Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Демьяненко, О точных оценках кручения эллиптических кривых, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 4, 503–508

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1310>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:00:34

УДК 511

О ТОЧНЫХ ОЦЕНКАХ КРУЧЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

В. А. Демьяненко

Над произвольным алгебраическим числовым полем указаны неулучшаемые оценки кручения кривых $y^2 = x^3 + s$ и $y^2 = x^3 + rx$.

Библиография: 3 названия.

Пусть $\mathbb{k}$ – алгебраическое числовое поле степени n и $F_1: y^2 = x^3 + s, F_2: y^2 = x^3 + rx$ – кривые, определенные над этим полем.

Цель настоящей заметки – доказательство теорем, приведенных в тезисах [1].

Пусть $O_m = \{x_{1/m}, y_{1/m}\}$ – примитивная $\mathbb{k}$ -точка порядка m , расположенная на одной из кривых F_1 или F_2 , и $tO_m = \{x_{t/m}, y_{t/m}\}$.

ЛЕММА 1. Если O_{2^α} – примитивная $\mathbb{k}$ -точка на F_1 , то

$$2^{2^\alpha - 3} \leq n. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем на F_1 точку третьего порядка $O_3 = \{x_{1/3}, y_{1/3}\} = \{0, \sqrt{s}\}$ и рассмотрим тождество

$$\frac{x_{1/2^\alpha}^{2^{2^\alpha - 2}}}{x_{1/2}} = \pm 2^{2(2^{2^\alpha - 2} - 1)/3} \prod_{l=0}^{\alpha-2} z_{2^l}^{2^{2^l}}, \quad z_{2^l} = \frac{y_{1/2^{l+2}}^2 y_{1/3}^2}{y_{1/2^{l+2}+1/3} y_{1/2^{l+2}-1/3}}, \quad (2)$$

вытекающее из соотношений

$$\frac{(x_{2^{t-1}a} - x_{2^{t-1}b})^4}{x_{2^t a} - x_{2^t b}} = -4 \frac{y_{2^{t-1}a}^2 y_{2^{t-1}b}^2}{y_{2^{t-1}(a-b)} y_{2^{t-1}(a+b)}}, \quad t = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Имеем $y_{1/3}^2 = s$, $y_{a+1/3} y_{a-1/3} = s(8s - x_a^3)/x_a^3$, вследствие этого $z_{2^l} \in \mathbb{k}$. Так как $x_{1/2^t} = s^{1/3} x'_{1/2^t}$, $x_{1/2} = s^{1/3}$, $y_{1/2^t} = s^{1/2} y'_{1/2^t}$ ($t > 1$), где $x'_{1/2^t}$, $y'_{1/2^t}$ – целые алгебраические числа, причем $(y'_{1/2^t}, 2) = 1$, получаем

$$x'_{1/2^\alpha} = \pm 2^{2(2^{2^\alpha - 2} - 1)/3} z, \quad z - \text{целое}, \quad (z, 2) = 1. \quad (4)$$

Переходя к сопряженным полям $\mathbb{k}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), из (4) имеем

$$\frac{2}{3} (2^{2^\alpha - 2} - 1)n \equiv 0 \pmod{2^{2^\alpha - 2}}, \quad n \equiv 0 \pmod{2^{2^\alpha - 3}}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Если O_{3^β} – примитивная $\mathbb{k}$ -точка на F_1 , то

$$\begin{aligned} 3^{2\beta-3} &\leq n \quad \text{при } x_{3^\beta-1/3^\beta} = x_{1/3} = 0, \\ 3^{2\beta-2} &\leq n \quad \text{при } x_{3^\beta-1/3^\beta} = x_{1/3} = -\sqrt[3]{4s}. \end{aligned} \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем на F_1 точку второго порядка $O_2 = \{x_{1/2}, y_{1/2}\} = \{-\sqrt[3]{s}, 0\}$ и рассмотрим кривую

$$v^2 = u^4 + 3\rho u^2 + 3\rho^2, \quad \rho = -\sqrt[3]{s}, \quad u = \sqrt{x - \rho}, \quad v = \frac{y}{u}. \quad (6)$$

