Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Добровольский, А. Л. Рощеня, И. Ю. Реброва, Непрерывность гиперболической дзета-функции решеток, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 4, 522–526

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1312>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 12:37:03

УДК 511.95

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РЕШЕТОК

Н. М. Добровольский, А. Л. Рощеня, И. Ю. Реброва

Доказана непрерывность гиперболической дзета-функции решеток $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$, $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 1$, как функции на метрическом пространстве решеток.
Библиография: 2 названия.

Пусть $s \geq 2$ и полная решетка $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$. Тогда гиперболической дзета-функцией решетки Λ называется

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum'_{\vec{x} \in \Lambda} (\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_s)^{-\alpha},$$

где $\sum'$ означает, что из области суммирования исключена нулевая точка решетки Λ , и $\bar{x} = \max\{1, |x|\}$ для любого действительного x .

Гиперболическая дзета-функция решетки является аналитической функцией комплексной переменной $\alpha = \sigma + it$ в правой полуплоскости $\sigma > 1$.

Как известно (см. [1, с. 165]), пространство решеток является метрическим пространством. Возникает естественный вопрос о поведении гиперболической дзета-функции решеток как функции от решеток.

Цель настоящей работы – доказать непрерывность гиперболической дзета-функции решеток на пространстве решеток. В частности, справедлив следующий основной результат.

ТЕОРЕМА. Если последовательность решеток $\{\Lambda_n\}$ сходится к решетке Λ , то последовательность гиперболических дзета-функций решеток $\zeta_H(\Lambda_n|\alpha)$ равномерно сходится к гиперболической дзета-функции решетки $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ в любой полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0 > 1$.

1. Обозначения и вспомогательные результаты. Гиперболическим крестом называется область

$$K(T) = \{\vec{x} \mid \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_s \leq T\}.$$

Пусть $D(T|\Lambda)$ – количество ненулевых точек решетки Λ в гиперболическом кресте $K(T)$. Рассмотрим произвольный базис решетки Λ : $\vec{\lambda}_j = (\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{js})$, $j = 1, \dots, s$, и величину

$$A(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s) = \frac{1}{2} \max_{1 \leq j \leq s} \sum_{\nu=1}^s |\lambda_{\nu j}|.$$

Определим величину

$$a(\Lambda) = \min_{\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s} \max\{1, A(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s)\},$$

где минимум берется по всем базисам $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s$ решетки Λ .

В работе [2] доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА А. При $T \geq 3$ справедлива асимптотическая формула

$$D(T|\Lambda) = \frac{2^s T \ln^{s-1} T}{(s-1)! \det \Lambda} + \frac{\Theta \cdot 4 \cdot 2^s (a(\Lambda) + 2)^s T \ln^{s-2} T}{\det \Lambda},$$

где $|\Theta| \leq 1$.

Известно (см. [1, с. 160–165]), что если последовательность решеток $\{\Lambda_n\}$ сходится к решетке Λ , то существует последовательность невырожденных матриц

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11}^{(n)} & \dots & a_{1s}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1}^{(n)} & \dots & a_{ss}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \det \Lambda_n \neq 0,$$

сходящаяся к единичной матрице

$$E = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{s1} & \dots & \delta_{ss} \end{pmatrix}, \quad \text{где } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Иными словами,

$$\|A_n - E\| = s \max_{1 \leq i, j \leq s} |a_{ij}^{(n)} - \delta_{ij}| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

и, кроме того, $\Lambda_n = A_n \Lambda$.

ЛЕММА 1. Если $\Lambda_n \rightarrow \Lambda$ при $n \rightarrow \infty$, то $a(\Lambda_n) \rightarrow a(\Lambda)$ при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия следует, что найдется последовательность матриц $\{A_n\}$ такая, что

$$\Lambda_n = A_n \Lambda, \quad \|A_n - E\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Положим $\vec{\lambda}_j^{(n)} = A_n \vec{\lambda}_j$, $j = 1, \dots, s$. Тогда в силу (1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(\vec{\lambda}_1^{(n)}, \dots, \vec{\lambda}_s^{(n)}) = A(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s). \quad (2)$$

Выбрав базис $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s$ решетки Λ согласно условию

$$a(\Lambda) = \max\{1, A(\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s)\},$$

из (2) получим, что справедливо неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a(\Lambda_n) \leq a(\Lambda).$$

С другой стороны, положим

$$a_0 = \varliminf_{n \rightarrow \infty} a(\Lambda_n)$$

и выберем базисы $\vec{\lambda}_1^{(n_j)}, \dots, \vec{\lambda}_s^{(n_j)}$ решеток Λ_{n_j} согласно условию

$$a(\Lambda_{n_j}) = \max\{1, A(\vec{\lambda}_1^{(n_j)}, \dots, \vec{\lambda}_s^{(n_j)})\}, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} a(\Lambda_{n_j}) = a_0.$$

