Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Деркач, О расширениях оператора Лагерра в пространствах с индефинитной метрикой, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 4, 509–521

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1311>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 13:32:47

УДК 517.98

О РАСШИРЕНИЯХ ОПЕРАТОРА ЛАГЕРРА В ПРОСТРАНСТВАХ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

В. А. Деркач

Полиномы Лагерра–Сонина $L_n^{(\alpha)}$ являются ортогональными в некотором линейном пространстве с индефинитной метрикой при $\alpha < -1$. Построено пополнение $\Pi(\alpha)$ этого пространства и дано описание самосопряженных расширений оператора Лагерра $l(y) = xy'' + (1 + \alpha - x)y'$, $\alpha < -1$, в пространстве $\Pi(\alpha)$. В частности, указано самосопряженное расширение оператора Лагерра, собственные функции которого совпадают с полиномами Лагерра–Сонина и образуют ортогональный базис в $\Pi(\alpha)$.

Библиография: 19 названий.

1. Введение. При $\alpha > -1$ полиномы Лагерра–Сонина

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} (e^{-x} x^{n+\alpha})^{(n)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

являются собственными функциями некоторого самосопряженного оператора A_α , ассоциированного с дифференциальным выражением $l_\alpha(y) = xy'' + (1 + \alpha - x)y'$, и образуют ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}_+, w_\alpha)$, $w_\alpha = x^\alpha e^{-x}$. В случае $\alpha < -1$ оператор, порожденный в $L_2(\mathbb{R}_+, w_\alpha)$ дифференциальным выражением l_α , также является самосопряженным (и даже унитарно эквивалентным оператору $A_{-\alpha}$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+, w_\alpha)$). Однако, полиномы Лагерра–Сонина, удовлетворяющие по-прежнему уравнению $l_\alpha(L_n^{(\alpha)}) = -nL_n^{(\alpha)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, уже не принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R}_+, w_\alpha)$ (при $\alpha < -1$).

В работе [1] было замечено, что при $-n - 1 < \alpha < -n$ полиномы Лагерра–Сонина $L_n^{(\alpha)}$ ортогональны в пространстве с индефинитной метрикой

$$\langle y, z \rangle_\alpha = \int_0^\infty x^\alpha \left(e^{-x} y \bar{z} - \sum_{j=0}^{n-1} (e^{-x} y \bar{z})^{(j)}(0) \frac{x^j}{j!} \right) dx. \quad (1)$$

В связи с этим было бы естественно построить самосопряженный оператор, порожденный дифференциальным выражением l_α , не в $L_2(\mathbb{R}_+, w_\alpha)$, а в пространстве Понтрягина с индефинитной метрикой (1). Эта задача была рассмотрена в [2], [3], для полиномов типа Якоби – в [4]. Заметим однако, что пополнение пространства с метрикой (1) в [2] было описано неверно.

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS, грант № 93-02449.

Аналогичная задача возникает в теории обобщенных точечных взаимодействий, где для устранения расхождений вводится перенормированная метрика, похожая на метрику (1). Так, Ф. А. Березин построил в [5] теорию расширений эрмитовых операторов в пространстве с такой метрикой на алгебраическом уровне, не рассматривая пополнения этого пространства. Описание замыкания такого пространства и действующих в нем операторов получено в [6]. В [7] рассмотрены общие модели самосопряженных операторов, действующих в пространствах с индефинитной метрикой (1).

В настоящей работе мы применяем технику, развитую в [7], к описанию замыкания $\Pi(\alpha)$ пространства с индефинитной метрикой (1) и показываем, что минимальный оператор A в $\Pi(\alpha)$, порожденный выражением l_α , является симметричным с индексами дефекта 1. Интересно заметить, что оператор A оказывается неплотно заданным. Построены граничные операторы и в их терминах описаны самосопряженные расширения оператора A . В частности, указано самосопряженное расширение оператора A , для которого полиномы Лагерра–Сонина являются собственными функциями.

2. Предварительные сведения. Напомним некоторые понятия теории расширений эрмитовых операторов из [8]–[12]. Пусть A – эрмитов оператор в пространстве Понтрягина $(\Pi_\varkappa, [\cdot, \cdot])$, $\varkappa \in \mathbb{Z}_+$, с неплотной, вообще говоря, областью определения $\mathcal{D}(A)$. В дальнейшем оператор A отождествляется с его графиком $\{\{y, Ay\} : y \in \mathcal{D}(A)\}$, так что множество замкнутых линейных операторов оказывается вложенным в множество замкнутых линейных отношений, т.е. подпространств в $\Pi_\varkappa$ (см. [9]). Определим сопряженное линейное отношение A^+ в $\Pi_\varkappa$, полагая

$$A^+ = \{\{z, \hat{z}\} \in \Pi_\varkappa \oplus \Pi_\varkappa : [\hat{z}, y] = [z, \hat{y}] \ \forall \{y, \hat{y}\} \in A\} \subset \Pi_\varkappa \oplus \Pi_\varkappa.$$

Многозначная часть $\text{mul } A^+ := \{\hat{z} \in \Pi_\varkappa : \{0, \hat{z}\} \in A^+\} = \Pi_\varkappa[-]\mathcal{D}(A)$ отношения A^+ отлична от 0, если $\overline{\mathcal{D}(A)} \neq \Pi_\varkappa$. Положим $\mathcal{N}_\infty = \Pi_\varkappa[-]\mathcal{D}(A)$, $\mathcal{N}_\lambda = \Pi_\varkappa[-](A - \bar{\lambda})\mathcal{D}(A)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Дефектные подпространства $\mathcal{N}_\lambda$ имеют одинаковую размерность $n_\pm$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}_\pm$ за исключением, быть может, конечного числа точек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Совокупность $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, а Γ_0, Γ_1 – ограниченные линейные операторы из A^+ в $\mathcal{H}$, называют *граничной тройкой отношения A^+* [13], если

