F}_+^{(k)}(\mathbb{R}) = \bigcap_{\delta \in \mathbb{R}} \mathcal{F}_\delta^{(k)}(\mathbb{R}), \mathcal{F}_\delta^{(k)}(\mathbb{R}), k \geq 0$, соответственно. Если функция $x(\cdot)$ является решением краевой задачи (4)–(6) и $x(\cdot) \in \mathcal{F}_\delta^{(0)}(\mathbb{R})$, то положим

$$\tilde{x} = \{x(i)\}_{-\infty}^{+\infty}, \quad \tilde{F}^{(r)} = \{\psi^{(r)}(i)\}_{-\infty}^{+\infty}, \quad \tilde{v}^{(r)} = \{\varphi^{(r)}(i)\}_{-\infty}^{+\infty}, \quad 0 \leq r \leq k.$$

Очевидно, что для любого $\mu < e^{-\delta}$ элементы $\tilde{x}, \tilde{F}^{(r)}, \tilde{v}^{(r)}, 0 \leq r \leq k$, принадлежат пространству K_μ^n .

ЛЕММА 1. Пусть $F(\cdot), v(\cdot) \in D_\mu^{(k)}, k \geq 0, \mu \in]0, 1[$. Для того чтобы решение $\kappa(\cdot)$ краевой задачи (8), (9) принадлежало пространству $D_\mu^{(q)}, 1 \leq q \leq k+1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система алгебраических соотношений

$$\begin{aligned} ((P_B A)^r T - T(P_B A)^r) \kappa(0) &= \sum_{j=0}^{r-1} (T(P_B A)^j P_B - (P_B A)^j P_B T) F^{(r-j-1)}(0) \\ &+ \sum_{j=0}^{r-1} (T(P_B A)^j P_{\bar{B}} - (P_B A)^j P_{\bar{B}} T) v^{(r-j-1)}(0), \quad 1 \leq r \leq q. \end{aligned} \quad (12)$$

Доказательство леммы следует из представления (10) и определения пространства $D_\mu^{(q)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $B = \mathbb{Z}$, то решение $\kappa(\cdot)$ краевой задачи (8), (9) для любого $k \geq 0$ принадлежит пространству $D_\mu^{(k+1)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\varphi(\cdot) \in \mathcal{F}_+^{(k)}(\mathbb{R}), \psi(\cdot) \in \mathcal{F}_\delta^{(k)}(\mathbb{R}), \delta > 0, k \geq 0$. Для того чтобы решение $x(\cdot) \in \mathcal{F}_\delta^{(0)}(\mathbb{R})$ краевой задачи (4), (5) принадлежало пространству $\mathcal{F}_\delta^{(q)}(\mathbb{R}), 1 \leq q \leq k+1$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\mu, 0 < \mu < e^{-\delta}$, в пространстве K_μ^n выполнялась система алгебраических соотношений

$$\begin{aligned} ((P_B A)^r T - T(P_B A)^r) \tilde{x} &= \sum_{j=0}^{r-1} (T(P_B A)^j P_B - (P_B A)^j P_B T) \tilde{F}^{(r-j-1)} \\ &+ \sum_{j=0}^{r-1} (T(P_B A)^j P_{\bar{B}} - (P_B A)^j P_{\bar{B}} T) \tilde{v}^{(r-j-1)}, \quad 1 \leq r \leq q. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу результатов из [6] для любого $\mu < e^{-\delta}$ тройка $\kappa(\cdot) = (\Theta_\mu^{(k)})^{-1} x(\cdot), F(\cdot) = (\Theta_\mu^{(k)})^{-1} \psi(\cdot), v(\cdot) = (\Theta_\mu^{(k)})^{-1} \varphi(\cdot)$ удовлетворяет условиям леммы 1, т.е. существует решение $\kappa \in D_\mu^{(k+1)}$, удовлетворяющее всем условиям леммы. Тогда для любого $\bar{\delta} > \ln \mu^{-1}$ функция $x(\cdot) = \Theta_\mu^{(k+1)} \kappa(\cdot)$ является решением краевой задачи (4), (5), принадлежит пространству $\mathcal{F}_{\bar{\delta}}^{(k+1)}(\mathbb{R})$ и удовлетворяет уравнению (4). Так как решение $x(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (4), а функции $\varphi(\cdot), \psi(\cdot)$ – условиям предложения 1, то $x(\cdot) \in \mathcal{F}_\delta^{(k+1)}(\mathbb{R})$. Предложение доказано.

