Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Розанова, Управляемость для нелинейного абстрактного эволюционного уравнения, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 4, 553–567

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm131>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 05:40:04

УДК 517.9

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО АБСТРАКТНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ

А. В. Розанова

Доказана теорема о локальной управляемости системы, описываемой нелинейным эволюционным уравнением в банаховом пространстве, когда управлением является множитель в правой части. Получены достаточные условия на размер окрестности, из которой можно брать функцию из условия переопределения, с тем чтобы обратная задача была однозначно разрешима.

Библиография: 8 названий.

Введение

Работа состоит из трех частей.

Поскольку доказательство основного результата для нелинейной задачи полностью основывается на теории для ее линейного аналога, изложенной в [1], в первой части работы вводятся и кратко объясняются основные понятия из [1], приводятся формулировки необходимых в дальнейшем теорем.

Во второй части доказана локальная разрешимость обратной задачи для нелинейного абстрактного эволюционного уравнения, которую можно трактовать как задачу управляемости. Аналогичный результат для линейной задачи получен ранее в работе [1]. В основе доказательства лежат известные свойства решений линейных (прямой и обратной) задач, а также двукратное применение теоремы об обратной функции в соответствующих функциональных пространствах (в одном из двух случаев пространство прообразов определяется как множество решений соответствующей задачи).

В третьей части на основе двукратного применения уточненной теоремы об обратной функции, в наиболее общем варианте изложенной в [2], получены достаточные условия на размер окрестности, из которой можно брать функцию из условия переопределения, с тем чтобы исходная обратная задача была однозначно разрешима.

Ранее эта методика в обратной задаче была применена, например, для квазилинейного уравнения теплопроводности с интегральным переопределением [3], а также с терминальным переопределением [4].

Предварительные сведения. Обозначения. В настоящей работе, как и в [1], используются следующие обозначения:

- E – банахово пространство с нормой $\| \cdot \|$;
- $\mathcal{L}(E)$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, отображающих E в E , снабженная обычной операторной нормой;

- I – единичный оператор в $\mathcal{L}(E)$;
- $A: D(A) \rightarrow E$ – линейный замкнутый оператор с плотной областью определения $D(A) \subset E$;
- $\|\cdot\|$ – норма графика на $D(A)$, т.е. $\|\psi\| = \|\psi\| + \|A\psi\|$ для $\psi \in D(A)$;
- $\mathcal{D}(A)$ – банахово пространство $D(A)$ с нормой графика;
- $\sigma(A)$ – спектр оператора A ;
- $X = C^1([0, T]; E) \cap C([0, T]; D(A))$, где $T > 0$.

Скалярной функцией назовем функцию, принимающую действительные или комплексные значения в зависимости от того, действительным или комплексным является пространство E . *Векторная функция* – функция со значениями в каком-либо банаховом пространстве. Под *операторной функцией* понимается функция со значениями в банаховой алгебре $\mathcal{L}(E)$. Интегралы от операторных функций а priori рассматриваются в *сильной операторной топологии* $\mathcal{L}(E)$.

1. Линейная задача. Необходимые сведения

1.1. Постановка линейной задачи. В [1] рассматривалась задача о нахождении в банаховом пространстве E элемента f из соотношений

$$u'(t) = [Au](t) + \Phi(t)f, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

$$u(0) = \psi_0, \quad \psi_0 \in D(A), \quad (2)$$

$$\int_0^T u(t) d\mu(t) = \psi_1, \quad \psi_1 \in D(A), \quad (3)$$

где $T > 0$ – число, A порождает полугруппу $S(t)$ класса C_0 , $\Phi(t) \in C^1([0, T]; \mathcal{L}(E))$ – операторная функция, $\mu(t)$ – скалярная функция ограниченной вариации на $[0, T]$, $f \in E$ – искомое управление; интеграл в условии (3) понимается как векторный интеграл Римана–Стилтьеса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Решением* задачи (1)–(3) при фиксированных ψ_0, ψ_1 из $D(A)$ называется элемент $f \in E$ такой, что решение задачи Коши (1), (2) с данным f удовлетворяет условию (3).

Под *решением задачи Коши* понимается функция $u(t) \in X$, удовлетворяющая при $0 \leq t \leq T$ уравнению (1) и принимающая значение ψ_0 при $t = 0$. Требования, предъявленные к операторам A и $\Phi(t)$, гарантируют существование и единственность решения задачи Коши (1), (2) при любом f из E (см. [5], [6]) и оценку корректности [7, с. 193]

$$\|u\|_{C^1([0, T], E)} \leq K (\|\psi_0\| + \|\Phi(t)f\|_{C([0, T], E)})$$

с некоторой константой K . Поэтому задача (1)–(3) состоит в том, чтобы, варьируя элемент f , выбрать среди решений задачи Коши (1), (2) функцию $u(t) = u(t; f)$, удовлетворяющую условию (3). Согласно общепринятой терминологии задача (1)–(3) относится к *задачам управляемости* или к *обратным задачам*, т.е. к таким, в которых требуется найти управление (восстановить точный вид дифференциального уравнения) при помощи специального *переопределения* (в данном случае условия (3)).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В [1] отмечается, что условие переопределения (3) обобщает известные финальное и интегральное переопределения, получающиеся из (3) как частные случаи, и, тем самым, позволяет рассматривать задачи с различными переопределениями в рамках единой теории.

Так условие финального переопределения $u(T) = \psi_1$ получается как частный случай ситуации, когда в (3) функция $\mu(t)$ является функцией скачков:

$$\alpha_1 u(t_1) + \alpha_2 u(t_2) + \dots = \psi_1, \quad \text{где } t_i \in [0, T],$$

а числа α_i таковы, что $\sum |\alpha_i| < \infty$.

