Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Вердиев, Экстремальные задачи на классах полиномов и сплайнов, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 4, 494–502

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1309>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 12:38:48

УДК 517.518.8+517.977.5

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА КЛАССАХ ПОЛИНОМОВ И СПЛАЙНОВ

В. Г. Вердиев

Методами теории экстремальных задач доказаны теоремы о существовании функций с заданной последовательностью экстремальных значений.

Библиография: 24 названия.

1. Введение. В статье рассматривается один достаточно общий метод доказательства теорем о существовании функций с заданными значениями экстремумов, основанный на средствах теории экстремальных задач [1]–[3].

Пусть $\Delta := [0, 1]$; $\mathfrak{P}_N$ – совокупность алгебраических полиномов степени N ; $S_m(\Delta, R_n)$ – совокупность сплайнов порядка m с узлами $\{t_i\}_{i=1}^n$, образующими разбиение R_n отрезка Δ , дефекта 1. В дальнейшем любую последовательность $\xi = \{\xi_i\}_{i=0}^N$, члены которой удовлетворяют неравенствам $(-1)^{i+1}(\xi_{i+1} - \xi_i) < 0$, $0 \leq i \leq N-1$, будем называть *последовательностью экстремальных значений*.

ТЕОРЕМА 1. *Для любой заданной последовательности экстремальных значений $\xi = \{\xi_i\}_{i=0}^N$ существует единственный алгебраический полином $\hat{P}(\cdot) \in \mathfrak{P}_N$ и единственная система из $N+1$ точек $\{\hat{\tau}_i\}_{i=0}^N \subset \Delta$, удовлетворяющие условиям*

$$\begin{aligned} \hat{P}(\hat{\tau}_i) &= \xi_i, & 0 \leq i \leq N, \\ \hat{P}'(\hat{\tau}_i) &= 0, & 1 \leq i \leq N-1, \\ 0 &=: \hat{\tau}_0 < \hat{\tau}_1 < \dots < \hat{\tau}_{N-1} < \hat{\tau}_N := 1. \end{aligned} \quad (1)$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$ и $m+n = N$. Тогда для любой заданной последовательности экстремальных значений $\xi = \{\xi_i\}_{i=0}^N$ существует единственный сплайн $\hat{x}(\cdot) \in S_m(\Delta, R_n)$ и единственная система из $N+1$ точек $\{\hat{\tau}_i\}_{i=0}^N \subset \Delta$, удовлетворяющие условиям*

$$\begin{aligned} \hat{x}(\hat{\tau}_i) &= \xi_i, & 0 \leq i \leq N, \\ \hat{x}'(\hat{\tau}_i) &= 0, & 1 \leq i \leq N-1, \\ \hat{\tau}_i &< t_i < \hat{\tau}_{m+i}, & 1 \leq i \leq n, \\ 0 &=: \hat{\tau}_0 < \hat{\tau}_1 < \dots < \hat{\tau}_{N-1} < \hat{\tau}_N := 1. \end{aligned} \quad (2)$$

2. История вопроса. К теореме 1 привели Ч. Дэйвиса [4], [5] исследования А. Кемпнера [6], [7], а Я. Мыцельского и С. Пашковского [8], [9] – методы построения алгебраического полинома наилучшего приближения, и они доказали ее топологическими методами. Для построения полиномов, удовлетворяющих условиям теоремы 1, В.Я. Каммерер [10] использовал идеи теории приближений, В.С. Виденский [11]–[14] и Ж. Кудела [15] применили метод последовательных приближений. Теорема 2 является распространением теоремы 1 на сплайны дефекта 1, которое осуществила М.Б. Коробкова [16]. Р.С. Джонсон [17], используя метод неподвижной точки, получил родственную теорему для моносплайнов.

3. Постановка экстремальных задач. Пусть $\Sigma^{N-1} := \{\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{N-1}) \mid \eta_i \geq 0, \sum_{i=1}^{N-1} \eta_i = 1\}$ – $(N-1)$ -мерный симплекс и $\Sigma_{R_n}^{N-1} := \{\eta' = (\eta'_1, \dots, \eta'_{N-1}) \mid \eta'_j \geq 0, \sum_{j=1}^{N-1} \eta'_j = 1, \sum_{j=1}^i \eta'_j < t_i < \sum_{j=1}^{m+i} \eta'_j, 1 \leq i \leq n, t_i \in \{t_i\}_{i=1}^n =: R_n\}$, $\tau(\eta) := (\tau_0(\eta), \tau_1(\eta), \dots, \tau_N(\eta))$ и $\tau'(\eta') := (\tau'_0(\eta'), \tau'_1(\eta'), \dots, \tau'_N(\eta'))$, где

$$\begin{aligned} \tau_0(\eta) &:= 0, \quad \tau_i(\eta) = \sum_{j=1}^i \eta_j, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad \tau_N(\eta) := 1, \\ \tau'_0(\eta') &:= 0, \quad \tau'_i(\eta') = \sum_{j=1}^i \eta'_j, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad \tau'_N(\eta') := 1. \end{aligned}$$

Как обычно, $\partial \Sigma^{N-1}$ и $\partial \Sigma_{R_n}^{N-1}$ – границы, $\text{int } \Sigma^{N-1}$ и $\text{int } \Sigma_{R_n}^{N-1}$ – множества внутренних точек Σ^{N-1} и $\Sigma_{R_n}^{N-1}$ соответственно. Ясно, что при любых $\eta \in \text{int } \Sigma^{N-1}$ и $\eta' \in \Sigma_{R_n}^{N-1}$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &:= \tau_0(\eta) < \tau_1(\eta) < \dots < \tau_N(\eta) := 1, \\ 0 &:= \tau'_0(\eta') < \tau'_1(\eta') < \dots < \tau'_N(\eta') := 1. \end{aligned}$$