- 1) отображение $\Gamma : \hat{z} \rightarrow \{\Gamma_0 \hat{z}, \Gamma_1 \hat{z}\}$ из A^+ в $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ сюръективно;
- 2) для всех $\hat{y} = \{y, \hat{y}\}$, $\hat{z} = \{z, \hat{z}\} \in A^+$ справедливо равенство

$$[\hat{y}, z] - [y, \hat{z}] = (\Gamma_1 \hat{y}, \Gamma_0 \hat{z})_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 \hat{y}, \Gamma_1 \hat{z})_{\mathcal{H}}.$$

Легко видеть (см. [11]), что эрмитов оператор A в $(\Pi_\varkappa, [\cdot, \cdot])$ с равными дефектными числами $n_+ = n_-$ обладает граничной тройкой. В дальнейшем мы будем считать, что $n_+ = n_- = 1$. Тогда $\mathcal{H} = \mathbb{C}$. С каждой граничной тройкой естественно связано самосопряженное расширение $\tilde{A}_\infty = \ker \Gamma_0$ оператора A . Всякое его самосопряженное расширение $\tilde{A}$, отличное от $\tilde{A}_\infty$, имеет вид

$$\tilde{A}_\theta = \ker(\Gamma_1 - \theta \Gamma_0), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $m(\lambda)$, определенная равенством

$$m(\lambda) = \frac{\Gamma_1 \hat{y}_\lambda}{\Gamma_0 \hat{y}_\lambda}, \quad \hat{y}_\lambda = \{y_\lambda, \lambda y_\lambda\}, \quad y_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda, \quad \lambda \in \rho(\tilde{A}_\infty),$$

называется *функцией Вейля* оператора A , отвечающей граничной тройке $\{\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$.

Функция Вейля $m(\lambda)$ простого эрмитова оператора A в пространстве Понтрягина $\Pi_\varkappa$ является его Q -функцией (в смысле определения из [14]) и принадлежит обобщенному классу Неванлинны $N_\varkappa$, т.е. ядро

$$\frac{m(\lambda) - m(\bar{\zeta})}{\lambda - \bar{\zeta}}, \quad \lambda, \zeta \in \rho(\tilde{A}_\infty),$$

имеет $\varkappa$ отрицательных квадратов в $\rho(\tilde{A}_\infty)$ (см. [14]).

В терминах функции Вейля может быть описан точечный спектр $\sigma_p(\tilde{A}_\theta)$ расширения $\tilde{A}_\theta$. Если $\lambda \in \rho(\tilde{A}_\infty)$, то справедлива эквивалентность

$$\lambda \in \sigma_p(\tilde{A}_\theta) \iff m(\lambda) - \theta = 0.$$

Применим приведенную схему к рассмотрению расширений минимального дифференциального оператора A_α , порожденного в $L_2(\mathbb{R}_+, w_\alpha)$ дифференциальным выражением $l_\alpha(y) = xy'' + (1 + \alpha - x)y'$, в классическом случае $\alpha > -1$. При этом оператор A_α оказывается эрмитовым в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}_+, w_\alpha)$.

Найдем дефектные подпространства оператора A_α . Общее решение уравнения Кумера

$$l_\alpha y - \lambda y = xy'' + (1 + \alpha - x)y' - \lambda y = 0$$

имеет вид (см. [15])

$$y = C_1 \Phi(\lambda, 1 + \alpha, x) + C_2 \Psi(\lambda, 1 + \alpha, x),$$

где $\Phi(\lambda, 1 + \alpha, x)$, $\Psi(\lambda, 1 + \alpha, x)$ – вырожденные гипергеометрические функции. Асимптотика функций $\Phi(\lambda, 1 + \alpha, x)$, $\Psi(\lambda, 1 + \alpha, x)$ при $x \rightarrow +\infty$ (см. [15])

$$\Phi(\lambda, 1 + \alpha, x) = \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{\Gamma(\lambda)} e^x x^{\lambda - (1 + \alpha)} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

$$\Psi(\lambda, 1 + \alpha, x) = x^{-\lambda} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

показывает, что для всех $\alpha > -1$ имеет место случай предельной точки в ∞ . Учитывая поведение функций $\Phi(\lambda, 1 + \alpha, x)$, $\Psi(\lambda, 1 + \alpha, x)$ при $x \rightarrow 0$ (см. [15]): $\Phi(\lambda, 1 + \alpha, x) \asymp 1$,

$$\Psi(\lambda, 1 + \alpha, x) \asymp \begin{cases} x^{-\alpha} \Gamma(\alpha) / \Gamma(\lambda), & \alpha \in (0, \infty), \\ -\ln x / \Gamma(\lambda), & \alpha = 0, \\ \Gamma(-\alpha) / \Gamma(\lambda - \alpha), & \alpha \in (-1, 0), \end{cases} \quad (2)$$

получим, что при всех $\alpha \geq 1$ имеет место случай предельной точки в 0, а при $|\alpha| < 1$ – случай предельного круга в 0. Таким образом, при $\alpha \geq 1$ минимальный оператор A_α является самосопряженным в $L_2(\mathbb{R}_+, w_\alpha)$. Если же $|\alpha| < 1$, то оператор A_α симметрический, его индексы дефекта равны 1, а дефектное подпространство $\mathcal{N}_\lambda$ порождено функцией $\Psi(\lambda, 1 + \alpha, x)$.