ЛЕММА 2. Для любых фиксированных $\overline{x} \in K_\mu^n$, $\mathcal{X}^i \in K_\mu^n$, $i \geq 0$, $\mu \in]0, 1[$, существуют $w^i \in K_\mu^n$, $i \geq 0$, такие, что при $r \geq 1$ справедливо уравнение

$$\begin{aligned} ((P_B A)^r T - T(P_B A)^r) \overline{x} &= \sum_{j=0}^{r-1} (T(P_B A)^j P_B - (P_B A)^j P_B T) \mathcal{X}^{r-j-1} \\ &+ \sum_{j=0}^{r-1} (T(P_B A)^j P_{\bar{B}} - (P_B A)^j P_{\bar{B}} T) w^{r-j-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем методом математической индукции. Пусть $\overline{x}$ и $\mathcal{X}^i$, $i \geq 0$, фиксированы. Для $r = 1$ уравнение (13) принимает вид

$$((P_B A)T - T(P_B A)) \overline{x} = (TP_B - P_B T) \mathcal{X}^0 + (TP_{\bar{B}} - P_{\bar{B}} T) w^0.$$

Используя правила перестановочности для операторов T , A , P_B , приведем это уравнение к виду

$$(P_B - P_{\tau^{-1}(B)}) A T \overline{x} = (P_{\tau^{-1}(B)} - P_B) T \mathcal{X}^0 + (P_{\tau^{-1}(\bar{B})} - P_{\bar{B}}) T w^0. \quad (14)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} (\tau^{-1}(B) \setminus B) \cap (B \setminus \tau^{-1}(B)) &= \emptyset, \\ P_{\tau^{-1}(\bar{B})} - P_{\bar{B}} &= P_{\tau^{-1}(B)} - P_B = P_{\tau^{-1}(B) \setminus B} - P_{B \setminus \tau^{-1}(B)}. \end{aligned}$$

В таком случае уравнение (14) распадается на два независимых уравнения

$$\begin{aligned} P_{B \setminus \tau^{-1}(B)} A T \overline{x} &= -P_{B \setminus \tau^{-1}(B)} T \mathcal{X}^0 - P_{B \setminus \tau^{-1}(B)} T w^0, \\ P_{\tau^{-1}(B) \setminus B} A T \overline{x} &= -P_{\tau^{-1}(B) \setminus B} \mathcal{X}^0 - P_{\tau^{-1}(B) \setminus B} T w^0, \end{aligned}$$

разрешимость которых относительно w^0 очевидна. Пусть существуют $w^0, \dots, w^{k-1}$ такие, что уравнение (13) справедливо при всех $r \leq k$. Покажем, что существует w^k такое, что $w^0, \dots, w^{k-1}, w^k$ удовлетворяют уравнению (13) при всех $r \leq k+1$. Фактически, необходимо показать справедливость уравнения (13) при $r = k+1$. Так как уравнение (13) справедливо при $r = k$, умножая его слева на оператор $P_B A$ и используя перестановочные соотношения, получим