Зафиксируем произвольным образом некоторую последовательность экстремальных значений $\xi = \{\xi_i\}_{i=0}^N$. Тогда для любых $\eta \in \text{int } \Sigma^{N-1}$ и $\eta' \in \Sigma_{R_n}^{N-1}$ согласно интерполяционной формуле Лагранжа существуют единственный полином $P(\cdot, \eta) \in \mathfrak{P}_N$ и по теореме 1.3 [18, с. 27] единственный сплайн $x(\cdot, \eta') \in S_m(\Delta, R_n)$ такие, что

$$P(\tau_i(\eta), \eta) = \xi_i, \quad x(\tau'_i(\eta'), \eta') = \xi_i, \quad 0 \leq i \leq N.$$

Положим

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}(\text{int } \Sigma^{N-1}, \xi) &:= \{P(\cdot, \eta) \in \mathfrak{P}_N \mid P(\tau_i(\eta), \eta) = \xi_i, \eta \in \text{int } \Sigma^{N-1}, \xi_i \in \xi\}, \\ S(\text{int } \Sigma_{R_n}^{N-1}, \xi) &:= \{x(\cdot, \eta') \in S_m(\Delta, R_n) \mid x(\tau'_i(\eta'), \eta') = \xi_i, \eta' \in \Sigma_{R_n}^{N-1}, \xi_i \in \xi\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим вариационные задачи.

ЗАДАЧА 1. Найти

$$\lambda_N(\xi) = \begin{cases} \inf P(2, \eta) & \text{при четном } N, \\ \sup P(2, \eta) & \text{при нечетном } N, \end{cases}$$

если $\eta \in \text{int } \Sigma^{N-1}$.

ЗАДАЧА 2. Найти

$$\lambda'_N(\xi) = \begin{cases} \inf x(2, \eta) & \text{при четном } N, \\ \sup x(2, \eta) & \text{при нечетном } N, \end{cases}$$

если $\eta' \in \Sigma_{R_n}^{N-1}$.

4. Существование решений экстремальных задач.

ЛЕММА 1. *Решение задачи 1 существует.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta \in \text{int } \Sigma^{N-1}$ и $\bar{\eta} \in \partial \Sigma^{N-1}$. Покажем, что абсолютное значение $|P(2, \eta)|$ при $t = 2$ полинома $P(t, \eta) \in \mathfrak{P}(\text{int } \Sigma^{N-1}, \xi)$ стремится к $+\infty$ при $\eta \rightarrow \bar{\eta}$. Точка $\bar{\eta} \in \partial \Sigma^{N-1}$, поэтому некоторые из ее координат $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \dots, \bar{\eta}_{N-1}$ равны 0. Совокупность индексов, соответствующих нулевым координатам точки $\bar{\eta} \in \partial \Sigma^{N-1}$, обозначим через I , т.е. $i \in I$, если $\bar{\eta}_i = 0$, и $i \notin I$, если $\bar{\eta}_i > 0$. Рассуждения проведем для $I = \{1\}$. В остальных случаях рассуждения аналогичны. Тогда $\bar{\eta} = (0, \bar{\eta}_2, \dots, \bar{\eta}_{N-1}) \in \partial \Sigma^{N-1}$ соответствует точка $\bar{\tau} = (0, 0, \bar{\tau}_2, \dots, \bar{\tau}_N)$, координаты которой удовлетворяют неравенствам $0 < \bar{\tau}_2 < \dots < \bar{\tau}_N = 1$. Полином $P(t, \eta) \in \mathfrak{P}(\text{int } \Sigma^{N-1}, \xi)$, соответствующий точке η , представим в виде суммы $P(t, \eta) = P_1(t, \eta) + P_2(t, \eta)$ двух полиномов $P_1(t, \eta) \in \mathfrak{P}_N$ и $P_2(t, \eta) \in \mathfrak{P}_N$ таких, что

$$\begin{aligned} P_1(0, \eta) &= \xi_0, & P_1(\tau_1, \eta) &= \xi_1, & P_1(\tau_i, \eta) &= 0, \\ P_2(0, \eta) &= P_2(\tau_1, \eta) = 0, & P_2(\tau_i, \eta) &= \xi_i, & 2 \leq i \leq N. \end{aligned}$$

Как несложно показать, при $\eta \rightarrow \bar{\eta}$ полином $P_2(t, \eta)$ преобразуется в алгебраический полином $\bar{P}_2(t) \in \mathfrak{P}_N$, при этом

$$0 = \bar{P}_2(0) = \bar{P}_2'(0), \quad \bar{P}_2'(\bar{\tau}_i) = \xi_i, \quad 2 \leq i \leq N.$$

Используя интерполяционную формулу Лагранжа, запишем полином $P_1(t, \eta)$ в виде $P_1(t, \eta) = \xi_0 Q_0(t, \eta) + \xi_1 Q_1(t, \eta)$, где

$$Q_0(t, \eta) = \frac{(t - \tau_1) \cdots (t - \tau_N)}{(-\tau_1) \cdots (-\tau_N)}, \quad Q_1(t, \eta) = \frac{t(t - \tau_2) \cdots (t - \tau_N)}{\tau_1(\tau_1 - \tau_2) \cdots (\tau_1 - \tau_N)}.$$

Учитывая, что

$$P(2, \eta) = Q_0(2, \eta) \left(\xi_0 + \xi_1 \frac{Q_1(2, \eta)}{Q_0(2, \eta)} \right) + P_2(2, \eta),$$

в силу равенств

$$\lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \tau = \bar{\tau}, \quad \lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} Q_0(t, \eta) = \pm \infty, \quad \lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} \frac{Q_1(2, \eta)}{Q_0(2, \eta)} = -1$$