Зафиксируем $\lambda \in \mathbb{C}_+$ и рассмотрим линейал $\mathcal{D} = C_0^2(\mathbb{R}_+) \dot{+} \mathcal{N}_\lambda \dot{+} \mathcal{N}_{\bar{\lambda}}$. При $\alpha \in (-1, 0)$ для всех $y, z \in \mathcal{D}$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} (l_\alpha y, z) - (y, l_\alpha z) &= \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} (l_\alpha(y)\bar{z} - y l_\alpha(\bar{z})) dx = \int_0^\infty (x^{\alpha+1} e^{-x} W(\bar{z}, y))' dx \\ &= B_1 y \overline{B_0 z} - \Gamma_0 y \overline{\Gamma_1 z}, \end{aligned} \quad (3)$$

в котором $W(\bar{z}, y) = y'\bar{z} - y\bar{z}'$, а операторы $\Gamma_i: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 0, 1$, определены соотношениями

$$\Gamma_0 y = \lim_{x \downarrow 0} x^{\alpha+1} y'(x), \quad \Gamma_1 y = \lim_{x \downarrow 0} y(x), \quad -1 < \alpha < 0. \quad (4)$$

Из равенства [15, с. 324]

$$\Psi'(\lambda, 1 + \alpha, x) = -\lambda \Psi(\lambda + 1, 2 + \alpha, x) \asymp -\lambda \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{\Gamma(1 + \lambda)} x^{-(1+\alpha)}, \quad \alpha > -1, \quad (5)$$

следует, что выражение для $\Gamma_0 y$ в (4) корректно определено, если $y \in \mathcal{D}$. Корректность определения (4) для $\Gamma_1 y$ следует из (2).

В силу равенства $(\Gamma_1 \oplus \Gamma_0)(\mathcal{N}_\lambda \dot{+} \mathcal{N}_{\bar{\lambda}}) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ из формулы (3) следует, что операторы Γ_1, Γ_0 допускают непрерывное продолжение до ограниченных операторов, действующих из $\mathcal{D}(A_\alpha^*)$ с нормой графика оператора A_α^* в $\mathbb{C}$. При этом формула (3), являющаяся аналогом тождества Лагранжа, остается справедливой для всех $y, z \in \mathcal{D}(A_\alpha^*)$. Таким образом, совокупность $\{\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ образует граничную тройку оператора A_0^* .

Вычислим соответствующую функцию Вейля. В случае $-1 < \alpha < 0$ из (2), (4), (5) получаем

$$\Gamma_0 \Psi(\lambda) = -\lambda \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{\Gamma(1 + \lambda)} = -\frac{\Gamma(1 + \alpha)}{\Gamma(\lambda)}, \quad \Gamma_1 \Psi(\lambda) = \frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(\lambda - \alpha)}.$$

Согласно определению 2 функция Вейля $m_\alpha(\lambda)$ имеет вид

$$m_\alpha(\lambda) = -\frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(\lambda - \alpha)\Gamma(1 + \alpha)} = -\frac{B(\lambda, -\alpha)}{\Gamma(1 + \alpha)}, \quad -1 < \alpha < 0, \quad (6)$$

где $B(\lambda, -\alpha)$ – бета-функция Эйлера.

Аналогично, в случае $0 \leq \alpha < 1$ граничный оператор Γ_0 определим равенством (4), а для $\Gamma_1 y$ положим

$$\begin{aligned} \Gamma_1 y &= \lim_{x \downarrow 0} \left(y(x) + \frac{x}{\alpha} y'(x) \right), \quad 0 < \alpha < 1, \\ \Gamma_1 y &= \lim_{x \downarrow 0} (y(x) - x y'(x) (2\gamma + \ln x)), \quad \alpha = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь γ – постоянная Эйлера. Соответствующая функция Вейля $m_\alpha(\lambda)$ вычисляется по формуле (6) при $\alpha \in (0, 1)$ и совпадает с ψ -функцией при $\alpha = 0$:

$$m_0(\lambda) = \psi(\lambda) := \frac{d}{d\lambda} \Gamma(\lambda). \quad (8)$$

Заметим, что функция Вейля $m_\alpha(\lambda)$ допускает разложение [16, гл. 12])

$$m_\alpha(\lambda) = -\frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha + 1)_k}{k! (\lambda + k)}, \quad (9)$$

в котором $(\alpha + 1)_k = (\alpha + 1) \cdots (\alpha + k)$, $(\alpha + 1)_0 = 1$. Из (9) следует, что $m_\alpha(\lambda)$ является функцией класса Неванлинны $N := N_0$, т.е. $m_\alpha(\lambda)$ голоморфна в $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$, симметрична ($m_\alpha(\bar{\lambda}) = \overline{m_\alpha(\lambda)}$) и имеет в $\mathbb{C}_+$ неотрицательную мнимую часть. Суммируя сказанное, получим следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При $\alpha \in (-1, 1)$ минимальный оператор A_α является симметрическим оператором в $L_2(\mathbb{R}_+, w_\alpha)$ с индексами дефекта $n_+ = n_- = 1$, дефектное подпространство $\mathcal{N}_\lambda$ порождено функцией $\Psi(\lambda, 1 + \alpha, x)$. При этом

- 1) граничная тройка оператора A_α^* может быть определена соотношениями (4) при $\alpha \in (0, 1)$ и (7) при $\alpha \in (-1, 0]$;
- 2) соответствующая функция Вейля $m_\alpha(\lambda)$ вычисляется по формулам (6) при $\alpha \neq 0$ и (8) при $\alpha = 0$;
- 3) всякое самосопряженное расширение $\tilde{A}_{\alpha, \theta}$ оператора A_α характеризуется условиями $y \in \mathcal{D}(\tilde{A}_{\alpha, \theta}) \iff y \in \mathcal{D}(A_\alpha^*)$,

$$\Gamma_1 y = \theta \Gamma_0 y, \quad \theta \in \overline{\mathbb{R}}; \quad (10)$$

при $\theta = \infty$ граничное условие (10) приобретает вид

$$\Gamma_0 y = \lim_{x \downarrow 0} x^{\alpha+1} y'(x) = 0;$$

- 4) спектр расширения $\tilde{A}_{\alpha, \theta}$ состоит из простых собственных чисел и при $\theta \in \mathbb{R}$ совпадает с нулями функции $m_\alpha(\lambda) - \theta$.

Отметим, что именно расширение $\tilde{A}_{\alpha, \infty}$ имеет собственные функции, совпадающие с полиномами Лагерра–Сонины $L_n^{(\alpha)}(x)$.

3. Пространства Лагерра. Для того чтобы перейти к случаю $\alpha < -1$, нам потребуется следующая лемма, доказанная в [7].