$$\begin{aligned} &((P_B A)^{k+1} T - T(P_B A)^{k+1}) \overline{x} + (P_{\tau^{-1}(B) \setminus B} - P_{B \setminus \tau^{-1}(B)}) T A (P_B A)^k \overline{x} \\ &= \sum_{j=1}^k (T(P_B A)^j P_B - (P_B A)^j P_B T) \mathcal{X}^{k-j} + \sum_{j=1}^k (T(P_B A)^j P_{\bar{B}} - (P_B A)^j P_{\bar{B}} T) w^{k-j} \\ &+ \sum_{j=1}^k (P_{B \setminus \tau^{-1}(B)} - P_{\tau^{-1}(B) \setminus B}) T A (P_B A)^{j-1} \mathcal{X}^{k-j} \\ &- \sum_{j=1}^k (P_{\bar{B} \setminus \tau^{-1}(\bar{B})} - P_{\tau^{-1}(\bar{B}) \setminus \bar{B}}) T A (P_B A)^{j-1} w^{k-j}. \end{aligned}$$

Это уравнение простыми преобразованиями приводится к виду

$$\begin{aligned}
 & ((P_B A)^{k+1} T - T(P_B A)^{k+1}) \bar{\varkappa} \\
 &= \sum_{j=0}^k (T(P_B A)^j P_B - (P_B A)^j P_B T) \mathcal{Z}^{k-j} + \sum_{j=0}^k (T(P_B A)^j P_{\bar{B}} - (P_B A)^j P_{\bar{B}} T) w^{k-j} \\
 &+ (P_{B \setminus \tau^{-1}(B)} - P_{\tau^{-1}(B) \setminus B}) T A (P_B A)^k \tilde{\varkappa} \\
 &+ \sum_{j=1}^k (P_{B \setminus \tau^{-1}(B)} - P_{\tau^{-1}(B) \setminus B}) T A (P_B A)^{j-1} P_B \mathcal{Z}^{k-j} \\
 &+ (P_{B \setminus \tau^{-1}(B)} - P_{\tau^{-1}(B) \setminus B}) T \mathcal{Z}^k \\
 &+ \sum_{j=1}^k (P_{\bar{B} \setminus \tau^{-1}(\bar{B})} - P_{\tau^{-1}(\bar{B}) \setminus \bar{B}}) T A (P_B A)^{j-1} P_B w^{k-j} \\
 &+ (P_{\bar{B} \setminus \tau^{-1}(\bar{B})} - P_{\tau^{-1}(\bar{B}) \setminus \bar{B}}) T w^k.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Можно подобрать w^k так, чтобы в правой части (15) сумма слагаемых, начиная с третьего, равнялась 0. Более того, при выборе w^k существенными являются его проекции $P_{\tau^{-1}(\bar{B}) \setminus \bar{B}} w^k$ и $P_{B \setminus \tau^{-1}(B)} w^k$. После подстановки такого w^k уравнение (15) преобразуется к виду (12) при $r \leq k+1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $B \in \mathcal{B}$, $F(\cdot), v(\cdot) \in D_\mu^{(k)}$, $k \geq 0$, $\mu \in]0, 1[$, и $\varkappa(\cdot) \in D_\mu^{(q)}$, $0 \leq q \leq k+1$, является решением краевой задачи (8), (9). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $v_\varepsilon(\cdot) \in D_\mu^{(k)}$ такая, что краевая задача (8), (9) имеет решение $\varkappa_\varepsilon(\cdot) \in D_\mu^{(k+1)}$ и выполняется оценка

$$\|\varkappa(\cdot) - \varkappa_\varepsilon(\cdot)\|_{D_\mu^{(q)}} < \varepsilon. \tag{16}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2 следует, что для $\bar{\varkappa} = \varkappa(0)$, $\mathcal{Z}^i = F^i(0)$, $0 \leq i \leq k$, существуют w^i , $0 \leq i \leq k$, такие, что справедливы уравнения (13).

