Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. С. Кашин, А. А. Разборов, Новые нижние оценки устойчивости матриц Адамара, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 4, 535–540

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1314>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 13:02:55

УДК 519.142+517.984.4

НОВЫЕ НИЖНИЕ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ МАТРИЦ АДАМАРА

Б. С. Кашин, А. А. Разборов

Пусть соотношение $f = \Omega(g)$ означает, что $f(x) \geq cg(x)$ для некоторой положительной постоянной c и для всех x из области определения функций f и g . Показано, что в произвольной (обобщенной) матрице Адамара необходимо изменить по крайней мере $\Omega(n^2/r)$ элементов, для того чтобы ранг полученной матрицы не превосходил r . Это улучшает ранее известную оценку $\Omega(n^2/r^2)$. Если дополнительно потребовать, чтобы измененные элементы были ограничены сверху по модулю некоторой величиной $\theta \geq n/r$, то справедлива другая оценка $\Omega(n^3/(r\theta^2))$, усиливающая предыдущую $\Omega(n^2/\theta^2)$.

Библиография: 20 названий.

1. Введение. Для поля k и матрицы A над этим полем обозначим через $R_A^k(r)$ *функцию устойчивости* A , определяемую как минимальное количество изменений элементов матрицы A , необходимое для получения матрицы ранга не выше r . Это обозначение ввел Валиант [1], [2]; независимо сходное понятие предложил Григорьев [3].

Основной причиной введения и изучения этого понятия является то обстоятельство, что устойчивые матрицы являются сложными по отношению ко многим важным вычислительным моделям, получение нижних оценок для которых – трудная задача, не решенная к настоящему времени. Такими моделями являются, например, линейные алгебраические схемы [2], [4] и вычисления с ограниченным числом альтераций в теории коммуникационной сложности [5], [6]. В частности, для любого *конкретного* примера достаточно устойчивой матрицы можно было бы построить соответствующую вычислительную задачу, являющуюся сложной с точки зрения указанных моделей. Это привело бы к существенным продвижениям в этой области.

Несмотря на многочисленные усилия, наилучшие известные нижние оценки величины $R_A^k(r)$, полученные для конкретных $(n \times n)$ -матриц A , имеют вид $\Omega(n^2/(r \log(n/r)))$ для конечного поля k (Фридман [7]) и $\Omega(n^2/r)$ в случае бесконечного поля k ($r \leq n/2$). Простейший способ получения последней оценки был независимо отмечен Григорьевым и Нисаном: для любой *вовне невырожденной* матрицы A (т.е. матрицы, все миноры которой невырождены) выполнено $R_A^k(r) \geq \Omega(n^2/r)$ (k произвольно, $r \leq n/2$). Другие методы получения подобной оценки $\Omega(n^2/r)$, реализованные для различных классов

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-01-00094 и № 96-15-96102, и фонда INTAS, грант № 93-1376. Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-01-01222 и № 96-15-96090.

матриц, были предложены в [5], [8]–[10]; некоторые из них применимы и в случае конечных полей.

Одним из классов матриц, для которого естественно предполагать наличие свойства сильной устойчивости над $\mathbb{R}$, является класс матриц Адамара. Эти матрицы хорошо приспособлены к изучению спектральными методами, которые зарекомендовали себя как чрезвычайно удобный инструмент для решения подобных задач в теории сложности (см. типичные примеры в [11], [12]). Пудлак, Разборов и Савицкий [13] доказали оценку $R_H^{\mathbb{R}}(r) \geq \Omega(n^2/(r^3 \log r))$, где H – произвольная матрица Адамара, а Алон [14] усилил ее: $R_H^{\mathbb{R}}(r) \geq \Omega(n^2/r^2)$. Исследуя упомянутые выше приложения в теории коммуникационной сложности, Локам [6] рассмотрел модифицированную функцию устойчивости $R_A^{\mathbb{C}}(r, \theta)$, соответствующую случаю, когда дополнительно требуется, чтобы *абсолютные величины* измененных элементов не превосходили θ , и показал, в частности, что $R_H^{\mathbb{C}}(n/2, \theta) \geq \Omega(n^2/\theta^2)$ для любой (обобщенной) матрицы Адамара H .