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{P}$ – линейное пространство, снабженное скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, и $v_1, \dots, v_n$ – система линейных функционалов, заданная на $\mathcal{P}$, такая, что ни одна из их линейных комбинаций не является непрерывной в полунорме $(\cdot, \cdot)^{1/2}$. Далее, пусть $G = (g_{jk})_{j,k=1}^n$ – невырожденная эрмитова $(n \times n)$ -матрица, имеющая κ отрицательных ($n - \kappa$ положительных) собственных значений, и в $\mathcal{P}$ задано внутреннее произведение

$$\langle y, z \rangle = (y, z) + \sum_{j,k=1}^n g_{jk} v_k(y) \overline{v_j(z)}. \quad (11)$$

Тогда это внутреннее произведение имеет κ отрицательных квадратов на $\mathcal{P}$. Пополнение пространства $\mathcal{P}$ по метрике (11) есть пространство Понтрягина $\mathcal{H} \oplus \mathcal{G}$, где $\mathcal{H}$ – пополнение факторпространства $\mathcal{P}/\mathcal{P}^0$, $\mathcal{P}^0 = \{y \in \mathcal{P} : (y, y) = 0\}$ и $\mathcal{G} = (\mathbb{C}^n, (G \cdot, \cdot)_{\mathbb{C}^n})$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $-n - 1 < \alpha < -n$, $\mathcal{P}$ – множество полиномов с индефинитной метрикой (1). Положим для $y(x) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$

$$y^{\{k\}}(x) = y(x) - \sum_{j=0}^{k-1} y^{(j)}(0) \frac{x^j}{j!}$$

и построим отображение i_α из $\mathcal{P}$ в $L_2(\mathbb{R}_+, w_{\alpha+2\kappa}) \oplus \mathbb{C}^{2\kappa}$, $\kappa = [(n+1)/2]$:

$$i_\alpha: y \rightarrow \left(\frac{y^{\{\kappa\}}(x)}{x^\kappa}, y_0, \dots, y_{\kappa-1}, Y_{\kappa-1}, \dots, Y_0 \right),$$

где

$$Y_j = \int_0^\infty x^{\alpha+j} e^{-x} y^{\{n-j\}}(x) dx + \sum_{i=\kappa}^{n-j-1} \frac{1}{i!} y^{(i)}(0) \Gamma(\alpha + i + j + 1), \quad (12)$$

$$y_j = \frac{1}{j!} y^{(j)}(0), \quad 0 \leq j \leq \kappa - 1.$$

Следующая теорема описывает замыкание $\Pi(\alpha)$ линеала с метрикой (1), называемого в [2] пространством Лагерра. Ее доказательство весьма близко к доказательству соответствующей теоремы в [7] (с тем лишь отличием, что n может быть нечетным).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $-n-1 < \alpha < -n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда пополнение $\Pi(\alpha)$ пространства $(C^\infty(\mathbb{R}_+), \langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha)$ является пространством Понтрягина с индексом $\kappa = [(n+1)/2]$. Линейное отображение i_α является изометрическим изоморфизмом между $\Pi(\alpha)$ и π_κ – пространством $L_2(\mathbb{R}_+, w_{\alpha+2\kappa}) \oplus (\mathbb{C}^{2\kappa}, (G_\alpha \cdot, \cdot))$, в котором оператор Грамма G_α задается матрицей

$$G_\alpha = \left(\begin{array}{ccc|cc} \Gamma(\alpha+1) & \dots & \Gamma(\alpha+\kappa) & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots \\ \Gamma(\alpha+\kappa) & \dots & \Gamma(\alpha+2\kappa-1) & 1 & 0 \\ \hline 0 & & 1 & & \\ & \ddots & & 0 & \\ 1 & & 0 & & \end{array} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся тождеством

$$(fg)^{\{n\}}(x) = f(x)g^{\{n\}}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} g^{(j)}(0)f^{\{n-j\}}(x) \frac{x^j}{j!}, \quad f, g \in C^\infty(\mathbb{R}_+). \quad (13)$$

Полагая в (13) $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = y(x)\bar{z}(x)$ и учитывая соотношения

$$\int_0^\infty x^{\alpha+j} (e^{-x})^{\{n-j\}} dx = \Gamma(\alpha + j + 1), \quad j = 0, \dots, n-1,$$

представим форму $\langle y, z \rangle_\alpha$ в виде

$$\langle y, z \rangle_\alpha = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} (y\bar{z})^{\{n\}}(x) dx + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} (y\bar{z})^{(j)}(0) \Gamma(\alpha + j + 1). \quad (14)$$

Далее воспользуемся соотношением (см. [7])

$$(y\bar{z})^{\{n\}}(x) = y^{\{\kappa\}}\bar{z}^{\{\kappa\}} + \sum_{j=0}^{\kappa-1} x^j (y_j \bar{z}^{\{n-j\}} + y^{\{n-j\}} \bar{z}_j), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14) и учитывая равенство (12), получим

$$\begin{aligned}\langle y, z \rangle_\alpha &= \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} y^{\{\varkappa\}} \bar{z}^{\{\varkappa\}} dx + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^j y_{j-i} \bar{z}_i \Gamma(\alpha + j + 1) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\varkappa-1} \left(y_j \int_0^\infty x^{\alpha+j} e^{-x} \bar{z}^{\{n-j\}} dx + \bar{z}_j \int_0^\infty x^{\alpha+j} e^{-x} y^{\{n-j\}} dx \right) \\ &= \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} y^{\{\varkappa\}} \bar{z}^{\{\varkappa\}} dx + \sum_{j=0}^{\varkappa-1} \sum_{i=0}^j y_{j-i} \bar{z}_i \Gamma(\alpha + j + 1) + \sum_{j=0}^{\varkappa-1} (y_j \bar{Z}_j + Y_j \bar{z}_j),\end{aligned}$$

где z_j, Z_j – координаты вектора $i_\alpha(z) = (z^{\{\varkappa\}}(x)/x^\varkappa, z_0, \dots, z_{\varkappa-1}, Z_{\varkappa-1}, \dots, Z_0)$.