С другой стороны, если функция $\mu(t)$ абсолютно непрерывна, то вместо условия (3) получаем интегральное переопределение следующего вида:

$$(B) \int_0^T \omega(t) u(t) dt = \psi_1,$$

где $\omega(t) = \mu'(t)$ – суммируемая функция (здесь интеграл Бохнера при $\mu \in C^1[0, T]$ можно заменить интегралом Римана).

1.2. Корректность решения линейной задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Задача (1)–(3) является *корректной*, если для любых ψ_0, ψ_1 из $D(A)$ у нее существует единственное решение $f \in E$.

При этом в [1] доказывалось, что тогда решение f , отвечающее элементам ψ_0, ψ_1 удовлетворяет оценке

$$\|f\| \leq C(\|\psi_0\| + \|\psi_1\|)$$

с константой $C > 0$, не зависящей от ψ_0, ψ_1 .

Условия корректности в [1] получены для двух случаев: когда в (1) $\Phi(t)$ – скалярная функция и когда она операторная. Для наглядности последующих рассуждений далее приводятся их формулировки.

1.2.1. *Функция $\Phi(t)$ скалярная.* Пусть $\Phi(t)$ является оператором умножения на скалярную функцию $\phi(t)$, т.е. $\Phi(t)f \equiv \phi(t)f$, где $0 \leq t \leq T$, $f \in E$. Предположим, что $\phi \in C^1[0, T]$.

Для такой ситуации в [1] доказана

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mu(t)$ – неубывающая на $[0, T]$ функция, непрерывная справа при $t = 0$. Пусть $\phi \geq 0$ при $0 \leq t \leq T$ и $\int_0^T \phi(t) d\mu(t) \neq 0$, и пусть полугруппа $S(t)$, порожденная оператором A , удовлетворяет оценке

$$\|S(t)\| \leq M \exp(-\beta t) \quad (4)$$

с константами $M \geq 1, \beta > 0$. Предположим также, что выполнено любое из следующих условий:

- (а) $\phi'(t) \geq 0$ при $0 \leq t \leq T$;
- (б) функция $\mu(t)$ выпукла вверх на $[0, T]$.

Тогда задача (1)–(3) является корректной.

1.2.2. *Функция $\Phi(t)$ операторная.* Считаем, что пространство E является банаховой структурой (решеткой) с конусом E_+ . Условие положительности оператора $L \in \mathcal{L}(E)$, т.е. такого, что $L(E_+) \subset E_+$, обозначается символом $L \geq 0$. Полугруппа $S(t)$ называется *позитивной*, если $S(t) \geq 0$ при всех $t \geq 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mu(t)$ – неубывающая на $[0, T]$ функция, непрерывная справа при $t = 0$. Пусть $\Phi \geq 0$ при $0 \leq t \leq T$, причем оператор $J = \int_0^T \Phi(t) d\mu(t)$ удовлетворяет условиям $J^{-1} \in \mathcal{L}(E)$, $J^{-1} \geq 0$. Пусть полугруппа $S(t)$, порожденная оператором A , позитивна и компактна при $t > 0$. Будем считать, что спектр оператора A лежит в полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$. Наконец предположим, что выполнено любое из соотношений:

- (a) $\Phi'(t) \geq 0$ при $0 \leq t \leq T$;
- (b) функция $\mu(t)$ выпукла вверх на $[0, T]$.

Тогда задача (1)–(3) является корректной.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 [1]. Так как полугруппа $S(t)$ позитивна, то требование, предъявленное к спектру $\sigma(A)$ в теореме 2, означает, что $s(A) < 0$, где $s(A) \equiv \sup\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$ – спектральная граница оператора A .

ЗАМЕЧАНИЕ 3 [1]. Требования для полугруппы $S(t)$ и $s(A) < 0$ в теореме 2 эквивалентны оценке (4) в теореме 1.

1.3. Теорема об обратной функции.

ТЕОРЕМА. Пусть X, Y – банаховы пространства, U – открытое множество в X , а отображение $f: U \rightarrow Y$ строго дифференцируемо на U и $f'(x_0): X \rightarrow Y$ – изоморфизм X на Y для некоторой точки $x_0 \in U$. Тогда существует такая окрестность U' точки x_0 , что f осуществляет гомеоморфизм U' на открытое множество $f(U')$, $f'(x)$ – изоморфизм X на Y при $x \in U'$, $f^{-1}: f(U') \rightarrow X$ строго дифференцируемо на $f(U')$ и $(f^{-1})'(f(x)) = [f'(x)]^{-1}$ при $x \in U'$ (т.е. f – диффеоморфизм U' на $f(U')$ класса C^1).

2. Нелинейная задача. Локальная разрешимость

Все использованные ранее условные обозначения сохраняются.

В (1) дополнительно обозначим

$$\varphi = Jf = \left[\int_0^T \Phi(t) d\mu(t) \right] f \in E, \quad (5)$$

$$F(t) = \Phi(t)f \in C^1([0, T], E), \quad (6)$$

откуда следует, что

$$F(t) = [\Phi \circ J^{-1}](\varphi). \quad (7)$$

Рассмотрим также линейный оператор

$$\hat{A}: E \rightarrow E, \quad \hat{A}\varphi = \int_0^T u'(t) d\mu(t), \quad (8)$$

где $u(t)$ – решение линейной задачи (1)–(3) при $\psi_0 = 0$, которое находится для $f = J^{-1}\varphi$ (см. (5)).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из условия $s(A) < 0$ теоремы 2 следует, что $\lambda = 0$ – регулярная точка оператора A , т.е. A является обратимым на $\mathcal{D}(A)$, и тогда однородное уравнение

$$A\psi = 0 \quad (9)$$

имеет только нулевое решение, или, что равносильно, для любой $\chi \in E$ существует единственное $\psi \in \mathcal{D}(A)$ решение уравнения $A\psi = \chi$, обозначаемое $\psi = A^{-1}\chi$. В силу замечания 3 будем считать, что уравнение (9) всегда имеет только нулевое решение.