имеем

$$\lim_{\eta \rightarrow \bar{\eta}} |P(2, \eta)| = +\infty. \quad (3)$$

Следовательно, при любом $\bar{\eta} \in \partial \Sigma^{N-1}$ непрерывная на $\text{int } \Sigma^{N-1}$ функция $|P(2, \eta)|$ от η такова, что выполняется (3). Поэтому согласно следствию из теоремы Вейерштрасса [2, с. 24] в $\text{int } \Sigma^{N-1}$ существует точка $\hat{\eta}$, являющаяся решением задачи 1. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. *Решение задачи 2 существует.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Граница множества $\Sigma_{R_n}^{N-1}$ состоит из точек границы $\partial\Sigma^{N-1}$ симплекса Σ^{N-1} и точек множества $\partial\Sigma_{R_n}$, координаты которых определяются соотношениями

$$\sum_{j=1}^i \bar{\eta}'_j = t_i, \quad \sum_{j=1}^{m+i} \bar{\eta}'_j = t_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad t_i \in \{t_i\}_{i=1}^n = R_n,$$

$$\bar{\eta}'_i > 0, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad \sum_{i=1}^{N-1} \bar{\eta}'_i = 1.$$

Покажем, что абсолютное значение $|x(2, \eta')|$ сплайна $x(\cdot, \eta') \in S(\text{int } \Sigma_{R_n}^{N-1}, \xi)$, соответствующего $\eta' \in \text{int } \Sigma_{R_n}^{N-1}$, в точке $t = 2$ стремится к $+\infty$ при $\eta' \rightarrow \bar{\eta}' \in \partial\Sigma_{R_n}^{N-1}$.

Для точек $\{\tau'_i\}_{i=0}^N$ системы $\tau' = (\tau'_0, \tau'_1, \dots, \tau'_N)$, построенной по произвольно фиксированной точке $\eta' \in \text{int } \Sigma_{R_n}^{N-1}$, и точек $\{t_i\}_{i=1}^n$ разбиения R_n имеем

$$0 =: \tau'_0 < \tau'_1 < \dots < \tau'_{N-1} < \tau'_N := 1,$$

$$\tau'_{i-1} < t_i < \tau'_{i+n}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (4)$$

согласно определению множества $\Sigma_{R_n}^{N-1}$. Неравенства (4) служат необходимым и достаточным условием существования единственного сплайна [19] в $S_m(\Delta, R_n)$, принимающего значение ξ_i в точке τ'_i , $0 \leq i \leq N$, и для этого сплайна имеет место интерполяционная формула Лагранжа (см. [18, с. 29]). Таким сплайном является $x(\cdot, \eta') \in S(\text{int } \Sigma_{R_n}^{N-1}, \xi)$, поэтому запишем его следующим образом:

$$x(t, \eta') = \sum_{i=0}^N \xi_i \frac{S(\tau'_0, \tau'_1, \dots, \tau'_{i-1}, t, \tau'_{i+1}, \dots, \tau'_N)}{S(\tau'_0, \tau'_1, \dots, \tau'_N)}, \quad (5)$$

где

$$S(\tau'_0, \tau'_1, \dots, \tau'_{i-1}, t, \tau'_{i+1}, \dots, \tau'_N) := \begin{vmatrix} 1 & \tau'_0 & \dots & \tau_0'^m & (\tau'_0 - t_1)_+^m & (\tau'_0 - t_2)_+^m & \dots & (\tau'_0 - t_n)_+^m \\ 1 & \tau'_1 & \dots & \tau_1'^m & (\tau'_1 - t_1)_+^m & (\tau'_1 - t_2)_+^m & \dots & (\tau'_1 - t_n)_+^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \tau'_{i-1} & \dots & \tau_{i-1}'^m & (\tau'_{i-1} - t_1)_+^m & (\tau'_{i-1} - t_2)_+^m & \dots & (\tau'_{i-1} - t_n)_+^m \\ 1 & t & \dots & t^m & (t - t_1)_+^m & (t - t_2)_+^m & \dots & (t - t_n)_+^m \\ 1 & \tau'_{i+1} & \dots & \tau_{i+1}'^m & (\tau'_{i+1} - t_1)_+^m & (\tau'_{i+1} - t_2)_+^m & \dots & (\tau'_{i+1} - t_n)_+^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \tau'_N & \dots & \tau_N'^m & (\tau'_N - t_1)_+^m & (\tau'_N - t_2)_+^m & \dots & (\tau'_N - t_n)_+^m \end{vmatrix}$$

и $S(\tau'_0, \tau'_1, \dots, \tau'_N) := S(\tau'_0, \tau'_1, \dots, \tau'_{i-1}, \tau'_i, \tau'_{i+1}, \dots, \tau'_N)$, причем $S(\tau'_0, \tau'_1, \dots, \tau'_N) > 0$,

$$S(\tau'_0, \tau'_1, \dots, \tau'_{i-1}, \tau'_j, \tau'_{i+1}, \dots, \tau'_N) = 0 \quad \text{при } i \neq j, 0 \leq i, j \leq N,$$

$$S(\tau'_0, \tau'_1, \dots, \tau'_{i-2}, t_i, \tau'_i, \dots, \tau'_N) = S(\tau'_0, \tau'_1, \dots, \tau'_{i+m-1}, t_i, \tau'_{i+m+1}, \dots, \tau'_N) = 0$$

при $1 \leq i \leq n$.

Тем самым, обоснована корректность определения множества сплайнов $S(\text{int } \Sigma_{R_n}^{N-1}, \xi)$.