Введем в рассмотрение полунорму

$$(y, y)^{1/2} = \left(\int_0^\infty x^{\alpha+2\varkappa} e^{-x} \left| \frac{y^{\{\varkappa\}}(x)}{x^\varkappa} \right|^2 dx \right)^{1/2}, \quad y \in \mathcal{P}. \quad (16)$$

Для того чтобы применить лемму 1, достаточно проверить, что ни одна из линейных комбинаций функционалов

$$v_j(y) = \begin{cases} y_j, & 0 \leq j \leq \varkappa - 1, \\ Y_{2\varkappa-j-1}, & \varkappa \leq j \leq 2\varkappa - 1, \end{cases}$$

не является непрерывным функционалом по отношению к полунорме (16).

Допустим это не так, т.е. существуют $c_j, d_j \in \mathbb{C}, j = 0, \dots, \varkappa - 1$, и $h(x) \in L_2(w_{\alpha+2\varkappa})$ такие, что

$$\sum_{j=0}^{\varkappa-1} c_j y_j + \sum_{j=0}^{\varkappa-1} d_j Y_j = \int_0^\infty x^{\alpha+2\varkappa} e^{-x} \frac{y^{\{\varkappa\}}}{x^\varkappa} h(x) dx. \quad (17)$$

Полагая в (17) $y = x^j$, получим $c_j = 0$.

Пусть теперь $y \in x^{2\varkappa-1} \mathcal{P}$. Тогда $y^{\{n-j\}} = y, j = 0, \dots, \varkappa$, и $y^{(i)}(0) = 0, i = 0, \dots, 2\varkappa - 1$. Поэтому равенство (17) принимает вид

$$\sum_{j=0}^{\varkappa-1} d_j \int_0^\infty x^{\alpha+2\varkappa} e^{-x} \frac{y}{x^\varkappa} x^{j-\varkappa} dx = \int_0^\infty x^{\alpha+2\varkappa} e^{-x} \frac{y}{x^\varkappa} h(x) dx. \quad (18)$$

Так как функции вида $y(x)/x^\varkappa \in x^{2\varkappa-1} \mathcal{P}$ плотны в $L_2(w_{\alpha+2\varkappa})$, из (18) получаем

$$\sum_{j=0}^{\varkappa-1} d_j x^{j-\varkappa} = h(x) \in L_2(w_{\alpha+2\varkappa}),$$

что возможно лишь при $d_j = 0, j = 0, \dots, \varkappa - 1$.

Отметим [2], что в случае $-n - 1 < \alpha < -n, n \in \mathbb{N}$, скалярное произведение (1) можно переписать в виде

$$\langle y, z \rangle_\alpha = \gamma_n \int_0^\infty x^{\alpha+n} (e^{-x} y \bar{z})^{(n)} dx, \quad \gamma_n = \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + n + 1)} > 0. \quad (19)$$

4. Оператор Лагерра. Неклассический случай. Пусть $-n - 1 < \alpha < -n$, $n \in \mathbb{N}$. Множество $C^\infty(\mathbb{R}_+) \cap \Pi(\alpha)$ плотно в $\Pi(\alpha)$, так как оно содержит $\mathcal{D}$. Рассмотрим дифференциальное выражение l_α на множестве

$$\mathcal{D} = \text{l.s.}\{C^\infty(\mathbb{R}_+) \cap \Pi(\alpha), \Psi(\lambda, 1 + \alpha, x)\}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Так как для всех $y(x) \in \mathcal{D}$ существуют производные

$$y^{(j)}(0) = \lim_{x \downarrow 0} y^{(j)}(x), \quad j = 1, \dots, n,$$

и определены граничные операторы

$$\Gamma_0 y = \gamma_n \lim_{x \downarrow 0} x^{\alpha+n+1} y^{(n+1)}(x), \quad \Gamma_1 y = \lim_{x \downarrow 0} y(x), \quad (20)$$

из тождества (см. [3])

$$x^{\alpha+n} (e^{-x} (\bar{z} l_\alpha y - y l_\alpha \bar{z}))^n = - (x^{\alpha+n+1} (e^{-x} W(y, \bar{z}))^{(n)})',$$

и равенства (19) получим

$$\langle l_\alpha y, z \rangle_\alpha - \langle y, l_\alpha z \rangle_\alpha = -\gamma_n \lim_{x \downarrow 0} x^{\alpha+n+1} (e^{-x} W(y, \bar{z}))^{(n)}.$$

Отсюда следует, что для всех $y, z \in \mathcal{D}$ справедливо равенство

$$\langle l_\alpha y, z \rangle_\alpha - \langle y, l_\alpha z \rangle_\alpha = \Gamma_1 y \overline{\Gamma_0 z} - \Gamma_0 y \overline{\Gamma_1 z}. \quad (21)$$

Пусть T_α – замыкание в $\Pi(\alpha) \oplus \Pi(\alpha)$ графика оператора l_α , первоначально определенного на $\mathcal{D}$. Назовем T_α *максимальным* отношением. Ниже будет показано, что T_α не зависит от выбора $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, а его многозначная часть $T_\alpha(0)$ отлична от 0, если $\alpha < -1$. Так как $(\Gamma_0 \oplus \Gamma_1)\mathcal{D} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, операторы Γ_0, Γ_1 допускают продолжение по непрерывности до ограниченных операторов из T_α в $\mathbb{C}$. Определим также *минимальный* оператор A_α как замыкание в $\Pi(\alpha)$ оператора l_α с областью определения $\mathcal{D}_0 = \{y \in \mathcal{D} : y(0) = 0\}$. Отметим, что оператор A_α имеет неплотную область определения, так как вектор

$$h = (\underbrace{0, \dots, 0}_x, 1) \in \Pi(\alpha)$$

ортогонален к $\mathcal{D}_0$. Таким образом, A_α^+ – замкнутое линейное отношение с ненулевой многозначной частью (см. [9]). Ясно, что $A_\alpha \subset T_\alpha$. Из (21) следует, что $T_\alpha \subset A_\alpha^+$ и $\dim T_\alpha \pmod{A_\alpha} = 2$.