Положим

$$H = \{v \in X \mid \exists F \in C([0, T], E) : v - \text{решение (1), (2) при } \psi_0 = 0\},$$

т.е. H – пространство решений линейной задачи Коши.

Подразумевая в (2) $\psi_0 = 0$, отметим известный из [7, с. 192] факт: для любого $F \in C([0, T], E)$ существует единственное решение задачи Коши (1), (2) с оценкой корректности

$$\|u\|_{C^1([0, T], E)} \leq K \|F\|_{C([0, T], E)},$$

где $K > 0$ – константа, не зависящая от F .

Поэтому оператор

$$L = \frac{d}{dt} - A \quad (10)$$

осуществляет изометрический изоморфизм H на $LH = C([0, T], E)$ [7, с. 192] с нормой $\|u\|_H = \|Lu\|_{C([0, T], E)}$ и, следовательно, пространство $(H, \|\cdot\|_H)$ является банаховым; более того, в силу априорной оценки [7, с.193] H непрерывно вкладывается в $C^1([0, T], E)$ и, следовательно, в X .

ТЕОРЕМА 3. Пусть линейная задача (1)–(3) является корректной (см. теоремы 1 и 2), $G: X \rightarrow C([0, T], E)$ – нелинейный строго дифференцируемый по Фреше оператор с условиями $G'(0) = 0$, $G(0) = 0$.

Тогда нелинейная задача

$$\begin{aligned} u'(t) &= [Au](t) + Gu(t) + F(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) &= 0, \quad \psi_0 = 0, & \int_0^T u(t) d\mu(t) = \psi_1, \quad \psi_1 \in D(A), \end{aligned} \quad (11)$$

где $F(t)$ из (6), имеет единственное решение f в окрестности нуля в E при достаточно малых по норме ψ_1 из $D(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Всюду в дальнейшем полагаем, что в (2) $\psi_0 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обе части уравнений (11) и (1) принадлежат $C([0, T], E)$; поэтому к (11) и (1) можно применить линейный оператор переопределения $l \in \mathcal{L}(C([0, T], E), E)$, ставящий в соответствие функции $v(t)$ интеграл $\int_0^T v(t) d\mu(t)$:

$$\int_0^T u'(t) d\mu(t) = \int_0^T [Au](t) d\mu(t) + \int_0^T Gu(t) d\mu(t) + \int_0^T \Phi(t) f d\mu(t) \quad (\text{для (11)})$$

или

$$l(u'(t)) - l([Au](t)) = \varphi \quad (\text{для (1)}). \quad (12)$$

Заметим, что в силу замкнутости A и, далее, в силу (3)

$$\int_0^T [Au](t) d\mu(t) = A \left(\int_0^T u(t) d\mu(t) \right) = A\psi_1$$

и

$$l(Au) = A(lu). \quad (13)$$

Обозначим

$$A\psi_1 = -\chi. \quad (14)$$

Тогда из введенных обозначений в (8), (5) и (14) получаем, что линейная задача (1)–(3) преобразовывается к операторному уравнению

$$\chi = \varphi - \hat{A}\varphi = (I - \hat{A})\varphi. \quad (15)$$

Покажем, что задача (1)–(3) и уравнение (15) эквивалентны.

Для этого достаточно доказать, что если φ является решением (15) с некоторым $\chi \in E$, то решение (1), (2) $u(t)$, соответствующее данному $f = J^{-1}\varphi$, удовлетворяет (3) с $\psi_1 = -A^{-1}\chi$, т.е. нужно установить равенство $lu = -A^{-1}\chi$.

Действительно, заметив, что по определению $\hat{A}\varphi = l(u'(t))$, сложим (12) и (15) и, воспользовавшись (13), имеем $-A(lu) = \chi$, откуда по замечанию 4 следует эквивалентность задачи (1)–(3) и уравнения (15).

Вернемся к нелинейной задаче (11), (2), (3).

Поскольку H непрерывно вкладывается в X , то отображение $G: H \rightarrow C([0, T], E)$ тоже строго дифференцируемо по Фреше. Учитывая также, что $G'(0) = 0$ и $L: H \rightarrow C([0, T], E)$ – изоморфизм (см. (10)), по теореме об обратной функции (см. п. 1.3) отображение $\xi: u(t) \mapsto Lu(t) - Gu(t)$ – локальный диффеоморфизм класса C^1 окрестности нуля U' в H на окрестность нуля V' в $C([0, T], E)$.

Пусть $\eta = \xi^{-1}: V' \rightarrow U'$ – отображение, обратное к этому локальному диффеоморфизму, т.е. $\eta: F \mapsto u$, где u – решение уравнения (11), и η строго дифференцируемо на V' .

Имеем $F(t) = (\Phi \circ J^{-1})\varphi$ (см. (7)).

Рассмотрим

$$P(\varphi) = \eta[(\Phi \circ J^{-1})\varphi], \quad P: E \rightarrow H. \quad (16)$$

Поскольку отображение

$$\Lambda: \varphi \mapsto (\Phi \circ J^{-1})\varphi, \quad \Lambda: E \rightarrow C^1([0, T], E) \quad (17)$$

линейно и непрерывно, то P строго дифференцируемо по Фреше в окрестности нуля пространства E как отображение в H .

Далее будем искать решение нелинейной задачи (11), (2), (3) в виде $u = P(\varphi)$, где u – решение (11), (2), (3) с $F(t) = (\Phi \circ J^{-1})\varphi$ в правой части (11).

Введем отображение

$$M: E \rightarrow E, \quad M: \varphi \mapsto \left\{ \varphi - \int_0^T [P(\varphi)]_t d\mu(t) + \int_0^T G[P(\varphi)] d\mu(t) \right\}. \quad (18)$$

Тогда система (11), (2), (3) запишется в виде

$$M\varphi = \chi. \quad (19)$$

Докажем теперь, что задача (11), (2), (3) эквивалентна операторному уравнению (19), т.е. нужно показать, что если φ является решением уравнения (19) с некоторым χ , то

найденная по φ $u = P(\varphi)$, где u – решение задачи Коши (11), (2) с заданной $F(t) = (\Phi \circ J^{-1})\varphi$, удовлетворяет условию (3) с $\psi_1 = -A^{-1}\chi \in D(A)$.