На кривой (6) над полем $\mathbb{k}(\rho)$ расположена примитивная порядка 3^β точка $O_{3^\beta} = \{u_{1/3^\beta}, v_{1/3^\beta}\}$, $u_{1/3^\beta} = \sqrt{x_{1/3^\beta} - \rho}$, $v_{1/3^\beta} = y_{1/3^\beta} / u_{1/3^\beta}$, поэтому $u_{1/3^\beta}, v_{1/3^\beta} \in \mathbb{k}(\rho)$. Для $u_{1/3^\beta}$ кривой (6) имеем

$$u_{1/3^\beta} = \begin{cases} 3^{(1-3^{2\beta-2})/4} s^{1/6} u'_{1/3^\beta} & \text{при } x_{3^\beta-1/3^\beta} = x_{1/3} = 0, \\ 3^{(1-3^{2\beta-1})/4} s^{1/6} u'_{1/3^\beta} & \text{при } x_{3^\beta-1/3^\beta} = x_{1/3} = -\sqrt[3]{4s}, \end{cases} \quad (7)$$

где $u'_{1/3^\beta}$ – алгебраическая единица.

Из (7) аналогично лемме 1 следует

$$\begin{aligned} n &\equiv 0 \pmod{3^{2\beta-3}} \quad \text{при } x_{1/3} = 0, \\ n &\equiv 0 \pmod{3^{2\beta-2}} \quad \text{при } x_{1/3} = -\sqrt[3]{4s}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Если O_{p^γ} – примитивная $\mathbb{k}$ -точка на F_1 ($p = 6t + 1$ – простое), то

$$\varphi(p^\gamma) = p^{\gamma-1}(p-1) \leq 3n. \quad (8)$$

ЛЕММА 4. Если O_{p^γ} – примитивная $\mathbb{k}$ -точка на F_1 ($p = 6t + 5$ – простое), то

$$p^{2\gamma-2}(p^2-1) \leq 6n. \quad (9)$$

Доказательства лемм 3 и 4 приведены в [2].

ЛЕММА 5. Если O_{2^α} – примитивная $\mathbb{k}$ -точка на F_2 , то

$$\begin{aligned} 2^{2\alpha-4} &\leq n \quad \text{при } x_{2^{\alpha-1}/2^\alpha} = x_{1/2} = 0, \\ 2^{2\alpha-3} &\leq n \quad \text{при } x_{2^{\alpha-1}/2^\alpha} = x_{1/2} = \rho = \sqrt{-r}. \end{aligned} \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем тождество

$$\frac{(x_{1/2^\alpha} - x_{1/2^{\alpha-1}})^{2^{2\alpha-4}}}{x_{1/4} - x_{1/2}} = \pm 2^{2(2^{2\alpha-4}-1)/3} \prod_{l=0}^{\alpha-3} z_{2^l}^{2^{2(\alpha-3-l)}}, \quad (11)$$

$$z_{2^l} = \frac{y_{1/2^\alpha-l}^2 y_{1/2^{\alpha-1-l}}^2}{y_{1/2^{\alpha-l}-1/2^{\alpha-1-l}} y_{1/2^{\alpha-l}+1/2^{\alpha-1-l}}},$$

следующее, как и (2), из соотношений (3).

Так как $(i^2 = -1)$

$$x_{1/4} - x_{1/2} = \begin{cases} i\rho & \text{при } x_{1/2} = 0, \\ 2^{1/2}\rho & \text{при } x_{1/2} = \sqrt{-r} \end{cases} \quad (12)$$

и

$$y_{1/2^t} = 2^{1/2} r^{3/4} y'_{1/2^t}, \quad t > 1,$$

где $y'_{1/2^t}$ – алгебраические единицы, из (11) и (12), как и в лемме 1, получаем

$$\begin{aligned} (2^{2\alpha-4} - 1)n &\equiv 0 \pmod{2^{2\alpha-4}} \quad \text{при } x_{1/2} = 0, \\ n + 2(2^{2\alpha-4} - 1)n &\equiv 0 \pmod{2^{2\alpha-3}} \quad \text{при } x_{1/2} = \sqrt{-r}, \end{aligned}$$

и неравенства (10) справедливы.

Так как для кривой F_2

$$\sqrt{x_{1/p^\gamma}} = \frac{(x_{(t/p)^\gamma} - \rho)^2 + 2\rho^2}{2y_{(t/p)^\gamma}}, \quad 2t \equiv 1 \pmod{p^\gamma},$$

при нечетном p имеем $x_{1/p^\gamma} = x_{1/p^\gamma}'^2$, $x_{1/p^\gamma}' \in \mathbb{k}$, и на основании [2] справедливы следующие леммы.