Из доказательства леммы 2 следует, что при выборе w^i , $0 \leq i \leq k$, существенными являются их проекции $P_{\tau^{-1}(B) \setminus B} T w^i$, $P_{B \setminus \tau^{-1}(B)} T w^i$, а остальные координаты w^i можно взять равными 0. Так как решение $\varkappa$ принадлежит пространству $D_\mu^{(q)}$, из доказательства леммы 2 следует, что w^i , $0 \leq i \leq k$, можно выбрать так, чтобы для любого $0 \leq i \leq q$ выполнялось равенство $w^i = v^{(i)}(0)$, а $\varkappa(0)$ удовлетворяло равенствам (13). Заметим, что $\tau^{-1}(B) \setminus B = m_0 - 1$, $B \setminus \tau^{-1}(B) = m_1 - 1$ и соответственно $P_{m_0-1} T w^i = (w^i)_{m_0}$, $P_{m_1-1} T w^i = (w^i)_{m_1}$, $0 \leq i \leq k$.

Определим множество $B' = \{m_0, m_1\}$, $B'' = \{m_0 - 1, m_0, m_1 - 1, m_1\}$. Можно указать $\bar{v}_\varepsilon(\cdot) \in D_\mu^{(k)}$ такое, что

- 1) для любых $j \in \bar{B}''$, $0 \leq i \leq k$, $t \in [0, 1]$ выполняется условие $(\bar{v}_\varepsilon^{(i)}(t))_j = 0$;
- 2) для любых $j \in B'$, $0 \leq i \leq q$ выполняется условие $(\bar{v}_\varepsilon^{(i)}(0))_j = 0$;
- 3) для любых $j \in B'$, $q < i \leq k$ выполняется условие $(\bar{v}_\varepsilon^{(i)}(0))_j = (w^i)_j$;
- 4) для заданного $\delta > 0$

$$\int_0^1 \|\bar{v}_\varepsilon^{(k)}(\xi)\|_\mu d\xi < \delta, \tag{17}$$

$$\int_0^1 e^{P_B A(1-\xi)} P_{\bar{B}} \bar{v}_\varepsilon(\xi) d\xi = 0. \tag{18}$$

В таком случае для $v_\varepsilon(\cdot) = v(\cdot) + \bar{v}_\varepsilon(\cdot)$ выполняется условие $v_\varepsilon^{(i)} = w^i$, $0 \leq i \leq k$. В силу условия (18) и выбора w^i , $0 \leq i \leq k$, тройка $\bar{x} = \kappa(0)$, $\mathcal{X}^i = F^i(0)$, $w^i = v_\varepsilon^{(i)}(0)$, $0 \leq i \leq k$, удовлетворяет уравнениям (12). В свою очередь тройка $\kappa(0)$, F , v_ε удовлетворяет уравнению (11). Полученные соотношения эквивалентны условию существования решения κ_ε краевой задачи (8), (9) такого, что $\kappa_\varepsilon(0) = \kappa(0)$ и $\kappa_\varepsilon \in D_\mu^{(k+1)}$. Оценка (16) следует из представления (10) для решения κ_ε и оценки (17). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varphi(\cdot) \in \mathcal{F}_+^{(k)}(\mathbb{R})$, $\psi(\cdot) \in \mathcal{F}_\delta^{(k)}(\mathbb{R})$, $\delta > 0$, $k \geq 0$, и $x(\cdot) \in \mathcal{F}_\delta^{(q)}(\mathbb{R})$, $0 \leq q \leq k+1$, является решением краевой задачи (4), (5). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $\varphi_\varepsilon(\cdot) \in \mathcal{F}_+^{(k)}(\mathbb{R})$ (функция $\varphi_\varepsilon(\cdot)$ может быть выбрана так, что носитель функции $\varphi(\cdot) - \varphi_\varepsilon(\cdot)$ сосредоточится в сколь угодно малых окрестностях точек t_0 и t_1 в случае конечного интервала и в окрестности точки t_0 в случае полупрямой) такая, что краевая задача (4), (5) имеет решение $x_\varepsilon(\cdot) \in \mathcal{F}_{\delta'}^{(k+1)}(\mathbb{R})$ для любого $\delta' > \delta$ и выполняется оценка