В настоящей заметке мы устанавливаем усиления некоторых из упомянутых выше результатов. Именно, для произвольной (обобщенной) матрицы Адамара H и любого $r \leq n/2$ мы доказываем, что $R_H^{\mathbb{C}}(r) \geq \Omega(n^2/r)$, и если θ является параметром, удовлетворяющим неравенству $\theta \geq n/r$, то $R_H^{\mathbb{C}}(r, \theta) \geq \Omega(n^3/(r\theta^2))$. Наши оценки слишком слабые, чтобы получить какие-либо содержательные следствия в теории сложности, и они не переходят границу n^2/r . Основная цель настоящей заметки – привлечь внимание специалистов к использованию в этой области спектральных методов, так как мы уверены, что их потенциал далеко не исчерпан.

2. Устойчивость матриц.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1], [2], [6]. Для матрицы A над некоторым полем k обозначим через $\text{wt}(A)$ количество ее ненулевых элементов. *Функция устойчивости* $R_A^k(r)$ матрицы A определяется по формуле

$$R_A^k(r) = \min_B \{ \text{wt}(A - B) \mid \text{rk}(B) \leq r \},$$

где B пробегает все матрицы того же размера, что и A . Если $k = \mathbb{C}$ и θ – положительное вещественное число, то положим

$$R_A^{\mathbb{C}}(r, \theta) = \min_B \{ \text{wt}(A - B) \mid \text{rk}(B) \leq r, |a_{ij} - b_{ij}| \leq \theta \ \forall i, j \}. \quad (1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Локам [6] использовал в своем определении функции $R_A^{\mathbb{C}}(r, \theta)$ ограничение $|b_{ij}| \leq \theta$ вместо нашего $|a_{ij} - b_{ij}| \leq \theta$. Однако, более естественным представляется оценивать ℓ_∞ -норму *изменений*, а не конечного результата. В частности, наше определение позволяет также устанавливать нетривиальные оценки в случае $\theta \ll 1$ (см. ниже предложение 1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Комплексная $(n \times n)$ -матрица H называется *обобщенной матрицей Адамара*, если $|h_{ij}| = 1$ для всех i, j и $HH^* = nI_n$, где H^* – сопряженная к H матрица и I_n – единичная $(n \times n)$ -матрица.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любой обобщенной $(n \times n)$ -матрицы Адамара H и любого $r \leq n/2$

- а) $R_H^{\mathbb{C}}(r) \geq \Omega(n^2/r^2)$ (см. [14], [6]);
- б) $R_H^{\mathbb{C}}(n/2, \theta) \geq \Omega(n^2/\theta^2)$, где $\theta > 0$ – произвольный параметр (см. [6]);
- в) $R_H^{\mathbb{C}}(n/2, \theta) \geq \Omega(n^2/\theta)$ в случае $\theta \leq n/r$ (см. [6]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Строго говоря, предложение 1в) сформулировано в [6] для более ограничительного варианта устойчивости $R_A^+(r, \theta)$, получающегося добавлением в (1) дополнительного условия $|b_{ij}| \geq 1$. Однако, несложный анализ доказательства Локама показывает, что это условие может быть опущено.

В настоящей заметке мы докажем, что справедлива

ТЕОРЕМА. Для любой обобщенной $(n \times n)$ -матрицы Адамара H и любого $r \leq n/2$

- а) $R_H^C(r) \geq \Omega(n^2/r)$;
- б) $R_H^C(r, \theta) \geq \Omega(n^3/(r\theta^2))$ в случае $\theta \geq n/r$.

Утверждение б) теоремы усиливает предложение 1в) на множитель n/r при $\theta \geq n/r$ (его формулировка и доказательство могут быть рассмотрены как “непрерывное продолжение” предложения 1в) при $\theta \geq n/r$).