Пусть $\bar{\eta}' \in \partial \Sigma^{N-1}$ и совокупность индексов, соответствующих нулевым координатам точки $\bar{\eta}'$, обозначим через I' . Рассмотрим случай $I' = \{1\}$. В остальных рассуждениях аналогичны. Тогда $\bar{\eta}' = (0, \bar{\eta}'_2, \dots, \bar{\eta}'_{N-1}) \in \partial \Sigma^{N-1}$ соответствует система точек $\bar{\tau}' = (0, 0, \bar{\tau}'_2, \dots, \bar{\tau}'_N)$, $0 < \bar{\tau}'_2 < \dots < \bar{\tau}'_N = 1$. Сплайн $x(\cdot, \eta') \in S(\text{int } \Sigma_{R_n}^{N-1}, \xi)$, соответствующий точке $\eta' \in \text{int } \Sigma_{R_n}^{N-1}$, с помощью интерполяционной формулы Лагранжа для сплайнов представим в виде суммы $x(t, \eta') = x_1(t, \eta') + x_2(t, \eta')$ двух сплайнов $x_1(\cdot, \eta') \in S_m(\Delta, R_n)$ и $x_2(\cdot, \eta') \in S_m(\Delta, R_n)$ таких, что

$$\begin{aligned} x_1(0, \eta') &= \xi_0, & x_1(\tau'_1, \eta') &= \xi_1, & x_1(\tau'_i, \eta') &= 0, & 2 \leq i \leq N, \\ x_2(0, \eta') &= x_2(\tau'_1, \eta') = 0, & x_2(\tau'_i, \eta') &= \xi_i, \end{aligned}$$

Заметим, что при $\eta' \rightarrow \bar{\eta}'$ сплайн $x_2(\cdot, \eta')$ преобразуется в сплайн $\bar{x}_2(\cdot) \in S_m(\Delta, R_n)$, причем

$$\bar{x}_2(0) = \bar{x}'_2(0) = 0, \quad \bar{x}_2(\bar{\tau}'_i) = \xi_i, \quad 2 \leq i \leq N.$$

Используя равенство (5), запишем сплайн $x_1(t, \eta')$ в виде

$$x_1(t, \eta') = \frac{1}{S(\tau'_0, \tau'_1, \dots, \tau'_N)} (\xi_0 S(t, \tau'_1, \dots, \tau'_N) + \xi_1 S(\tau'_0, t, \dots, \tau'_N)).$$

Тогда для значения $x(2, \eta')$ сплайна $x(\cdot, \eta')$ в точке $t = 2$ имеем

$$x(2, \eta') = \frac{S(2, \tau'_1, \dots, \tau'_N)}{S(\tau'_0, \tau'_1, \dots, \tau'_N)} \left(\xi_0 + \xi_1 \frac{S(\tau'_0, 2, \dots, \tau'_N)}{S(2, \tau'_1, \dots, \tau'_N)} \right) + x_2(2, \eta'), \quad (6)$$

отсюда ввиду равенств

$$\lim_{\eta' \rightarrow \bar{\eta}'} \tau' = \bar{\tau}', \quad \lim_{\eta' \rightarrow \bar{\eta}'} \frac{S(2, \tau'_1, \dots, \tau'_N)}{S(\tau'_0, \tau'_1, \dots, \tau'_N)} = +\infty, \quad \lim_{\eta' \rightarrow \bar{\eta}'} \frac{S(\tau'_0, 2, \dots, \tau'_N)}{S(2, \tau'_1, \dots, \tau'_N)} = -1$$

вытекает, что

$$\lim_{\eta' \rightarrow \bar{\eta}' \in \partial \Sigma^{N-1}} |x(2, \eta')| = +\infty.$$

Теперь пусть $\bar{\eta}' \in \partial \Sigma_{R_n}$. Разберем случай, когда точка $\bar{\eta}' \in \partial \Sigma_{R_n}$ имеет координаты $\bar{\eta}' = (t_1, \bar{\eta}'_2, \dots, \bar{\eta}'_{N-1})$, $t_1 \in \{t_i\}_{i=1}^n = R_n$. В других случаях рассуждения аналогичны. Тогда $\bar{\eta}' = (t_1, \bar{\eta}'_2, \dots, \bar{\eta}'_{N-1}) \in \partial \Sigma_{R_n}$ соответствует система точек $\bar{\tau}' = (\bar{\tau}'_0, t_1, \bar{\tau}'_2, \dots, \bar{\tau}'_N)$, $0 = \bar{\tau}'_0 < t_1 < \bar{\tau}'_2 < \dots < \bar{\tau}'_N = 1$. Если $\eta' \rightarrow \bar{\eta}' \in \partial \Sigma_{R_n}$ при $\eta' \in \text{int } \Sigma_{R_n}^{N-1}$, то

$$\lim_{\eta' \rightarrow \bar{\eta}'} \tau' = \bar{\tau}', \quad \lim_{\eta' \rightarrow \bar{\eta}' \in \partial \Sigma_{R_n}} \frac{S(2, \tau'_1, \dots, \tau'_N)}{S(\tau'_0, \tau'_1, \dots, \tau'_N)} = +\infty,$$

поэтому из (6) следует

$$\lim_{\eta' \rightarrow \bar{\eta}' \in \partial \Sigma_{R_n}} |x(2, \eta')| = +\infty.$$

Таким образом, мы получили, что

$$\lim_{\eta' \rightarrow \bar{\eta}' \in \partial \Sigma_{R_n}^{N-1}} |x(2, \eta')| = +\infty.$$

Поэтому согласно следствию из теоремы Вейерштрасса [20, с. 24] в $\text{int } \Sigma_{R_n}^{N-1}$ существует точка $\hat{\eta}$, которая является решением задачи 2. Лемма 2 доказана.