$$\|x(\cdot) - x_\varepsilon(\cdot)\|_{\delta'}^{(q)} < \varepsilon. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу результатов из [6] для любого $\mu < e^{-\delta}$ тройка $\kappa(\cdot) = (\Theta_\mu^{(k)})^{-1}x(\cdot)$, $F(\cdot) = (\Theta_\mu^{(k)})^{-1}\psi(\cdot)$, $v(\cdot) = (\Theta_\mu^{(k)})^{-1}\varphi(\cdot)$ удовлетворяет условиям леммы 3, поэтому существует решение $\kappa_\varepsilon \in D_\mu^{(k+1)}$, удовлетворяющее всем условиям леммы. Тогда для любого $\bar{\delta} > \ln \mu^{-1}$ функция $x_\varepsilon(\cdot) = \Theta_\mu^{(k+1)}\kappa_\varepsilon(\cdot)$ является решением краевой задачи (4), (5), принадлежащим пространству $\mathcal{F}_{\bar{\delta}}^{(k+1)}(\mathbb{R})$, и удовлетворяет оценке $\|x(\cdot) - x_\varepsilon(\cdot)\|_{\bar{\delta}}^{(q)} \leq \varepsilon$. Заметим, что при любых $\mu < e^{-\delta}$ решения κ_ε одни и те же, откуда и следует, что $x_\varepsilon(\cdot) \in \mathcal{F}_{\delta'}^{(k+1)}(\mathbb{R})$ для любых $\delta' > \delta$ и выполняется оценка (19). Теорема доказана.

3. К вопросу о корректности краевой задачи для уравнения опережающе-запаздывающего типа. Для исследования множества решений краевой задачи (4), (5) важно оценить размерность пространства решений соответствующей однородной системы уравнений с однородным краевым условием (в случае конечного интервала см. предложение 2). Для уравнений опережающе-запаздывающего типа в краевой задаче (4), (5) условие точечной полноты может нарушаться (может отсутствовать решение, которое в момент $\bar{t}$ проходит через точку $\bar{x}$), а однородная система уравнений с однородными краевыми условиями, соответствующая краевой задаче (4)–(6), может и не быть корректной (существование решения отличного от нулевого). В случае конечного интервала или полупрямой корректность указанной краевой задачи удастся доказать в пространстве бесконечно дифференцируемых решений (теорема 2).

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^s A_i x(t + n_i), \quad t \in B_\mathbb{R}, \quad (20)$$

с однородными краевыми условиями

$$\dot{x}(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \setminus B_\mathbb{R}, \quad (21)$$

$$x(\bar{t}) = 0, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}, \quad (22)$$

соответствующее краевой задаче (4)–(6).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $B_{\mathbb{R}} = [m_0, m_1]$. Если $\mathcal{P}$ – пространство решений краевой задачи (20), (21), то $n \leq \dim \mathcal{P} \leq (m_1 - m_0 + 1)n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что для оператора $G = E - T^{-1}e^{P_B A}$, действующего в пространстве K_{μ}^n , $\mu \in]0, 1[$, справедлива оценка

$$n \leq \dim N(G) \leq (m(B) + 1)n \quad (23)$$

($N(\cdot)$ – ядро оператора). Уравнение $G\chi = 0$ эквивалентно уравнению

$$(P_{\bar{B}}(T - E) + P_B(T - e^{P_B A}))\chi = 0,$$

которое распадается на систему из двух уравнений

$$\begin{cases} P_{\bar{B}}(T - E)\chi = 0, \\ P_B(T - e^{P_B A})\chi = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Заметим, что $\dim N(P_{\bar{B}}(T - E)) = (m(B) + 1)n$. В системе (24) первое уравнение легко решается. После подстановки его решений во второе уравнение получим систему из $m(B)n$ линейных уравнений от $(m(B) + 1)n$ переменных (полученная система может оказаться и тривиальной), откуда следует оценка (23). Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $B = [m_0, m_1]$. Если все n_i , $1 \leq i \leq s$, имеют один и тот же знак, то $\dim \mathcal{P} = n$.