Предположим противное: пусть u удовлетворяет (3) с $\tilde{\psi}_1 \neq \psi_1$.

Выводя операторное уравнение для этих φ и $\tilde{\psi}_1$, получаем, что φ удовлетворяет также уравнению

$$M\varphi = \tilde{\chi} = -A\tilde{\psi}_1. \quad (20)$$

Вычитая (20) из (19), получаем $\chi - \tilde{\chi} = -A\psi_1 + A\tilde{\psi}_1 = 0$, т.е. $A(\tilde{\psi}_1 - \psi_1) = 0$. По замечанию 4 это уравнение имеет только нулевое решение; следовательно, $\tilde{\psi}_1 = \psi_1$, что противоречит первоначальному предположению.

Покажем, что M строго дифференцируемо по Фреше в окрестности нуля в E и $M'(0) = I - \hat{A}$ (см. (8)). Заметим, что отображение $\varphi \mapsto \int_0^T G[P(\varphi)] d\mu(t)$ строго дифференцируемо по Фреше в окрестности нуля по теореме о дифференцируемости сложной функции и его производная в нуле равна нулю, поскольку $G'(0) = 0$. Далее, отображение $\varphi \mapsto \int_0^T [P(\varphi)]_t d\mu(t)$ строго дифференцируемо в окрестности нуля, так как $v(\cdot) \mapsto \int_0^T v'(t) d\mu(t)$ – линейный непрерывный оператор из X в E и, тем более, из H в E . При этом

$$\int_0^T [P'(0)\varphi]_t d\mu(t) = \hat{A}\varphi. \quad (21)$$

Следовательно, M строго дифференцируемо в окрестности нуля в E и $M'(0) = I - \hat{A}$ – это оператор линейной задачи (1)–(3) (см. (15)). Поскольку линейная задача является корректной, то существует $(M'(0))^{-1}$ и $\|(M'(0))^{-1}\| \leq 1/(1 - \|\hat{A}\|)$. По теореме об обратной функции существуют такие открытые окрестности нуля U и V в E , что M осуществляет диффеоморфизм класса $C^1 U$ на V .

Положим $\tilde{V} = \{\psi_1 \in D(A) \mid \chi = -A\psi_1 \in V\}$. Тогда $\tilde{V}$ – открытая окрестность нуля в $\mathcal{D}(A) \subset E$ и $\forall \psi_1 \in \tilde{V} \exists \varphi \in U: M\varphi = -A\psi_1$.

Тем самым, доказана локальная однозначная разрешимость операторного уравнения, эквивалентного задаче (11), (2), (3), что и завершает доказательство теоремы 3.

3. Нелинейная задача. Уточнение окрестности локальной разрешимости

3.1. Предварительные сведения. Обозначения. В дальнейшем будут приняты следующие обозначения:

- U_H – открытый единичный шар в H ;
- H из раздела 2 такое, что имеет место непрерывное вложение

$$H \subset C([0, T], E); \quad (22)$$

- $LH = C([0, T], E)$ (см. (10));
- $C_{X \rightarrow Y}$ – константа вложения X в Y ;
- $\Lambda: \varphi \mapsto (\Phi \circ J^{-1})\varphi$, $\Lambda: E \rightarrow LH$ (см. (17));
- $\|\Lambda\| = \|\Lambda\|_{\mathcal{L}(E, LH)}$;
- $\mathcal{L}(X, Y)$ – множество линейных непрерывных операторов из X в Y ;
- оператор

$$l \in \mathcal{L}(C([0, T], E), E), \quad lu = \int_0^T u(t) d\mu(t); \quad (23)$$

• оператор

$$B \in \mathcal{L}(H, E), \quad Bu = \int_0^T u'(t) d\mu(t). \quad (24)$$

Будем рассматривать обратную задачу (11), (2), (3), предполагая, что выполняются все условия теоремы 3 раздела 2 и дополнительно верна оценка

$$\|G'(u)\|_{\mathcal{L}(H, LH)} \leq \tilde{\vartheta}(r) \quad \text{при} \quad \|u\|_H \leq r, \quad (25)$$

где $\tilde{\vartheta}: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ — некоторая монотонно неубывающая функция.

Напомним один результат из [8] (см. также [2, с. 33]).

ТЕОРЕМА 4. Пусть X — банахово пространство, Y — отделимое топологическое векторное пространство, $A: X \rightarrow Y$ — линейный непрерывный оператор, U — открытый единичный шар в X , $P_{AU}: AX \rightarrow [0, \infty[$ — функционал Минковского множества AU , а отображение $\Psi: X \rightarrow AX$ удовлетворяет условию

$$P_{AU}(\Psi(x) - \Psi(\bar{x})) \leq \Theta(r)\|x - \bar{x}\| \quad \text{при} \quad \|x - x_0\| \leq r, \quad \|\bar{x} - x_0\| \leq r$$

для некоторого $x_0 \in X$, где функция $\Theta: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ монотонно не убывает. Положим $b(r) = \max(1 - \Theta(r), 0)$ при $r \geq 0$. Пусть

$$w = \int_0^\infty b(r) dr \in [0, \infty], \quad r_* = \sup\{r \geq 0 \mid b(r) > 0\},$$

$$w(r) = \int_0^r b(t) dt \quad (r \geq 0) \quad \text{и} \quad f(x) = Ax + \Psi(x) \quad \text{при} \quad x \in X.$$

Тогда для всех $r \in [0, r_*[$ и всех $y \in f(x_0) + w(r)AU$ найдется $x \in x_0 + rU$ такой, что $f(x) = y$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если в теореме 4 оператор A инъективен или Кер A имеет такое топологическое дополнение E в X , что $A(E \cap U) = AU$, то утверждение теоремы 4 следует из принципа сжимающих отображений, как отмечено в [8]. В частности, если A инъективен, то имеет место единственность решения.