Тогда, в силу ограниченности модуля координат сверху для всех векторов базиса $\vec{\lambda}_1^{(n_j)}, \dots, \vec{\lambda}_s^{(n_j)}$ при $j \rightarrow \infty$, по теореме Вейерштрасса можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому базису $\vec{\lambda}'_1, \dots, \vec{\lambda}'_s$ решетки Λ . И так как

$$\lim_{j \rightarrow \infty} A(\vec{\lambda}_1^{(n_j)}, \dots, \vec{\lambda}_s^{(n_j)}) = A(\vec{\lambda}'_1, \dots, \vec{\lambda}'_s),$$

имеем $a_0 \geq a(\Lambda)$.

Отсюда вытекает

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} a(\Lambda_n) = \varliminf_{n \rightarrow \infty} a(\Lambda_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a(\Lambda_n) = a(\Lambda),$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2. Для $\alpha = \sigma + it$ при $\sigma \geq \sigma_0 > 1$, $T \geq 3$ справедлива приближенная формула

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum'_{\vec{x} \in \Lambda \cap K(T)} (\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_s)^{-\alpha} + \frac{\Theta_1(\alpha, T) c_1(s)}{\det \Lambda \cdot T^{\sigma_0-1}} \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - 1} \left(\frac{1}{(\sigma_0 - 1)^{s-1}} + \ln^{s-1} T \right),$$

где $|\Theta_1(\alpha, T)| \leq 1$, $c_1(s) = 2^s \cdot 24(s-2)! (a(\Lambda) + 2)^s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим дзета-ряд для гиперболической дзета-функции решетки Λ в виде

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum'_{\vec{x} \in \Lambda \cap K(T)} (\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_s)^{-\alpha} + R(\Lambda, T|\alpha),$$

где

$$R(\Lambda, T|\alpha) = \sum_{\substack{\vec{x} \in \Lambda \\ \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_s > T}} (\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_s)^{-\alpha}. \quad (3)$$

Оценивая по модулю каждое слагаемое в (3), получим $|R(\Lambda, T|\alpha)| \leq R(\Lambda, T|\sigma) \leq R(\Lambda, T|\sigma_0)$. По теореме Абеля

$$R(\Lambda, T|\sigma_0) = \sigma_0 \int_T^\infty \frac{D(x|\Lambda) - D(T|\Lambda)}{x^{\sigma_0+1}} dx.$$

Отсюда и из теоремы А следует

$$\begin{aligned}
 R(\Lambda, T | \sigma_0) &\leq \sigma_0 \int_T^\infty \left(\frac{2^s x \ln^{s-1} x}{(s-1)! \det \Lambda} + \frac{2^{s+2}(a(\Lambda) + 2)^s x \ln^{s-2} x}{\det \Lambda} \right) \frac{dx}{x^{\sigma_0+1}} \\
 &= \frac{2^s \sigma_0}{\det \Lambda} \left(\frac{1}{(s-1)!} \int_T^\infty \frac{\ln^{s-1} x}{x^{\sigma_0}} dx + 4(a(\Lambda) + 2)^s \int_T^\infty \frac{\ln^{s-2} x}{x^{\sigma_0}} dx \right) \\
 &= \frac{2^s \sigma_0}{\det \Lambda} \left(\frac{1}{(s-1)! T^{\sigma_0-1}} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(s-1)!}{(\sigma_0-1)^{s-k} k!} \ln^k T \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4(a(\Lambda) + 2)^s}{T^{\sigma_0-1}} \sum_{k=0}^{s-2} \frac{(s-2)!}{(\sigma_0-1)^{s-1-k} k!} \ln^k T \right) \\
 &\leq \frac{2^s \sigma_0}{\det \Lambda \cdot T^{\sigma_0-1}} \left(3 \left(\frac{1}{(\sigma_0-1)^s} + \frac{\ln^{s-1} T}{\sigma_0-1} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 12(s-2)! (a(\Lambda) + 2)^s \left(\frac{1}{(\sigma_0-1)^{s-1}} + \frac{\ln^{s-2} T}{\sigma_0-1} \right) \right) \\
 &\leq \frac{2^s \cdot 24(s-2)! (a(\Lambda) + 2)^s}{\det \Lambda \cdot T^{\sigma_0-1}} \frac{\sigma_0}{\sigma_0-1} \left(\frac{1}{(\sigma_0-1)^{s-1}} + \ln^{s-1} T \right).
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