Утверждение непосредственно следует из системы (24).

Для любого $q \geq 0$ определим

$$\begin{aligned} L_{\mu}^q &= \{\chi \in K_{\mu}^n : ((P_B A)^r T - T(P_B A)^r)\chi = 0, 0 \leq r \leq q\}, \\ \mathcal{R}_{\mu}^q &= \{\chi \in L_{\mu}^r : 0 \leq r \leq q, (E - T^{-1}e^{P_B A})\chi = 0\}, \\ L_{\mu}^{\infty} &= \bigcap_{q=0}^{\infty} L_{\mu}^q, \quad \mathcal{R}_{\mu}^{\infty} = \bigcap_{q=0}^{\infty} \mathcal{R}_{\mu}^q. \end{aligned}$$

При $F, v \in D_{\mu}^{(0)}$ определим пространство $\mathcal{R}_{\mu F v}^0 = \{\chi \in K_{\mu}^n \text{ удовлетворяет уравнению (11)}\}$. Для $F, v \in D_{\mu}^{(q-1)}$, $q \geq 1$, положим $\mathcal{R}_{\mu F v}^q = \{\chi \in \mathcal{R}_{\mu F v}^{(0)} \text{ удовлетворяет системе (12)}\}$, $\mathcal{R}_{\mu F v}^{\infty} = \bigcap_{q=0}^{\infty} \mathcal{R}_{\mu F v}^q$.

Все определенные пространства полны и убывают с ростом q . Если $\overline{\chi} \in \mathcal{R}_{\mu F v}^q$, $q \geq 0$, то справедливо представление $\mathcal{R}_{\mu F v}^q = \overline{\chi} + \mathcal{R}_{\mu}^q$.

ЛЕММА 4. Подпространство $\mathcal{R}_{\mu}^{\infty}$ инвариантно относительно операторов $P_B A$ и T , т.е. $P_B A(\mathcal{R}_{\mu}^{\infty}) \subseteq \mathcal{R}_{\mu}^{\infty}$ и $T(\mathcal{R}_{\mu}^{\infty}) \subseteq \mathcal{R}_{\mu}^{\infty}$. Более того, на подпространстве $\mathcal{R}_{\mu}^{\infty}$ операторы $P_B A$ и T перестановочны, а оператор T обратим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что подпространство L_{μ}^{∞} инвариантно относительно оператора $P_B A$, ибо $P_B A(L_{\mu}^{q+1}) \subseteq L_{\mu}^q$, $q \geq 0$. Вместе с тем на элементах подпространства L_{μ}^{∞} операторы $P_B A$ и T перестановочны. Так как $\mathcal{R}_{\mu}^{\infty} \subseteq L_{\mu}^{\infty}$, из условия

$$(E - T^{-1}e^{P_B A})\chi = 0 \quad (25)$$

следует, что $P_B A(\mathcal{R}_{\mu}^{\infty}) \subseteq \mathcal{R}_{\mu}^{\infty}$. Кроме того, из условия (25) следует, что $T(\mathcal{R}_{\mu}^{\infty}) = \mathcal{R}_{\mu}^{\infty}$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $B_{\mathbb{R}}$ – интервал или полупрямая. Если решение $x(\cdot)$ краевой задачи (20), (21) принадлежит пространству $\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_{\delta}^{(k)}(\mathbb{R})$ при некотором $\delta > 0$, то оно является стационарным, т.е. $\dot{x}(t) \equiv 0$. В классе функций $x(\cdot)$, принадлежащих пространству $\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_{\delta}^{(k)}$ при некотором $\delta > 0$, решение краевой задачи (20)–(22) единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно результатам работы [6] каждому решению $x(\cdot) \in \mathcal{F}_{\delta}^{(k)}(\mathbb{R})$, $k \geq 0$, $\delta > 0$, соответствует решение $\kappa(\cdot) = (\Theta_{\mu}^{(k)})^{-1}x(\cdot)$, $\mu < e^{-\delta}$, краевой задачи (8), (9) (в данном случае уравнение (8) однородное, т.е. $F(\cdot) = 0$, $v(\cdot) = 0$). Так как $\kappa(\cdot) \in D_{\mu}^{(k)}$ для всех $k \geq 0$, то $\kappa(0) \in \mathcal{R}_{\mu}^{\infty}$.