В дальнейшем нам также понадобится теорема Адамара.

ТЕОРЕМА 5 (Адамар). Пусть X, Y — банаховы пространства, $A: X \rightarrow Y$ — изоморфизм X на Y (т.е. $AX = Y$, $\|A\| < \infty$, существует A^{-1} , $\|A^{-1}\| < \infty$), $f: X \rightarrow Y$ удовлетворяет условию Липшица с константой $q/\|A^{-1}\|$, где $q < 1$. Положим $F(x) = Ax + f(x)$. Тогда $F(X) = Y$, F биективен и

$$\|F^{-1}(y) - F^{-1}(\bar{y})\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - q} \|y - \bar{y}\|.$$

3.2. Оценки нелинейных добавок в дифференциальных операторах для прямой задачи. Центральным моментом здесь является получение оценки нелинейной части оператора в задаче (11), (2), (3) в классе $C([0, T], E)$, которая позволит в дальнейшем применить теорему 4.

Пусть $u(t) \in H$, $z(t) \in H$ (см. (22)) такие, что

$$\|u\|_H \leq r, \quad \|u + z\|_H \leq r. \quad (26)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|G(u + z) - G(u)\|_{C([0, T], E)} &= \left\| \int_0^1 G'(u + sz)z \, ds \right\|_{C([0, T], E)} \\ &\leq \int_0^1 \|G'(u + sz)\|_{\mathcal{L}(H, LH)} ds \|z\|_{C([0, T], E)} \\ &\leq \tilde{\vartheta}(r) C_{H \rightarrow C([0, T], E)} \|z\|_H \end{aligned}$$

(см. (22), (25)). Таким образом,

$$\|G(u + z) - G(u)\|_{C([0, T], E)} \leq \vartheta(r) \|z\|_H,$$

где

$$\vartheta(r) = C_{H \rightarrow C([0, T], E)} \tilde{\vartheta}(r). \quad (27)$$

Заметим, что $LU_H = U_{C([0, T], E)}$, так как L – изометрический изоморфизм H на $C([0, T], E)$.

Далее,

$$P_{LU_H}(G(u + z) - G(u)) = P_{U_{C([0, T], E)}}(G(u + z) - G(u)) \leq \vartheta(r) \|z\|_H.$$

Тогда

$$P_{LU_H}(G(u + z) - G(u)) \leq \vartheta(r) \|z\|_H. \quad (28)$$

В этом случае в теореме 4 можно положить $A = L$, $X = H$, $Y = LH$ с единичным шаром LU_H , $b(r) = \bar{b}(r)$, $\Psi = G$, где

$$\bar{b}(r) = \max(1 - \vartheta(r), 0).$$

Если $r \in [0, r_*[$, то берем $\bar{b}(r) = 1 - \vartheta(r)$, где r_* – корень уравнения

$$1 - \vartheta(r) = 0, \quad (29)$$

и с учетом теоремы 4 имеем

$$w(r) = \int_0^r b(t) \, dt = \int_0^r (1 - \vartheta(t)) \, dt = r - \int_0^r \vartheta(t) \, dt. \quad (30)$$

Если же $r \in [r_*, \infty]$, то берем $\bar{b}(r) = 0$ и $w(r) = w(r_*)$.

Используя теорему 4, получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6. Пусть G удовлетворяет (25) и выполняются условия теоремы 3. Далее, пусть $\vartheta(r)$ из (27), w из (30), а r_* – корень уравнения (29). Тогда

$$\forall r \in [0, r_*[\quad \forall F \in w(r)LU_H \quad \exists! u \in rU_H : \quad L[u(t)] - G[u(t)] = F(t).$$

3.3. Оценки нелинейных добавок в операторах, обратных к дифференциальным операторам для прямой задачи. Из раздела 2 имеем

$$\xi(v) = L(v) - G(v) = F \implies \eta(F) = L^{-1}F - Q(F),$$

откуда следует, что

$$F = \xi(\eta(F)) = \xi(L^{-1}F - Q(F)) = F - L(Q(F)) - G(L^{-1}F - Q(F)).$$

Тогда $L(Q(F)) - G(L^{-1}F - Q(F)) = 0$, т.е.

$$L(Q(F)) = G(L^{-1}F - Q(F)), \quad Q(F) = L^{-1}G(L^{-1}F - Q(F)) = L^{-1}G(\eta(F)).$$

Следовательно,

$$Q(F + \Delta F) - Q(F) = L^{-1}[G(\eta(F + \Delta F)) - G(\eta(F))].$$

Пользуясь полученной теоремой 6, заключаем, что

$$\begin{aligned} \|F\|_{LH} < w(r) &\implies \|\eta(F)\|_H < r, \\ \|F + \Delta F\|_{LH} < w(r) &\implies \|\eta(F + \Delta F)\|_H < r, \end{aligned} \quad (31)$$

где $w(r)$ из (30). Тогда из (28) имеем

$$P_{LU_H}(G(\eta(F + \Delta F)) - G(\eta(F))) \leq \vartheta(r)\|z\|_H, \quad (32)$$

где

$$z = \eta(F + \Delta F) - \eta(F) = \int_0^1 \eta'(F + s\Delta F)\Delta F ds = \int_0^1 (\xi'(\eta(F + s\Delta F)))^{-1} ds \cdot \Delta F$$

(мы воспользовались теоремой об обратной функции). Тогда, пользуясь неравенством Минковского для интегралов и свойством изометричности оператора L , получаем, что

$$\|z\|_H \leq \int_0^1 \|(\xi'(\eta(F + s\Delta F)))^{-1}\|_{\mathcal{L}(LH, H)} ds \cdot \|\Delta F\|_{LH} \leq \frac{1}{1 - \vartheta(r)} \|\Delta F\|_{LH}$$