2. Доказательство основной теоремы. Пусть $\Lambda_0 = \Lambda$. Определим величины

$$a = \max_{n \geq 0} a(\Lambda_n), \quad b = \min_{n \geq 0} \det \Lambda_n.$$

Ясно, что $b > 0$. И так как последовательность $\{\Lambda_n\}$ сходящаяся, то из леммы 1 вытекает, что величина a конечная. Выберем $T_1 = T_1(\varepsilon)$ из условия

$$\frac{2^s \cdot 24(s-2)! (a+2)^s}{b T_1^{\sigma_0-1}} \frac{\sigma_0}{\sigma_0-1} ((\sigma_0-1)^{-s+1} + \ln^{s-1} T_1) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда при $T \geq T_1$ для любого $n \geq 0$ имеем

$$|R(\Lambda_n, T | \alpha)| \leq R(\Lambda_n, T_1 | \sigma_0) < \frac{\varepsilon}{3}$$

в полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma \geq \sigma_0 > 1$. Рассмотрим крест $K(2T_1)$ и все ненулевые точки решетки Λ , принадлежащие этому гиперболическому кресту. Пусть это точки $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N$, где $N = D(2T_1 | \Lambda)$.

Для сходящейся к единичной матрице E последовательности матриц $\{A_n\}$, определенной условиями

$$\Lambda_n = A_n \Lambda, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = E,$$

рассмотрим точки $\vec{y}_1^{(n)} = A_n \vec{x}_1, \dots, \vec{y}_N^{(n)} = A_n \vec{x}_N$ из решетки Λ_n . В силу сходимости

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \vec{x}_j = \vec{x}_j, \quad j = 1, \dots, N,$$

найдется $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что для любого $n \geq n_0$ все точки $\vec{y}_j^{(n)}$, для которых $\vec{x}_j \in K(T_1)$, принадлежат кресту $K(2T_1)$ и каждая точка $\vec{y}_j^{(n)}$, принадлежащая кресту $K(T_1)$, имеет прообраз $\vec{x}_j$, принадлежащий кресту $K(2T_1)$.

Отсюда следует, что для $\alpha = \sigma + it$, $\sigma \geq \sigma_0$,

$$\begin{aligned} & |\zeta_H(\Lambda_n|\alpha) - \zeta_H(\Lambda|\alpha)| \\ & \leq \left| \zeta_H(\Lambda_n|\alpha) - \sum_{j=1}^N (\bar{y}_{j1}^{(n)} \cdots \bar{y}_{js}^{(n)})^{-\alpha} \right| \\ & \quad + \left| \sum_{j=1}^N (\bar{y}_{j1}^{(n)} \cdots \bar{y}_{js}^{(n)})^{-\alpha} - \sum_{j=1}^N (\bar{x}_{j1} \cdots \bar{x}_{js})^{-\alpha} \right| + \left| \zeta_H(\Lambda|\alpha) - \sum_{j=1}^N (\bar{x}_{j1} \cdots \bar{x}_{js})^{-\alpha} \right| \\ & \leq R(\Lambda_n, T_1|\sigma_0) + R(\Lambda, T_1|\sigma_0) + \sum_{j=1}^N |(\bar{y}_{j1}^{(n)} \cdots \bar{y}_{js}^{(n)})^{-\sigma_0} - (\bar{x}_{j1} \cdots \bar{x}_{js})^{-\sigma_0}| \\ & \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \sum_{j=1}^N |(\bar{y}_{j1}^{(n)} \cdots \bar{y}_{js}^{(n)})^{-\sigma_0} - (\bar{x}_{j1} \cdots \bar{x}_{js})^{-\sigma_0}|. \end{aligned}$$

Выбирая $n_1 = n_1(\varepsilon)$ из условия

$$|(\bar{y}_{j1}^{(n)} \cdots \bar{y}_{js}^{(n)})^{-\sigma_0} - (\bar{x}_{j1} \cdots \bar{x}_{js})^{-\sigma_0}| \leq \frac{\varepsilon}{3N}$$

при $n \geq n_1$, получим $|\zeta_H(\Lambda_n|\alpha) - \zeta_H(\Lambda|\alpha)| \leq \varepsilon$ для любого $n \geq \max\{n_0(\varepsilon), n_1(\varepsilon)\}$.

Теорема полностью доказана.

Авторы выражают благодарность профессору Н. М. Коробову и профессору В. И. Не-чаеву за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Касселс Дж. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965.
- [2] Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решетки в гиперболическом кресте // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 3. С. 363–369.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого

Поступило
19.03.96