Рассмотрим эрмитово расширение $\tilde{A}_{\alpha,0} = \{\{y, \dot{y}\} \in T_\alpha : B_1\{y, \dot{y}\} = 0\}$ оператора A_α . Покажем, что $\lambda \in \rho(\tilde{A}_{\alpha,0})$. Будем искать решение уравнения

$$xy'' + (1 + \alpha - x)y' - \lambda y = f(x), \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}_+) \cap \Pi(\alpha),$$

удовлетворяющее условию $y(0) = 0$, в виде

$$y = C_1(x)\Phi_1(\lambda, 1 + \alpha, x) + C_2(x)\Psi(\lambda, 1 + \alpha, x), \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_1(\lambda, 1 + \alpha, x) &= x^{-\alpha} \Phi(\lambda - \alpha, 1 - \alpha, x) \\ &= \Gamma(\lambda) \Gamma(1 - \alpha) \left(\frac{\Phi(\lambda, 1 + \alpha, x)}{\Gamma(1 + \alpha) \Gamma(\lambda - \alpha)} + \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \Psi(\lambda, 1 + \alpha, x) \right),\end{aligned}$$

а $C_1(x), C_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений

$$C_1' \Phi_1 + C_2' \Psi = 0, \quad C_1' \Phi_1' + C_2' \Psi' = \frac{f(x)}{x}.$$

Так как

$$W(\Phi_1, \Psi) = -\frac{\Gamma(1 - \alpha)}{\Gamma(\lambda - \alpha)} x^{-(1+\alpha)} e^x$$

(см. [15, с. 322]), то

$$C_1' = \frac{\Gamma(\lambda - \alpha)}{\Gamma(1 - \alpha)} f(x) \Psi(x) x^\alpha e^{-x}, \quad C_2' = -\frac{\Gamma(\lambda - \alpha)}{\Gamma(1 - \alpha)} f(x) \Phi_1(x) x^\alpha e^{-x}. \quad (23)$$

Из (22), (23) следует

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(1 - \alpha)}{\Gamma(\lambda - \alpha)} y(x) &= -\int_x^\infty f(t) \Psi(t) w_\alpha(t) dt \Phi(x) - \int_0^x f(t) \Phi_1(t) w_\alpha(t) dt \Psi(x) \\ &= -\int_x^\infty t^\alpha (e^{-t} f(t) \Psi(t))^{\{1\}} dt \Phi(x) \\ &\quad - \int_0^x f(t) \Phi_1(t) w_\alpha(t) dt \Psi(x) + \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} f(0) \Psi(0) \Phi(x).\end{aligned}$$

Так как

$$\Phi_1(x) \asymp x^{-\alpha}, \quad \Psi(x) \asymp \frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(\lambda - \alpha)} \quad \text{при } x \rightarrow 0,$$

имеем $y(0) = 0$. Таким образом, справедливо представление

$$y(x) = (\tilde{A}_{\alpha,0} - \lambda)^{-1} f = -\frac{\Gamma(\lambda - \alpha)}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^\infty K(x, t, \lambda) f(t) w_\alpha(t) dt,$$

в котором ядро $K(x, t, \lambda)$ имеет вид

$$K(x, t, \lambda) = \begin{cases} \Phi_1(\lambda, 1 + \alpha, t) \Psi(\lambda, 1 + \alpha, x), & 0 \leq t \leq x, \\ \Psi(\lambda, 1 + \alpha, t) \Phi_1(\lambda, 1 + \alpha, x), & x \leq t. \end{cases}$$

В частности, отсюда следует, что $R(\tilde{A}_{\alpha,0} - \lambda)$ плотно в $\Pi(\alpha)$, расширение $\tilde{A}_{\alpha,0}$ является самосопряженным в $\Pi(\alpha)$, а индексы дефекта оператора A_α равны 1. Дефектное подпространство $\mathcal{N}_\lambda$ оператора A_α порождено функцией $\Psi(\lambda, 1 + \alpha, x)$. Таким образом, $\dim A_\alpha^+ \pmod{A_\alpha} = 2$, а максимальное отношение T_α совпадает с A_α^+ и не зависит от выбора $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Как отмечалось выше, многозначная часть отношения $T_\alpha = A_\alpha^+$ порождена вектором $h = (0, \dots, 0, 1) \in \Pi(\alpha)$.

Совокупность $\{\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ образует граничную тройку отношения $T_\alpha = A_\alpha^+$ в пространстве $\Pi(\alpha)$. Найдем соответствующую функцию Вейля оператора A_α . Учитывая поведение функций $\Psi(\lambda, 1 + \alpha, x)$, $\Psi^{(n+1)}(\lambda, 1 + \alpha, x)$ при $x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda, 1 + \alpha, x) &\asymp \frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(\lambda - \alpha)}, \\ \Psi^{(n+1)}(\lambda, 1 + \alpha, x) &= (-1)^{(n+1)}(\lambda)_{n+1} \Psi(\lambda + n + 1, \alpha + n + 2, x) \\ &\asymp (-1)^{(n+1)} \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\lambda)} x^{-(\alpha + n + 1)},\end{aligned}\quad (24)$$

получим из (20), (24)

$$\Gamma_0 \Psi(\lambda, 1 + \alpha, x) = -\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\lambda)}, \quad \Gamma_1 \Psi(\lambda, 1 + \alpha, x) = \frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(\lambda - \alpha)}.$$

Таким образом, функция Вейля $m_\alpha(\lambda)$ оператора A_α , отвечающая граничной тройке $\{\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, принимает вид

$$m_\alpha(\lambda) = -\frac{\Gamma(-\alpha)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda - \alpha)\Gamma(\alpha + 1)} = -\frac{B(\lambda, -\alpha)}{\Gamma(\alpha + 1)}. \quad (25)$$

Принадлежность функции $m_\alpha(\lambda)$ обобщенному классу Неванлинны $N_\varkappa$, $\varkappa = [(n+1)/2]$, видна непосредственно из разложения в ряд функции $m_\alpha(\lambda)$ (см. (9)).