(в последнем неравенстве мы использовали теорему Адамара). Отсюда следует, что (32) примет вид

$$P_{LU_H}(G(\eta(F + \Delta F)) - G(\eta(F))) \leq \vartheta(r) \cdot \frac{1}{1 - \vartheta(r)} \|\Delta F\|_{LH}.$$

Пусть $r' = w(r)$. Тогда $r = w^{-1}(r')$,

$$P_{U_H}(Q(F + \Delta F) - Q(F)) \leq \vartheta(w^{-1}(r')) \cdot \frac{1}{1 - \vartheta(w^{-1}(r'))} \|\Delta F\|_{LH},$$

т.е. $P_{U_H}(Q(F + \Delta F) - Q(F)) \leq \Theta(r') \|\Delta F\|_{LH}$, где

$$\Theta(r') = \frac{\vartheta(w^{-1}(r'))}{1 - \vartheta(w^{-1}(r'))}. \quad (33)$$

В условии теоремы 4 можно положить $A = L^{-1}$, $X = H$, $Y = L^{-1}H$ с единичным шаром $L^{-1}U_H$, $\Psi = Q$, $\Theta(r) = \Theta(r')$ и $b(r) = B(r')$, где $\Theta(r')$ из (33) и $B(r') = \max(1 - \Theta(r'), 0)$.

Если $r' \in [0, r'_*]$, то берем

$$B(r') = \frac{1 - 2\vartheta(w^{-1}(r'))}{1 - \vartheta(w^{-1}(r'))},$$

где r'_* – корень уравнения

$$1 - 2\vartheta(w^{-1}(r')) = 0, \quad (34)$$

и с учетом теоремы 4 имеем

$$W(r') = \int_0^{r'} B(t) dt = r' - \int_0^{r'} \Theta(t) dt,$$

т.е.

$$W(r') = r' - \int_0^{r'} \frac{\vartheta(w^{-1}(t))}{1 - \vartheta(w^{-1}(t))} dt. \quad (35)$$

Если же $r' \in [r'_*, \infty]$, то берем $B(r') = 0$ и $W(r') = W(r'_*)$.

Используя теорему 4, получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 7. Пусть G удовлетворяет (25) и выполняются условия теоремы 3. Далее, пусть $\vartheta(r)$ из (27), w из (30), $W(r')$ из (35) и r'_* – корень уравнения (34). Тогда

$$\forall r' \in [0, r'_*] \quad \forall v \in W(r')L^{-1}U_H \quad \exists! F \in r'U_{LH} : \quad L^{-1}F - Q(F) = v.$$

3.4. Оценки нелинейных добавок в операторах для обратной задачи. Из (18) имеем

$$\begin{aligned} M\varphi &= \chi = \varphi - \int_0^T [P(\varphi)]_t d\mu(t) + \int_0^T G[P(\varphi)] d\mu(t) \\ &= I\varphi - \int_0^T [P'(0)\varphi]_t d\mu(t) + \int_0^T G[P(\varphi)] d\mu(t) - \int_0^T [P(\varphi) - P'(0)\varphi]_t d\mu(t) \end{aligned}$$

или, если учитывать выражение для оператора $\hat{A}$ (см. (21)),

$$M\varphi = \chi = (I - \hat{A})\varphi + (I \circ G)[P(\varphi)] + \hat{A}\varphi - B[P(\varphi)] = \hat{A}\varphi + \hat{\Psi}(\varphi),$$

где $\hat{A}$ – линейный оператор из (8), ставящий в соответствие $\varphi \in E$ решение $u(t)$ линейной задачи (1)–(3), P – оператор, определенный в (16), χ определен в (14), l – оператор, определенный в (23), B – оператор, определенный в (24),

$$\hat{A}\varphi = (I - \hat{A})\varphi, \quad (36)$$

$$\hat{\Psi}(\varphi) = \hat{A}\varphi + (l \circ G)[P(\varphi)] - B[P(\varphi)]. \quad (37)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_E \leq \tilde{r} &\implies \|F\|_{LH} = \|\Lambda\varphi\|_{LH} \leq \|\Lambda\|_{\mathcal{L}(E, LH)} \tilde{r} \\ &\implies \|P(\varphi)\|_H = \|\eta(\Lambda\varphi)\|_H \leq w^{-1}(\|\Lambda\| \tilde{r}) \end{aligned}$$

(в последнем неравенстве использовано (31)), т.е.

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_E \leq \tilde{r} &\implies \|P(\varphi)\|_H \leq w^{-1}(\|\Lambda\| \tilde{r}), \\ \|\varphi + sz\|_E \leq \tilde{r} &\implies \|P(\varphi + sz)\|_H \leq w^{-1}(\|\Lambda\| \tilde{r}). \end{aligned} \quad (38)$$

Для оценки $\|P'(\varphi + sz)\|_{\mathcal{L}(E, H)}$, которая понадобится в дальнейшем, заметим, что $P'(\varphi + sz) = \eta'(\Lambda(\varphi + sz)) \circ \Lambda = [\xi'(P(\varphi + sz))]^{-1} \circ \Lambda$ (по теореме об обратной функции). Далее, имеем

$$\xi'(P(\varphi + sz)) = (L' - G')[P(\varphi + sz)] = (L - G')[P(\varphi + sz)] = L(I - L^{-1}G')[P(\varphi + sz)].$$

Следовательно,

$$[\xi'(P(\varphi + sz))]^{-1} = [(I - L^{-1}G')[P(\varphi + sz)]]^{-1} \circ L^{-1}$$