5. Доказательства теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Исходя из решения $\hat{\eta} = (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \dots, \hat{\eta}_{N-1})$ задачи 1, строим систему из $N + 1$ точек $\hat{\tau} = (\tau_0(\hat{\eta}), \tau_1(\hat{\eta}), \dots, \tau_N(\hat{\eta})) =: (\hat{\tau}_0, \hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_N)$ и полином $P(\cdot, \hat{\eta}) \in \mathfrak{P}_N$. Система точек $(\hat{\tau}_0, \hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_N)$ и полином $P(\cdot, \hat{\eta})$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Действительно, в силу построения $\hat{\tau}$ и $P(\cdot, \hat{\eta})$ имеем

$$0 =: \hat{\tau}_0 < \hat{\tau}_1 < \dots < \hat{\tau}_{N-1} < \hat{\tau}_N := 1, \\ P(\hat{\tau}_i, \hat{\eta}) = \xi_i, \quad 0 \leq i \leq N,$$

так как $\hat{\eta} \in \text{int } \Sigma^{N-1}$ и $\hat{P}(\cdot, \hat{\eta}) \in \mathfrak{P}(\text{int } \Sigma^{N-1}, \xi)$. Далее предположим, что при некотором i_0 , $1 < i_0 < N$, в точке $\hat{\tau}_{i_0}$ для $\hat{P}(\cdot, \hat{\eta})$ равенство (1) нарушено, т.е.

$$\hat{P}'(\hat{\tau}_{i_0}, \hat{\eta}) \neq 0. \quad (7)$$

Рассмотрим полином степени N

$$\tilde{P}(t) := \frac{\prod_{i=0}^N (t - \tilde{\tau}_i)}{t - \tilde{\tau}_{i_0}},$$

у которого все N нулей расположены на отрезке Δ и поэтому значение $\tilde{P}(2)$ полинома $\tilde{P}(t)$ в точке $t = 2$ отлично от 0, т.е. $\tilde{P}(2) \neq 0$. Тогда согласно классической теореме о неявной функции [21, с. 166] существуют $\varepsilon_0 > 0$ и отображение $T(\varepsilon)$ класса $C^1[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ такие, что $T(0) = \hat{\tau}_{i_0}$ и $\hat{P}(T(\varepsilon)\hat{\eta}) + \varepsilon \tilde{P}(T(\varepsilon)) = \xi_{i_0}$ при любом $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. Отсюда следует, что при любом $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ полином $\Phi(t, \varepsilon) := \hat{P}(t, \hat{\eta}) + \varepsilon \tilde{P}(t) \in \mathfrak{P}(\text{int } \Sigma^{N-1}, \xi)$. Рассмотрим значение полинома $\Phi(t, \varepsilon)$ в точке $t = 2$. Сначала заметим, что

$$\begin{aligned} \tilde{P}(2) > 0, \quad \text{sign } \varepsilon \tilde{P}(2) &= \text{sign } \varepsilon && \text{при четном } N, \\ \tilde{P}(2) < 0, \quad \text{sign } \varepsilon \tilde{P}(2) &= -\text{sign } \varepsilon && \text{при нечетном } N. \end{aligned}$$

Если $\xi_{i_0-1} < \xi_{i_0}$, $\xi_{i_0} > \xi_{i_0+1}$ при $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, 0)$ и $\xi_{i_0-1} > \xi_{i_0}$, $\xi_{i_0} < \xi_{i_0+1}$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, то

$$\begin{aligned} \Phi(2, \varepsilon) &> \hat{P}(2, \hat{\eta}) && \text{при четном } N, \\ \Phi(2, \varepsilon) &< \hat{P}(2, \hat{\eta}) && \text{при нечетном } N. \end{aligned}$$

Полученные неравенства противоречат лемме 1. Значит, предположение (7) неверно. Следовательно, полином $\hat{P}(\cdot, \hat{\eta}) \in \mathfrak{P}_N$ и система из $N - 1$ точек $\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \dots, \hat{\tau}_{N-1}$ удовлетворяют равенствам $\hat{P}'(\hat{\tau}_i, \hat{\eta}) = 0$, $1 \leq i \leq N - 1$. Тем самым, мы показали, что построенные по экстремальной точке $\hat{\eta} \in \text{int } \Sigma^{N-1}$ вариационной задачи 1 система точек $\hat{\tau} = (\hat{\tau}_0, \hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_N)$ и полином $\hat{P}(\cdot, \hat{\eta}) \in \mathfrak{P}(\text{int } \Sigma^{N-1}, \xi)$ удовлетворяют условиям доказываемой теоремы.

Покажем, что система точек $\hat{\tau} = (\hat{\tau}_0, \hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_N) \subset \Delta$ и полином $\hat{P}(\cdot) \in \mathfrak{P}_N$ условиями теоремы 1 определяются однозначно. Действительно, пусть существуют две различные системы точек $\hat{\tau}^1 = (\hat{\tau}_0^1, \hat{\tau}_1^1, \dots, \hat{\tau}_N^1)$, $\hat{\tau}^2 = (\hat{\tau}_0^2, \hat{\tau}_1^2, \dots, \hat{\tau}_N^2)$ на отрезке Δ и два различных полинома $\hat{P}_1(\cdot), \hat{P}_2(\cdot) \in \mathfrak{P}_N$, удовлетворяющих условиям теоремы 1. Тогда $\hat{P}_1(2) = \hat{P}_2(2)$, и система $\hat{\tau}^i = (\hat{\tau}_0^i, \hat{\tau}_1^i, \dots, \hat{\tau}_N^i)$, $i = 1, 2$, из $N + 1$ точек отрезка Δ определяет точку $\hat{\eta}^i = (\hat{\eta}_1^i, \hat{\eta}_2^i, \dots, \hat{\eta}_{N-1}^i) \in \text{int } \Sigma^{N-1}$ с $N - 1$ координатами $\hat{\eta}_j^i = \hat{\tau}_j^i - \hat{\tau}_{j-1}^i$, $1 \leq j \leq N - 1$, $i = 1, 2$. Будем рассматривать $\hat{\tau}^i = (\hat{\tau}_0^i, \hat{\tau}_1^i, \dots, \hat{\tau}_N^i)$, как систему из