Из определения пространства $\mathcal{R}_{\mu}^{\infty}$ следует, что для любого $\overline{x} \in \mathcal{R}_{\mu}^{\infty}$ справедливо условие $P_{\overline{B}}(T - E)\overline{x} = 0$. Действительно, если $\overline{x} \in \mathcal{R}_{\mu}^{\infty}$, то $(E - T^{-1}e^{P_B A})\overline{x} = 0$, что эквивалентно $(T - e^{P_B A})\overline{x} = 0$. Применяя к обеим частям этого соотношения оператор проектирования $P_{\overline{B}}$, получим требуемое утверждение.

По лемме 4 подпространство $\mathcal{R}_{\mu}^{\infty}$ инвариантно относительно операторов T и $P_B A$, и они перестановочны. Поэтому для любого $\overline{x} \in \mathcal{R}_{\mu}^{\infty}$ справедливы условия $(T - E)\overline{x} = 0$, $P_B A\overline{x} = 0$.

Решение уравнения (8) при $F(\cdot) = 0$, $v(\cdot) = 0$ имеет вид $\kappa(t) = e^{P_B A t} \kappa(0)$. Так как $\kappa(0) \in \mathcal{R}_{\mu}^{\infty}$, то $\kappa(t) \equiv \kappa(0)$. Соответствующее решение $x(\cdot) = \Theta_{\mu}^{(k)} \kappa(\cdot)$ исходного уравнения (20) с краевым условием (21) задает стационарное решение. Если добавить краевое условие (22), то получим, что решение краевой задачи (20)–(22) тождественно равно 0. Теорема доказана.

4. Невырожденные системы дифференциальных уравнений опережающе-запаздывающего типа. О типичности невырожденных систем. В предыдущем пункте было установлено, что размерность пространства решений краевой задачи (20), (21) не меньше n . Это и есть одно из отличий свойств обыкновенных дифференциальных уравнений от уравнений опережающе-запаздывающего типа. Следует выяснить, насколько представителен класс уравнений опережающе-запаздывающего типа, для которых нарушается это важное свойство пространства решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть $\overline{n} = (n_1, \dots, n_s)$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $\overline{m} = (m_0, m_1)$, $m_0, m_1 \in \mathbb{Z}$, где $\overline{n}$ определяет набор отклонений, а $\overline{m}$ – концы интервала определения в уравнении. Набор матриц $(A_1, \dots, A_s)$ размера $n \times n$ является элементом пространства $M^s(n, \mathbb{R})$, где $M(n, \mathbb{R})$ – пространство всех матриц порядка n . При фиксированных $\overline{n}$, $\overline{m}$ каждый набор матриц определяет некоторое однородное уравнение вида (20) и наоборот.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. При фиксированных $\overline{n}$, $\overline{m}$ элемент $(A_1, \dots, A_s)$ называется $(\overline{n}, \overline{m})$ -*невырожденным*, если размерность пространства решений соответствующего однородного уравнения (20) с краевым условием (21) равна n . Элемент $(A_1, \dots, A_s)$ называется *невырожденным*, если для любых $\overline{n}$ и $\overline{m}$ он является $(\overline{n}, \overline{m})$ -невырожденным.