Подытожим результаты этого пункта.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $-n - 1 < \alpha < -n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

- 1) минимальный оператор Лагерра A_α является эрмитовым неплотно заданным оператором в пространстве $\Pi(\alpha)$ с индексами дефекта 1;
- 2) соотношения (20) определяют граничную тройку $\{\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ отношения A_α^+ ; соответствующая функция Вейля $m_\alpha(\lambda)$ вычисляется по формуле (25) и принадлежит классу $N_\varkappa$, $\varkappa = [(n+1)/2]$;
- 3) всякое самосопряженное расширение $\tilde{A}_{\alpha,0}$ оператора A_α , отличное от $\tilde{A}_{\alpha,\infty} = \ker \Gamma_0$, описывается граничным условием $\Gamma_1 y = \theta \Gamma_0 y$, $\theta \in \mathbb{R}$, его собственные числа совпадают с нулями функции $m_\alpha(\lambda) - \theta$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При стандартном определении минимального оператора как замыкания оператора l_α , определенного первоначально на гладких финитных функциях, его индексы дефекта равны $\varkappa = [(n+1)/2]$ (см. [3]). Мы намеренно избегаем этой ситуации, вводя иное определение минимального оператора A_α .

5. Спектр. Рассмотрим самосопряженное расширение $\tilde{A}_{\alpha,\infty}$, определяемое граничным условием $\Gamma_0 y = 0$. Спектр оператора $\tilde{A}_{\alpha,\infty}$ состоит из простых собственных чисел $-j$, где $j \in \mathbb{Z}_+$, являющихся полюсами функции $m_\alpha(\lambda)$. Соответствующие собственные функции совпадают с полиномами Лагерра $L_j^{(\alpha)}(x)$, $j \in \mathbb{Z}_+$. В силу соотношений

$$\langle L_j^{(\alpha)}, L_j^{(\alpha)} \rangle_\alpha = \frac{\Gamma(j + \alpha + 1)}{j!}, \quad j \in \mathbb{Z}_+,$$

оператор $\tilde{A}_{\alpha,\infty}$ имеет лишь регулярные критические точки $n-1-2j$, $j = 0, 1, \dots, [(n-1)/2]$ (см. [17]). Поэтому система собственных функций $\{L_j^{(\alpha)}\}_{j=0}^\infty$ полна в $\Pi(\alpha)$ и для всякого элемента $f \in \Pi(\alpha)$ справедливо разложение

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\langle f, L_j^{(\alpha)} \rangle_\alpha}{\Gamma(\alpha + j + 1)} j! L_j^{(\alpha)}, \quad (26)$$

сходящееся в $\Pi(\alpha)$. Стандартные рассуждения (см. [18]) показывают, что ряд (26) равномерно сходится на компактах $[c, d]$ ($0 < c < d$) для всех функций $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}_+) \cap \Pi(\alpha)$.

Самосопряженное расширение $\tilde{A}_{\alpha,0}$, определяемое граничным условием $\Gamma_1 y = 0$, является линейным отношением с многозначной частью $\text{mul } \tilde{A}_{\alpha,0}$, порожденной вектором $h = (0, \dots, 0, 1) \in \Pi(\alpha)$. Заметим, что вектор h допускает следующее разложение в ряд:

$$h = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{j=0}^{\infty} L_j^{(\alpha)},$$

который сходится в $\Pi(\alpha)$. Спектр отношения $\tilde{A}_{\alpha,0}$ состоит из простых собственных чисел $\alpha - j$, где $j \in \mathbb{Z}_+$. Соответствующие собственные функции имеют вид $x^{-\alpha} L_j^{(-\alpha)}(x)$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Функция Вейля $-1/m_\alpha(\lambda)$, соответствующая расширению $\tilde{A}_{\alpha,0}$, растет как $\lambda^{-\alpha}$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Поэтому ∞ является сингулярной критической точкой отношения $\tilde{A}_{\alpha,0}$ (см. [17]).

Проследим за динамикой собственных чисел расширения $\tilde{A}_{\alpha,\theta}$ при изменении параметра θ в интервале $(-\infty, \infty)$. Например, при $\alpha = -5/2$ функция Вейля $m_\alpha(\lambda)$ имеет вид, указанный на рис. 1.

Рис. 1

Положим

$$\theta_1 = \min_{(-1,0)} m_\alpha(x) = m_\alpha(x_1), \quad \theta_2 = \max_{(-2,-1)} m_\alpha(x) = m_\alpha(x_2).$$

Собственные числа $\lambda_j(\theta)$ расширения $\tilde{A}_{\alpha,\theta}$ совпадают в силу теоремы 2 с нулями функции $m_\alpha(\lambda) - \theta$. Из рис. 1 видно, что $\lambda_j(\theta)$ являются монотонно возрастающими функциями от θ со значениями в $(-j, -j + 1)$ при $j \geq 3$, а $\lambda_0(\theta)$ – монотонно возрастающей функцией от $\theta \in (-\infty, 0)$ со значениями в $(0, \infty)$. В то же время поведение собственных чисел $\lambda_1(\theta), \lambda_2(\theta)$ является несколько необычным. При возрастании θ в интервале $(-\infty, \theta_1)$ собственные числа $\lambda_1(\theta), \lambda_2(\theta)$, находясь в интервале $(-2, -1)$, двигаются навстречу друг другу. После слияния при $\theta = \theta_1$ они отрываются от вещественной оси в точке x_1 и, описывая симметричные дуги в $\mathbb{C}_+$ и $\mathbb{C}_-$, опускаются на интервал $(-1, 0)$ в точке x_0 при $\theta = \theta_0$. При дальнейшем возрастании θ собственные числа $\lambda_1(\theta)$ и $\lambda_2(\theta)$ двигаются к концам интервала $(-1, 0)$. Такое поведение собственных чисел является характерным для эрмитовых операторов в пространстве Понтрягина и в общем случае описано в [14].