$N + 1$ точек отрезка Δ , и $\hat{P}_i(\cdot)$, как алгебраический полином из $\mathfrak{P}(\text{int } \Sigma^{N-1}, \xi)$, построенные по точке $\hat{\eta}^i \in \text{int } \Sigma^{N-1}$. Тогда $\hat{\tau}^i = \tau(\hat{\eta}^i) = (\tau_0(\hat{\eta}^i), \tau_1(\hat{\eta}^i), \dots, \tau_N(\hat{\eta}^i))$ и $\hat{P}_i(\cdot) = \hat{P}_i(\cdot, \hat{\eta}^i)$, $i = 1, 2$. Согласно предположению $\hat{\tau}^1$ и $\hat{\tau}^2$ различные и $\hat{P}_1(\cdot) \neq \hat{P}_2(\cdot)$, поэтому существует i_0 , $1 \leq i_0 \leq N - 1$, такое, что $\hat{\tau}_{i_0}^1 \neq \hat{\tau}_{i_0}^2$. Положим

$$\Phi(\cdot, \lambda) = \lambda \hat{P}_1(\cdot) + (1 - \lambda) \hat{P}_2(\cdot), \quad \lambda \in \Delta. \quad (8)$$

Легко показать, что при любом $\lambda \in \Delta$ полином $\Phi(\cdot, \lambda) \in \mathfrak{P}_N$, $\Phi(2, \lambda) = \hat{P}_i(2)$, $i = 1, 2$, и точки экстремумов $\Phi(\cdot, \lambda)$ расположены на отрезке Δ . Обозначим систему этих точек через $\tau^\lambda = (\tau_0^\lambda, \tau_1^\lambda, \dots, \tau_N^\lambda)$, $0 =: \tau_0^\lambda < \tau_1^\lambda < \dots < \tau_N^\lambda := 1$. Для любого заданного числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\lambda_0 \in (0, 1)$ такое, что при всех $\lambda \in (0, \lambda_0)$ и $t \in \Delta$ выполнено $|\Phi(t, \lambda) - \hat{P}_1(t)| < \varepsilon$. Сначала выберем положительное число δ так, чтобы δ -окрестности $(\hat{\tau}_0^1 - \delta, \hat{\tau}_0^1 + \delta)$, $(\hat{\tau}_1^1 - \delta, \hat{\tau}_1^1 + \delta)$, $\dots$, $(\hat{\tau}_N^1 - \delta, \hat{\tau}_N^1 + \delta)$ точек экстремумов $\hat{\tau}_0^1, \hat{\tau}_1^1, \dots, \hat{\tau}_N^1$ полинома $\hat{P}_1(\cdot)$ попарно не пересекались. Затем подберем $\lambda_0 \in (0, 1)$ так, чтобы при любом $\lambda \in (0, \lambda_0)$ точка i -го экстремума τ_i полинома $\Phi(\cdot, \lambda)$ находилась в δ -окрестности $(\hat{\tau}_i^1 - \delta, \hat{\tau}_i^1 + \delta)$ точки i -го экстремума $\hat{\tau}_i^1$ полинома $\hat{P}_1(\cdot)$. Согласно построению полиномов $\hat{P}_1(\cdot)$, $\Phi(\cdot, \lambda)$ и выбору λ_0 для экстремальных значений $\{\hat{P}_1(\hat{\tau}_i^1)\}_{i=0}^N$ и $\{\Phi(\hat{\tau}_i^1, \lambda)\}_{i=0}^N$ полиномов $\hat{P}_1(\cdot)$ и $\Phi(\cdot, \lambda)$, $\lambda \in (0, \lambda_0)$, в точках $\{\hat{\tau}_i^1\}_{i=0}^N$ экстремумов $\hat{P}_1(\cdot)$ имеем

$$\hat{P}_1(\hat{\tau}_i^1) \geq \Phi(\hat{\tau}_i^1, \lambda), \quad i = 0, 2, 4, \dots, \quad \hat{P}_1(\hat{\tau}_i^1) \leq \Phi(\hat{\tau}_i^1, \lambda), \quad i = 1, 3, 5, \dots,$$

если $\hat{P}_1(\hat{\tau}_0^1) > \hat{P}_1(\hat{\tau}_1^1)$, или

$$\hat{P}_1(\hat{\tau}_i^1) \leq \Phi(\hat{\tau}_i^1, \lambda), \quad i = 0, 2, 4, \dots, \quad \hat{P}_1(\hat{\tau}_i^1) \geq \Phi(\hat{\tau}_i^1, \lambda), \quad i = 1, 3, 5, \dots,$$