ЛЕММА 6. Если O_{p^γ} – примитивная $\mathbb{k}$ -точка на F_2 ($p = 4t + 1$ – простое), то

$$\varphi(p^\gamma) = p^{\gamma-1}(p-1) \leq 2n. \quad (13)$$

ЛЕММА 7. Если O_{p^γ} – примитивная $\mathbb{k}$ -точка на F_2 ($p = 4t + 3$ – простое), то

$$p^{2\gamma-2}(p^2-1) \leq 4n. \quad (14)$$

Легко установить, что для некоторых кривых F_1 и F_2 в (1), (5), (8)–(10), (13) и (14) равенства достижимы, поэтому полученные оценки p -кручения являются уже неулучшаемыми. В частности, если $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел и O_m – примитивная $\mathbb{Q}$ -точка порядка m , то из лемм 1–4 и лемм 5–7 соответственно следует, что $6 \equiv 0 \pmod{m}$ для кривой F_1 и $4 \equiv 0 \pmod{m}$ для кривой F_2 , т.е. получаем известную теорему Нагелля–Лутц–Морделла.

ЛЕММА 8. Если

$$m = m_k = \prod_{k=1}^l p_k^{\gamma_k}$$

($p_k = 6t_k + 1$ – простые) и O_m – примитивная $\mathbb{k}$ -точка на F_1 , то

$$\varphi(m) = \varphi(m_k) = \prod_{k=1}^l p_k^{\gamma_k-1} (p_k - 1) \leq 3n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Расширим поле $\mathbb{k}$ до $\mathbb{k}' = \mathbb{k}(\sqrt[3]{s})$ и перепишем кривую F_1 над полем $\mathbb{k}'$ в виде $y^2 = x^3 + 1$. На основании лемм 6 и 10 работы [3] имеем

$$F'_1: Y^2 = X^3 + r_{(\alpha/m)}X + s_{(\alpha/m)},$$

$$r_{(\alpha/m)} = -15 \sum_{\delta=1}^{m-1} x_{\delta(\alpha/m)}^2, \quad s_{(\alpha/m)} = s - 7 \sum_{\delta=1}^{m-1} (2s + 5x_{\delta(\alpha/m)}^2),$$

P – произвольная $\mathbb{k}$ -точка на F_1 и $\{O_m, O'_m\}$ – базис всех точек порядка m на F_1 ,

$$\alpha_1 O_m + \alpha_2 O'_m = \{x_{(\alpha/m)}, y_{(\alpha/m)}\}, \quad (\alpha_1, \alpha_2, m) = 1,$$

$$P + \alpha_1 O_m + \alpha_2 O'_m = \{x_{1,(\alpha/m)}, y_{1,(\alpha/m)}\},$$

$$P' = \{X_{1,(\alpha/m)}, Y_{1,(\alpha/m)}\} = \left\{ \sum_{\gamma=0}^{m-1} x_{1,\gamma(\alpha/m)} - \sum_{\delta=1}^{m-1} x_{\delta(\alpha/m)}, \sum_{\gamma=0}^{m-1} y_{1,\gamma(\alpha/m)} \right\} \in F'_1$$

и

$$P = \beta_1 O_m + \beta_2 O'_m = \{x_{(\beta/m)}, y_{(\beta/m)}\}, \quad (\beta/m) \neq l(\alpha/m), \quad (\beta_1, \beta_2, m) = 1,$$

$$X_{t(\beta/m),(\alpha/m)} = \sum_{k=0}^{[m/2]} a_{k,(\alpha/m)} (\varepsilon^t - \varepsilon^{-t})^{2k-2},$$

$$Y_{t(\beta/m),(\alpha/m)} = \sum_{k=0}^{[m/2]} b_{k,(\alpha/m)} (\varepsilon^t - \varepsilon^{-t})^{2k-3}, \quad (15)$$

$$\varepsilon = e^{2\pi i/m}, \quad a_{k,(\alpha/m)}, b_{k,(\alpha/m)} \in \mathbb{Q}(s_k), \quad s_k - \text{симметрические функции,}$$

$$\sum_{\delta_1, \dots, \delta_k} x_{\delta_1(\alpha/m)} \cdots x_{\delta_k(\alpha/m)}.$$

Если $\varphi(m) > 3n$, то из (15) получаем

$$D_{(\alpha/m)} = \frac{D^m}{\prod_{\delta=1}^{m-1} y_{0,\delta(\alpha/m)}^4} = 0, \quad D = 0,$$

что противоречит условию $D = -27s^2 \neq 0$. Лемма доказана.