ТЕОРЕМА 3. При фиксированных $\overline{n}$, $\overline{m}$ множество $(\overline{n}, \overline{m})$ -невырожденных элементов $(A_1, \dots, A_s)$ образует открытое всюду плотное подмножество в $M^s(n, \mathbb{R})$. Множество невырожденных элементов пространства $M^s(n, \mathbb{R})$ образует массивное подмножество в $M^s(n, \mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и выше, фиксируем любое $\mu \in]0, 1[$, и исследование системы (20), (21) с однородными краевыми условиями сводится к исследованию краевой задачи (8), (9) при $F(\cdot) = 0$, $v(\cdot) = 0$. Что в свою очередь согласно предложению 1

сводится к исследованию уравнения $(T - e^{P_B A})\overline{x} = 0$, которое распадается на систему $P_{\overline{B}}(T - E)\overline{x} = 0$, $P_B(T - e^{P_B A})x = 0$. Из первого уравнения следует, что $\dim N(P_{\overline{B}}(T - E)) = (m(B) + 1)n$. Рассмотрим оператор $P_B(T - e^{P_B A})$ на подпространстве $N(P_{\overline{B}}(T - E))$. Этот оператор представим в виде $P_B(T - E) - P_B(e^{P_B A} - E)$. В матрице, соответствующей оператору $P_B(T - E)$ на подпространстве $N(P_{\overline{B}}(T - E))$, существует минор π порядка $m(B)n$, у которого на главной диагонали и диагонали, расположенной над ней, стоят единицы, а на остальных местах – нули. Элементы матрицы, соответствующей оператору $P_B(e^{P_B A} - E)$ на подпространстве $N(P_{\overline{B}}(T - E))$, являются целыми функциями от элементов матриц A_i , $1 \leq i \leq s$, причем в нуле равными 0. Очевидно, можно пошевелить в малом элементы матриц A_i , $1 \leq i \leq s$, так, чтобы в матрице, соответствующей оператору $P_B(T - e^{P_B A})$ на подпространстве $N(P_{\overline{B}}(T - E))$, минор порядка $m(B)n$, имеющий то же расположение, что и минор π , был невырожденным. Следовательно, множество $(\overline{n}, \overline{m})$ -невырожденных элементов $(A_1, \dots, A_s)$ образует всюду плотное подмножество в $M^s(n, \mathbb{R})$. Легко видеть, что свойство невырожденности при малом шевелении матриц A_i , $1 \leq i \leq s$, сохраняется, поэтому множество $(\overline{n}, \overline{m})$ -невырожденных элементов $(A_1, \dots, A_s)$ является открытым подмножеством в $M^s(n, \mathbb{R})$. Первая часть теоремы доказана.

Множество невырожденных элементов пространства $M^s(n, \mathbb{R})$ является пересечением множеств $(\overline{n}, \overline{m})$ -невырожденных элементов при различных $\overline{n}$ и $\overline{m}$. Так как число всевозможных наборов $\overline{n}$ и $\overline{m}$ счетно, отсюда следует вторая часть теоремы.

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.
- [2] Пинни Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. М.: ИЛ, 1961.
- [3] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1984.
- [4] Бекларян Л. А. Дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом как бесконечномерная динамическая система. Препринт. М.: ВЦ АН СССР. Сообщ. по прикладной матем., 1989.
- [5] Бекларян Л. А. Об одном методе регуляризации краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Докл. АН СССР. 1991. Т. 317. № 5. С. 1033–1037.
- [6] Бекларян Л. А. Дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом как бесконечномерная динамическая система // Сб. научн. тр. МАИ “Качественные методы теории дифференциальных уравнений и их приложения”. М.: МАИ, 1991. С. 5–22.
- [7] Бекларян Л. А. К теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // УМН. 1994. Т. 49. № 6. С. 193–194.
- [8] Бекларян Л. А., Шмультян М. О полноте решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, мажорируемых экспоненциальными функциями // Докл. РАН. 1995. Т. 341. № 6. С. 727–730.