если $\hat{P}_1(\hat{\tau}_0^1) < \hat{P}_1(\hat{\tau}_1^1)$. Поэтому разность $\hat{P}_1(t) - \Phi(t, \lambda)$, $\lambda \in (0, \lambda_0)$, имеет не менее $N + 2$ нулей: по одному нулю в каждой из $N + 1$ попарно не пересекающихся δ -окрестностей $\{(\hat{\tau}_i^1 - \delta, \hat{\tau}_i^1 + \delta)\}_{i=0}^N$ точек $\{\hat{\tau}_i^1\}_{i=0}^N$ и один нуль в точке $t = 2$. Получили противоречие с тем, что $\hat{P}_1(t) - \Phi(t, \lambda) \neq 0$, $\lambda \in (0, \lambda_0)$, есть алгебраический полином степени N . Значит, наше предположение о существовании двух различных систем $(\hat{\tau}_0^1, \hat{\tau}_1^1, \dots, \hat{\tau}_N^1)$, $(\hat{\tau}_0^2, \hat{\tau}_1^2, \dots, \hat{\tau}_N^2)$ и полиномов $\hat{P}_1(\cdot)$, $\hat{P}_2(\cdot)$, удовлетворяющих условиям теоремы 1, неверно. Поэтому $\hat{\tau}_i^1 = \hat{\tau}_i^2$, $0 \leq i \leq N$. Следовательно, $\hat{\eta}_i^1 = \hat{\eta}_i^2$, $0 \leq i \leq N - 1$, и $\hat{P}_1(\cdot) = \hat{P}_2(\cdot)$. Таким образом, мы показали, что существуют единственный алгебраический полином $\hat{P}(\cdot) \in \mathfrak{P}_N$ и единственная система из $N + 1$ точек $(\hat{\tau}_0, \hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_N)$ на отрезке Δ , удовлетворяющие условиям доказываемой теоремы. Теорема 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Задача 1 имеет единственное решение $\hat{\eta} \in \text{int } \Sigma^{N-1}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. В классе алгебраических полиномов $\mathfrak{P}(\text{int } \Sigma^{N-1}, \xi)$ экстремальное значение $\lambda_N(\xi)$ задачи 1 реализуется на единственном полиноме $\hat{P}(\cdot) \in \mathfrak{P}(\text{int } \Sigma^{N-1}, \xi)$, удовлетворяющем условиям теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Построенные по решению $\hat{\eta}' = (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \dots, \hat{\eta}_{N-1})$ задачи 2 система из $N + 1$ точек $\hat{\tau}' = (\tau_0(\hat{\eta}'), \tau_1(\hat{\eta}'), \dots, \tau_N(\hat{\eta}')) =: (\hat{\tau}'_0, \hat{\tau}'_1, \dots, \hat{\tau}'_N)$ и сплайн $x(\cdot, \hat{\eta}') \in S_m(\Delta, R_n)$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Действительно, в силу построения $\hat{\tau}'$ и $x(\cdot, \hat{\eta}')$ имеем

$$0 =: \hat{\tau}'_0 < \hat{\tau}'_1 < \dots < \hat{\tau}'_{N-1} < \hat{\tau}'_N := 1, \\ x(\hat{\tau}'_i, \hat{\eta}') = \xi_i, \quad 0 \leq i \leq N,$$

так как $\hat{\eta}' \in \text{int } \Sigma_{R_n}^{N-1}$ и $x(\cdot, \hat{\eta}') \in S(\text{int } \Sigma_{R_n}^{N-1}, \xi)$.

Допустим, что в точке $\hat{\tau}'_{j_0}$, $1 < j_0 < N$, нарушено хотя бы одно из равенств (2), т.е.

$$x'(\hat{\tau}'_{j_0}, \hat{\eta}') \neq 0. \quad (9)$$

Сплайн $s_{j_0}(t) \in S_m(\Delta, R_n)$, полученный из сплайна (6) при $i = j_0$, имеет максимальное число N нулей в точках $\hat{\tau}'_0, \hat{\tau}'_1, \dots, \hat{\tau}'_{j_0-1}, \hat{\tau}'_{j_0+1}, \dots, \hat{\tau}'_N$ отрезка Δ , поэтому его значение $s_{j_0}(2)$ в точке $t = 2$ отлично от 0, т.е. $s_{j_0}(2) \neq 0$. Тогда согласно теореме о неявной функции [22, с. 166] существуют $\varepsilon_0 > 0$ и отображение $T(\varepsilon) \in C^1[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ такие, что $T(0) = \hat{\tau}'_{j_0}$ и $x(T(\varepsilon), \hat{\eta}') + \varepsilon s_{j_0}(T(\varepsilon)) = \xi_{j_0}$ при любом $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. Отсюда следует, что при любом $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ сплайн $\Psi(t, \varepsilon) := x(t, \hat{\eta}') + \varepsilon s_{j_0}(t) \in S(\text{int } \Sigma_{R_n}^{N-1}, \xi)$. Исследуем значение $\Psi(t, \varepsilon)$ в точке $t = 2$. Заметим, что

$$\begin{aligned} s_{j_0}(2) > 0, \quad \text{sign } \varepsilon s_{j_0}(2) &= \text{sign } \varepsilon && \text{при четном } N, \\ s_{j_0}(2) < 0, \quad \text{sign } \varepsilon s_{j_0}(2) &= -\text{sign } \varepsilon && \text{при нечетном } N. \end{aligned}$$

Если $\xi_{i_0-1} < \xi_{i_0}$, $\xi_{i_0} > \xi_{i_0+1}$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, то

$$\begin{aligned} \Psi(2, \varepsilon) &> x(2, \hat{\eta}') && \text{при четном } N, \\ \Psi(2, \varepsilon) &< x(2, \hat{\eta}') && \text{при нечетном } N. \end{aligned}$$

Полученные неравенства противоречат теореме 2. Значит, предположение (9) неверно. Поэтому сплайн $x(\cdot, \hat{\eta}') \in S_m(\Delta, R_n)$ и система из $N - 1$ точек $(\hat{\tau}'_1, \hat{\tau}'_2, \dots, \hat{\tau}'_{N-1})$ удовлетворяют равенствам $x'(\hat{\tau}'_i, \hat{\eta}') = 0$, $1 \leq i \leq N - 1$. Таким образом, мы показали, что построенные по экстремальной точке $\hat{\eta}' \in \text{int } \Sigma_{R_n}^{N-1}$ вариационной задачи 2 система из $N + 1$ точек $\hat{\tau}' = (\hat{\tau}'_0, \hat{\tau}'_1, \dots, \hat{\tau}'_N)$ и сплайн $x(\cdot, \hat{\eta}') \in S(\text{int } \Sigma_{R_n}^{N-1}, \xi)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.