Пусть

$$m_j = \prod_{j=1}^l p_j^{\delta_j}$$

($p_j = 6t_j + 5$ – простые) и

$$\psi(m_j) = \prod_{j=1}^l p_j^{\delta_j-1} (p_j + 1).$$

ЛЕММА 9. Если $m = m_j$ и O_m – примитивная $\mathbb{k}$ -точка на F_1 , то

$$\varphi(m_j)\psi(m_j) = \prod_{j=1}^l p_j^{2\delta_j-2}(p_j - 2) \leq 6n. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем, как и в лемме 8, равенства

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\{(\alpha/m)\} \\ (\beta/m) \notin \{(\alpha/m)\}}} X_{t(\beta/m),(\alpha/m)} &= \sum_{k=0}^{[m/2]} \left(\sum_{\substack{\{(\alpha/m)\} \\ (\beta/m) \notin \{(\alpha/m)\}}} a_{k,(\alpha/m)} \right) (\varepsilon^t - \varepsilon^{-t})^{2k-2} \\ &= \sum_{k=0}^{[m/2]} a_{k,(\beta/m)} (\varepsilon^t - \varepsilon^{-t})^{2k-2}, \\ \sum_{\substack{\{(\alpha/m)\} \\ (\beta/m) \notin \{(\alpha/m)\}}} Y_{t(\beta/m),(\alpha/m)} &= \sum_{k=0}^{[m/2]} \left(\sum_{\substack{\{(\alpha/m)\} \\ (\beta/m) \notin \{(\alpha/m)\}}} b_{k,(\alpha/m)} \right) (\varepsilon^t - \varepsilon^{-t})^{2k-3} \\ &= \sum_{k=0}^{[m/2]} b_{k,(\beta/m)} (\varepsilon^t - \varepsilon^{-t})^{2k-3}. \end{aligned} \quad (17)$$

Левые части равенств (17) есть рациональные функции от $x(\beta/m)$, $y(\beta/m)$, в то время как в правой части $a_{k,(\beta/m)} \in \mathbb{Q}(s_k)$, s_k – симметрические функции,

$$\sum_{\delta_1, \dots, \delta_k} x_{\delta_1(\beta/m)} \cdots x_{\delta_k(\beta/m)}.$$

Так как $\psi(m_j)$ – минимальная степень поля, которому принадлежат $a_{k,(\beta/m)}$, из (17) следует (16).

Аналогично доказываются следующие утверждения.

ЛЕММА 10. Если

$$m = m_k = \prod_{k=1}^l p_k^{\gamma_k}$$

($p_k = 4t_k + 1$ – простые) и O_m – примитивная $\mathbb{k}$ -точка на F_2 , то

$$\varphi(m) = \varphi(m_k) = \prod_{k=1}^l p_k^{\gamma_k-1}(p_k - 1) \leq 2n.$$

ЛЕММА 11. Если

$$m = m_j = \prod_{j=1}^l p_j^{\delta_j}$$

($p_j = 4t_j + 3$ – простые) и O_m – примитивная $\mathbb{k}$ -точка на F_2 , то

$$\varphi(m_j)\psi(m_j) = \prod_{j=1}^l p_j^{2\delta_j-2}(p_j^2 - 1) \leq 4n.$$

Из лемм 1–4, 8, 9 и лемм 5–7, 10, 11 соответственно вытекают следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $m = 2^\alpha 3^\beta m_k m_j$ и O_m – примитивная $\mathbb{k}$ -точка на F_2 . Тогда

$$2^{2\alpha-3} 3^{2\beta-3} \varphi(m_k m_j) \psi(m_j) \leq 6n.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $m = 2^\alpha m_k m_j$ и O_m – примитивная $\mathbb{k}$ -точка на F_2 . Тогда

$$2^{2\alpha-4} \varphi(m_k m_j) \psi(m_j) \leq 4n.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Демьяненко В.А. О точных оценках кручения эллиптических кривых // Третья международная конференция по алгебре. Тезисы докл. Красноярск, 1993. С. 106.
- [2] Демьяненко В.А. О точных оценках p -кручения некоторых кривых первого рода // Матем. заметки. 1977. Т. 21. № 1. С. 3–7.
- [3] Демьяненко В.А. О точных оценках кручения точек кривых первого рода // Записки научн. семин. ЛОМИ. 1986. Т. 151. С. 57–65.

Институт математики и механики УрО РАН

Поступило
13.12.94