и, значит,

$$P'(\varphi + sz) = [(I - L^{-1}G')[P(\varphi + sz)]]^{-1} \circ L^{-1} \circ \Lambda. \quad (39)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \|P'(\varphi + sz)\|_{\mathcal{L}(E, H)} &\leq \|L^{-1}\| \|\Lambda\| \|(I - L^{-1}G')[P(\varphi + sz)]\|^{-1} \\ &\leq \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(LH, H)} \|\Lambda\| \cdot \frac{1}{1 - \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(LH, H)} \|G'(P(\varphi + sz))\|_{\mathcal{L}(H, LH)}} \end{aligned}$$

(по теореме Адамара), и из равенства $\|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(LH, H)} = 1$ получаем, что

$$\|P'(\varphi + sz)\|_{\mathcal{L}(E, H)} \leq \frac{\|\Lambda\|}{1 - \|G'(P(\varphi + sz))\|_{\mathcal{L}(H, LH)}}. \quad (40)$$

Теперь, для того чтобы оценить $\|G'(P(\varphi + sz))\|_{\mathcal{L}(H, LH)}$, воспользуемся (28) в виде

$$P_{LH} \left(\frac{G[P(\varphi + sz) + te] - G[P(\varphi + sz)]}{t} \right) \leq \vartheta(w^{-1}(\|\Lambda\| \tilde{r})) \|e\|_H,$$

где e – произвольный вектор из H , а $t \neq 0$. При $t \rightarrow 0$ получаем

$$P_{LH}(G'[P(\varphi + sz)](e)) \leq \vartheta(w^{-1}(\|\Lambda\|\tilde{r}))\|e\|_H,$$

откуда в силу произвольности e следует, что

$$\|G'[P(\varphi + sz)]\|_{\mathcal{L}(H, LH)} \leq \vartheta(w^{-1}(\|\Lambda\|\tilde{r})), \quad (41)$$

и, если подставить (41) в (40), то

$$\|P'(\varphi + sz)\|_{\mathcal{L}(E, H)} \leq \frac{\|\Lambda\|}{1 - \vartheta(w^{-1}(\|\Lambda\|\tilde{r}))}. \quad (42)$$

Положим $R(\varphi) = \hat{A}\varphi + B[P(\varphi)]$. Тогда

$$\begin{aligned} R(\varphi + z) - R(\varphi) &= - \int_0^T [P(\varphi + z) - P'(0)(\varphi + z) - P(\varphi) + P'(0)\varphi]_t d\mu(t) \\ &= - \int_0^T [P(\varphi + z) - P'(0)z - P(\varphi)]_t d\mu(t) \\ &= -B[P(\varphi + z) - P'(0)z - P(\varphi)]. \end{aligned}$$

Заметим, что $P'(0) = \eta'(0) \circ \Lambda = L^{-1} \circ \Lambda$ и

$$P'(0)\varphi - P(\varphi) = (L^{-1} \circ \Lambda)\varphi - P(\varphi) = L^{-1}G(P(\varphi)),$$

т.е. $P(\varphi) = (L^{-1} \circ \Lambda)\varphi - L^{-1}G(P(\varphi))$, а тогда

$$\begin{aligned} P(\varphi + z) - P'(0)z - P(\varphi) &= P(\varphi + z) - P(\varphi) - (L^{-1} \circ \Lambda)z \\ &= L^{-1}[G(P(\varphi + z)) - G(P(\varphi))] \\ &= L^{-1} \left[\int_0^1 G'(P(\varphi + sz))P'(\varphi + sz)z ds \right]. \end{aligned}$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \|R(\varphi + z) - R(\varphi)\|_E &= \| -B[P(\varphi + z) - P'(0)z - P(\varphi)] \|_E \\ &\leq \|B\|_{\mathcal{L}(H, E)} \|P(\varphi + z) - P(\varphi) - L^{-1} \circ \Lambda z\|_H \\ &\leq \|B\|_{\mathcal{L}(H, E)} \left\| L^{-1} \left[\int_0^1 G'(P(\varphi + sz))P'(\varphi + sz)z ds \right] \right\|_H \\ &\leq \|B\|_{\mathcal{L}(H, E)} \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(LH, H)} \left\| \left[\int_0^1 G'(P(\varphi + sz))P'(\varphi + sz), ds \right] z \right\|_{C([0, T], E)} \\ &\leq \|B\|_{\mathcal{L}(H, E)} \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(LH, H)} \\ &\quad \times \int_0^1 \|G'(P(\varphi + sz))\|_{\mathcal{L}(H, LH)} \|P'(\varphi + sz)\|_{\mathcal{L}(E, H)} ds \|z\|_E \\ &\leq \|B\|_{\mathcal{L}(H, E)} \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(LH, H)} \frac{\|\Lambda\|\vartheta(w^{-1}(\|\Lambda\|\tilde{r}))}{1 - \vartheta(w^{-1}(\|\Lambda\|\tilde{r}))} \|z\|_E \end{aligned}$$

$$= \|B\|_{\mathcal{L}(H, E)} \frac{\|\Lambda\| \vartheta(w^{-1}(\|\Lambda\|\tilde{r}))}{1 - \vartheta(w^{-1}(\|\Lambda\|\tilde{r}))} \|z\|_E$$

(в предпоследнем переходе мы воспользовались оценками (41) и (42), а в последнем – равенством $\|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(LH, H)} = 1$, верным в силу того, что L – изометрический изоморфизм). Обозначим

$$\zeta = \frac{\|\Lambda\| \vartheta(w^{-1}(\|\Lambda\|\tilde{r}))}{1 - \vartheta(w^{-1}(\|\Lambda\|\tilde{r}))}. \quad (43)$$

Итак, была получена оценка

$$\|R(\varphi + z) - R(\varphi)\|_E \leq \|B\|_{\mathcal{L}(H, E)} \zeta \|z\|_E. \quad (44)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^T (G[P(\varphi + z)] - G[P(\varphi)]) d\mu(t) \right\|_E &= \|l(G[P(\varphi + z)] - G[P(\varphi)])\|_E \\ &\leq \|l\|_{\mathcal{L}(C([0, T], E), E)} \|G[P(\varphi + z)] - G[P(\varphi)]\|_{C([0, T], E)} \\ &\leq \|l\|_{\mathcal{L}(C([0, T], E), E)} \left\| \left(\int_0^1 G'[P(\varphi + z)] P'(\varphi + z) ds \right) z \right\|_{C([0, T], E)} \\ &\leq \|l\|_{\mathcal{L}(C([0, T], E), E)} \zeta \|z\|_E, \end{aligned}$$