Единственность системы точек $\hat{\tau}' = (\hat{\tau}'_0, \hat{\tau}'_1, \dots, \hat{\tau}'_N) \subset \Delta$ и сплайна $\hat{x}(\cdot) \in S_m(\Delta, R_n)$, удовлетворяющих условиям теоремы 2, докажем от противного. Допустим, что существуют две различные системы точек $\hat{\tau}'^1 = (\hat{\tau}'_0{}^1, \hat{\tau}'_1{}^1, \dots, \hat{\tau}'_N{}^1)$, $\hat{\tau}'^2 = (\hat{\tau}'_0{}^2, \hat{\tau}'_1{}^2, \dots, \hat{\tau}'_N{}^2)$ на отрезке Δ и два различных сплайна $\hat{x}_1(\cdot), \hat{x}_2(\cdot) \in S_m(\Delta, R_n)$, для которых выполнены условия теоремы 2. Рассмотрим сплайн $\Phi'(\cdot, \lambda) := \lambda \hat{x}_1(\cdot) + (1 - \lambda) \hat{x}_2(\cdot) \in S_m(\Delta, R_n)$ при любом $\lambda \in \Delta$. Повторяя дословно рассуждения, проведенные для полинома (8) при доказательстве теоремы 1, покажем, что $\hat{\tau}'_i{}^1 = \hat{\tau}'_i{}^2$, $0 \leq i \leq N$, и $\hat{x}_1(\cdot) = \hat{x}_2(\cdot)$. Тем самым, теорема 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Задача 2 имеет единственное решение $\hat{\eta}' \in \text{int } \Sigma_{R_n}^{N-1}$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Среди сплайнов из $S(\text{int } \Sigma_{R_n}^{N-1}, \xi)$ экстремальное значение $\lambda'_N(\xi)$ задачи 2 реализуется на единственном сплайне $\hat{x}(\cdot) \in S(\text{int } \Sigma_{R_n}^{N-1}, \xi)$, удовлетворяющем условиям теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Разные обобщения теоремы 1, полученные в работах [11]–[14], [20], [22]–[24] различными методами, доказываются подобно теоремам 1 и 2.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю В.М. Тихомирову за постановку задачи, постоянное внимание и помощь, а также рецензенту за замечания, которые способствовали улучшению настоящей статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
- [2] Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 1984.
- [3] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976.
- [4] Davis Ch. Problem 4714 // Amer. Math. Monthly. 1956. V. 63. № 10. P. 729.
- [5] Davis Ch. Extrema of a polynomial // Amer. Math. Monthly. 1957. V. 64. № 9. P. 679–680.
- [6] Kempner A. J. On the shape of polynomial curves // Tôhoku Math. J. 1933. V. 37. P. 347–362.
- [7] Kempner A. J. On the shape of polynomial curves. II // Tôhoku Math. J. 1936. V. 42. P. 318–330.
- [8] Mycielski J., Paszkowski S. A generalization of Chebyshev polynomials // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astron. Phys. 1960. V. 8. P. 433–438.
- [9] Paszkowski S. The Theory of Uniform Approximation. I: Non-Asymptotic Theoretical Problems. Rozprawy Matematyczne. V. 26. Warszawa, 1962.
- [10] Kammerer W. J. Polynomial approximations to finitely oscillating functions // Math. Comp. 1961. V. 15. P. 115–119.
- [11] Виденский В. С. Об одном классе интерполяционных многочленов с незакрепленными узлами // Докл. АН СССР. 1965. Т. 162. № 2. С. 251–254.
- [12] Виденский В. С. Существование и единственность решения одной интерполяционной задачи // Сб. научн. тр. Ленинградского механического института. Т. 50. Ленинград: ЛМИ, 1965. С. 29–41.
- [13] Виденский В. С. О построении многочлена по данной последовательности его экстремумов // Сб. статей “Современные проблемы теории аналитических функций”. Труды международной конференции по теории аналитических функций (Ереван, 1965). М.: Наука, 1966. С. 62–64.
- [14] Виденский В. С. Теорема существования многочлена с данной последовательностью экстремумов // Докл. АН СССР. 1966. Т. 171. № 1. С. 17–20.
- [15] Kudela J. Construction des certains polynômes extrémaux // Zeszyty Nauk. Uniw. Jagielloń. Prace Mat. 1963. V. 77. № 9. P. 31–36.
- [16] Коробкова М. Б. Теорема существования сплайн-полинома с данной последовательностью экстремумов // Матем. заметки. 1972. Т. 11. № 3. С. 251–258.
- [17] Johnson R. S. On monosplines of least deviation // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 96. P. 458–477.
- [18] Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Метод сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
- [19] Schoenberg I. J., Whitney A. On Polya frequency functions. III. The positivity of translation determinants with an application to the interpolation problem by spline curves // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. V. 74. P. 246–259.
- [20] Дэйвис Ч. Свойства отображений некоторых систем Чебышева // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. № 2. С. 280–283.
- [21] Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
- [22] Fitzgerald C. H., Schumaker L. L. A differential equation approach to interpolation at extremal points // J. Anal. Math. 1969. V. 22. P. 117–134.
- [23] Виденский В. С. Обобщение некоторых теорем о системах Чебышева на интерполяционные классы // Сб. трудов ЛГПИ им. А. И. Герцена. Л., 1972. С. 45–67.
- [24] Bojanov B. D. A generalization of Chebyshev polynomials // J. Approx. Theory. 1979. V. 26. P. 293–300.