6. Энергетическая форма. Будем говорить, что эрмитов оператор A в пространстве Понтрягина $(\Pi_\varkappa, [\cdot, \cdot])$ обладает N^k -свойством, если форма $[Af, f]$, $f \in \mathcal{D}(A)$, имеет k отрицательных квадратов. Как показано в [19], о наличии у оператора A N^k -свойства можно судить по поведению его функции Вейля. Так, если A – простой эрмитов оператор в пространстве Понтрягина с индексами дефекта 1, а $m(\lambda)$ – его функция Вейля, имеющая на полуоси $(-\infty, 0)$ лишь конечное число особых точек, и такая, что существует предел

$$m(-\infty) = \lim_{x \downarrow -\infty} m(x),$$

то справедлива эквивалентность

$$A \text{ обладает } N^k\text{-свойством} \iff \lambda(m(\lambda) - m(-\infty)) \in N_k. \quad (27)$$

Условие (27) может быть переписано в виде $m(\lambda) - m(-\infty) \in N_\varkappa^k$, если использовать обозначение $N_\varkappa^k$ для класса функций $m(\lambda) \in N_\varkappa$ таких, что $\lambda m(\lambda) \in N_k$ (см. [19]).

Если к тому же функция Вейля $m(\lambda)$ оператора A удовлетворяет условию

$$\lim_{x \uparrow 0} m(x) = \infty,$$

то описание всех его расширений $\tilde{A}_{\alpha,\theta}$, обладающих N^k -свойством, имеет вид (см. [19])

$$A \text{ обладает } N^k\text{-свойством} \iff \theta - m(-\infty) \leq 0. \quad (28)$$

Применяя эквивалентности (27), (28) к оператору $-A_\alpha$, получим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $-n - 1 < \alpha < -n$, $n \in \mathbb{N}$, A_α – минимальный оператор Лагерра, $m_\alpha(\lambda)$ – его функция Вейля вида (25). Тогда

- 1) функция $m(\lambda) = -m_\alpha(-\lambda)$ принадлежит классу $N_\varkappa^k$, где $\varkappa = [(n + 1)/2]$, $k = [n/2]$;
- 2) $-A_\alpha$ обладает N^k -свойством;
- 3) $\tilde{A}_{\alpha,\theta}$ обладает N^k -свойством, если и только если $\theta \geq 0$ или $\theta = \infty$, в противном случае $-A_\alpha$ обладает N^{k+1} -свойством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\lambda m(\lambda) = -\lambda m_\alpha(-\lambda)$ допускает разложение в ряд

$$\lambda m(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)_j}{j!} \left(\frac{j}{j-\lambda} - 1 \right),$$

из которого следует, что $\lambda m(\lambda) \in N_k$, $k = [n/2]$. Таким образом, $m(\lambda) \in N_{\infty}^k$.

Так как функция $m(\lambda) = -m_\alpha(-\lambda)$ является функцией Вейля оператора $-A_\alpha$, справедливость утверждений 2), 3) следует из эквивалентностей (27), (28).

Отметим, что расширения $-\tilde{A}_{\alpha,0}$, $-\tilde{A}_{\alpha,\infty}$ являются фридриховским и крейновским расширениями оператора $-A_\alpha$ (в терминологии работы [19]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Morton R. D., Krall A. M. Distributional weight functions for orthogonal polynomials // SIAM J. Math. Anal. 1978. V. 2. P. 604–626.
- [2] Krall A. M. Laguerre polynomial expansions in indefinite inner product spaces // J. Math. Anal. Appl. 1979. V. 70. P. 267–279.
- [3] Krall A. M. On boundary values for the Laguerre operator in indefinite inner product spaces // J. Math. Anal. Appl. 1982. V. 85. P. 406–408.
- [4] Mingarelli A. B., Krall A. M. Jacobi-type polynomials under an indefinite inner product // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1981. V. 90. P. 147–153.
- [5] Березин Ф. А. О модели Ли // Матем. сб. 1963. Т. 60(120). № 4. С. 425–446.
- [6] Шондин Ю. Г. Обобщенные точечные взаимодействия в $\mathbb{R}^3$ и связанные с ними модели // ТМФ. 1985. Т. 65. № 1. С. 24–34.
- [7] Jonas P., Langer H., Textorius B. Models and unitary equivalence of cyclic selfadjoint operators in Pontrjagin spaces // Oper. Theory Adv. Appl. 1992. V. 59. P. 252–284.
- [8] Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986.
- [9] Dijksma A., de Snoo H. S. V. Symmetric and selfadjoint relations in Krein spaces. I // Oper. Theory Adv. Appl. 1987. V. 24. P. 145–166.
- [10] Маламуд М. М. Об одной формуле для обобщенных резольвент неплотно заданного эрмитова оператора // Укр. матем. ж. 1992. Т. 44. № 12. С. 1658–1688.
- [11] Деркач В. А. О расширениях неплотно заданного эрмитова оператора в пространстве Крейна // Докл. АН УССР. Сер. А. 1990. № 10. С. 15–19.
- [12] Derkach V. A., Malamud M. M. The extension theory of Hermitian operators and the moment problem // J. Math. Sci. 1995. V. 73. № 2. P. 141–242.
- [13] Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. Киев: Наукова думка, 1984.
- [14] Крейн М. Г., Лангер Г. К. О дефектных подпространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в пространстве Π_{∞} // Функцион. анализ и его прилож. 1971. Т. 5. № 2. С. 59–71.
- [15] Abramowitz M., Stegun I. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Washington: Department of Commerce, 1964.
- [16] Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963.
- [17] Крейн М. Г., Лангер Г. К. О спектральной функции самосопряженного оператора в пространстве с индефинитной метрикой // Докл. АН СССР. 1963. Т. 152. № 1. С. 39–42.
- [18] Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976.
- [19] Derkach V. On Weyl function and generalized resolvents of a Hermitian operator in a Krein space // Integral Equations Operator Theory. 1995. V. 23. P. 387–415.