т.е.

$$\|l(G[P(\varphi + z)] - G[P(\varphi)])\|_E \leq \|l\|_{\mathcal{L}(C([0, T], E), E)} \zeta \|z\|_E. \quad (45)$$

Тогда из (44) и (45) следует, что

$$\begin{aligned} \|\hat{\Psi}(\varphi + z) - \hat{\Psi}(\varphi)\|_E &\leq \|(l \circ G)[P(\varphi + z)] - (l \circ G)[P(\varphi)]\|_E + \|R(\varphi + z) - R(\varphi)\|_E \\ &\leq (\|B\|_{\mathcal{L}(H, E)} + \|l\|_{\mathcal{L}(C([0, T], E), E)}) \zeta \|z\|_E. \end{aligned}$$

Поэтому

$$P_{\hat{A}U_E}(\hat{\Psi}(\varphi + z) - \hat{\Psi}(\varphi)) \leq \hat{\Theta}(\tilde{r}) \|z\|_E,$$

где

$$\hat{\Theta}(\tilde{r}) = \|\hat{A}^{-1}\| (\|B\|_{\mathcal{L}(H, E)} + \|l\|_{\mathcal{L}(C([0, T], E), E)}) \zeta.$$

В этом случае в условии теоремы 4 можно положить $A = \hat{A}$, $X = E$, $Y = E$ с единичным шаром $\hat{A}U_E$, $b(r) = \hat{B}(\tilde{r})$, $\Psi = \hat{\Psi}$, $\Theta(r) = \hat{\Theta}(\tilde{r})$, где $\hat{A}$ из (36), $\hat{\Psi}$ из (37), $\hat{B}(\tilde{r}) = \max[1 - \hat{\Theta}(\tilde{r}), 0]$.

Если $\tilde{r} \in [0, \tilde{r}_*]$, то берем $\hat{B}(\tilde{r}) = 1 - \hat{\Theta}(\tilde{r})$, где $\tilde{r}_*$ – корень уравнения

$$1 - \hat{\Theta}(\tilde{r}) = 0.$$

При этом положим $w(r) = \hat{W}(\tilde{r})$, где

$$\hat{W}(\tilde{r}) = \int_0^{\tilde{r}} b(t) dt = \tilde{r} - \|\hat{A}^{-1}\| (\|B\|_{\mathcal{L}(H, E)} + \|l\|_{\mathcal{L}(C([0, T], E), E)}) \int_0^{\tilde{r}} \zeta(t) dt.$$

В случае же, когда $\tilde{r} \in [\tilde{r}_*, \infty]$, возьмем $\hat{B}(\tilde{r}) = 0$ и $\hat{W}(\tilde{r}) = \hat{W}(\tilde{r}_*)$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть G удовлетворяет (25), т.е.

$$\|G'(u)\|_{\mathcal{L}(H, LH)} \leq \tilde{\vartheta}(r) \quad \text{при} \quad \|u\|_H \leq r,$$

где $\tilde{\vartheta}: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ – некоторая монотонно неубывающая функция, и выполняются условия теоремы 3. Далее, пусть (для удобства, мы приведем все ранее полученные формулы)

$$\vartheta(r) = C_{H \rightarrow C([0, T], E)} \tilde{\vartheta}(r), \quad w(r) = r - \int_0^r \vartheta(t) dt, \quad \zeta = \frac{\|\Lambda\| \vartheta(w^{-1}(\|\Lambda\| \tilde{r}))}{1 - \vartheta(w^{-1}(\|\Lambda\| \tilde{r}))},$$

$$\hat{W}(\tilde{r}) = \int_0^{\tilde{r}} b(t) dt = \tilde{r} - \|\hat{A}^{-1}\| (\|B\|_{\mathcal{L}(H, E)} + \|l\|_{\mathcal{L}(C([0, T], E), E)}) \int_0^{\tilde{r}} \zeta(t) dt$$

и $\tilde{r}_*$ – корень уравнения

$$1 - \|\hat{A}^{-1}\| (\|B\|_{\mathcal{L}(H, E)} + \|l\|_{\mathcal{L}(C([0, T], E), E)}) \zeta = 0.$$

Тогда

$$\forall \tilde{r} \in [0, \tilde{r}_*[\quad \forall \chi \in \hat{W}(\tilde{r}) \hat{A} U_E \quad \exists! \varphi \in \tilde{r} U_E : \quad M(\varphi) = \chi.$$

Таким образом, операторное уравнение (19) является однозначно разрешимым и, следовательно, эквивалентная ему задача управляемости (11), (2), (3) также имеет единственное решение в найденной окрестности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Прилешко А. И., Тихонов И. В. Восстановление неоднородного слагаемого в абстрактном эволюционном уравнении // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 2. С. 167–188.
- [2] Сухинин М. Ф. Избранные главы нелинейного анализа. М.: Изд-во РУДН, 1992.
- [3] Розанова А. В. Обратная задача для квазилинейного уравнения теплопроводности с интегральным переопределением // Вестн. РУДН. Сер. матем. 2002. Т. 9. № 1. С. 112–134.
- [4] Акпата Э. Управляемость в нелинейных параболических задачах. Дисс. ... к.ф.-м.н. М.: РУДН, 1999.
- [5] Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
- [6] Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [7] Гаевский Х., Греггер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
- [8] Сухинин М. Ф. О разрешимости нелинейного стационарного уравнения переноса // ТМФ. 1995. Т. 103. № 1. С. 23–31.