3. Спектры матриц. Норма Фробениуса $\|A\|_F$ комплексной матрицы A определяется, как

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

Пусть $(n \times n)$ -матрица A является вещественной симметричной и $\lambda_1(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A)$ – ее (вещественные) собственные значения. Тогда

$$\text{Tr}(A) = \lambda_1(A) + \dots + \lambda_n(A), \quad (2)$$

$$\|A\|_F^2 = \lambda_1^2(A) + \dots + \lambda_n^2(A). \quad (3)$$

Пусть $r = \text{rk}(A)$, т.е. в точности r собственных значений среди $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$ ненулевые. Из неравенства Коши согласно (2) и (3) следует, что $\text{Tr}(A)^2 \leq \|A\|_F^2 \cdot r$. Таким образом, справедлива

ЛЕММА 1. Для любой вещественной симметричной матрицы A

$$\text{rk}(A) \geq \frac{\text{Tr}(A)^2}{\|A\|_F^2}.$$

Напомним также неравенство Хоффмана–Виландта. Через $\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(AA^*)}$ обозначим i -е сингулярное число комплексной матрицы A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [15], [16, разд. 8.3]. Для любой пары комплексных $(n \times n)$ -матриц A, B

$$\sum_{i=1}^n (\sigma_i(A) - \sigma_i(B))^2 \leq \|A - B\|_F^2.$$

4. Доказательство теоремы. а) Как и в предшествующих доказательствах (см. [13], [14], [6]), мы будем стремиться показать, что подматрицы произвольной обобщенной матрицы Адамара имеют достаточно высокий ранг (по крайней мере в среднем), а это позволит перенести на наш случай наблюдение Григорьева и Нисана для вполне невырожденных матриц.

В действительности, в функциональном анализе имеется ряд результатов (см., в частности, [17]–[20]), посвященных общему вопросу: “насколько ортогональны выбранные

случайным образом подматрицы ортогональной матрицы”? Поскольку “достаточно ортогональные” матрицы являются невырожденными, мы можем непосредственно применить результаты из [19], [20] для получения оценки $R_H^{\mathbb{C}}(r) \geq \Omega(n^2/(r \log n))$. С другой стороны, для наших целей необходимо нечто более слабое, чем то, что дает достаточно тонкая техника из [19], [20]. Поэтому мы заменим ее следующей простой леммой, позволяющей избавиться от логарифмического множителя в знаменателе.

Всюду далее мы используем жирный шрифт для обозначения случайных объектов.

ЛЕММА 2. Пусть $q \leq n$ и A – комплексная $(q \times n)$ -матрица такая, что $|a_{ij}| = 1$ для всех i, j и $AA^* = nI_q$. Пусть B – случайно выбранная $(q \times q)$ -подматрица матрицы A . Тогда для любого r

$$\mathbb{P}[\text{rk}(B) \leq r] \leq \frac{2r}{q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим BB^* через C . Тогда C является (положительно определенной) вещественной симметричной $(q \times q)$ -матрицей, все элементы которой на главной диагонали равны q (поэтому $\text{Tr}(C) = q^2$) и которая удовлетворяет неравенству $\text{rk}(C) \leq \text{rk}(B)$. Таким образом, в силу леммы 1 (примененной к $A := C$)

$$\text{rk}(B) \leq r \implies \|C\|_F^2 \geq \frac{q^4}{r}. \quad (4)$$

С другой стороны, согласно неравенству Чебышева

$$\mathbb{P}\left[\|C\|_F^2 \geq \frac{q^4}{r}\right] \leq \frac{r}{q^4} \cdot \mathbb{E}[\|C\|_F^2]. \quad (5)$$

Положим

$$\xi_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-й столбец представлен в матрице } B, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

случайный вектор $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ равномерно распределен на множестве всех векторов в $\{0, 1\}^n$, имеющих ровно q единиц. Пусть $c_{i_1 i_2} = \sum_{j=1}^n a_{i_1 j} a_{i_2 j} \xi_j$. Тогда

$$\begin{aligned} \|C\|_F^2 &= \sum_{i_1, i_2} (c_{i_1 i_2} c_{i_1 i_2}^*) = \sum_{i_1, i_2} \sum_{j_1, j_2} (a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_1} a_{i_1 j_2}^* a_{i_2 j_2}^* \xi_{j_1} \xi_{j_2}) \\ &= \sum_{j_1, j_2} \left(\sum_{i_1, i_2} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_1} a_{i_1 j_2}^* a_{i_2 j_2}^* \right) \xi_{j_1} \xi_{j_2}. \end{aligned}$$

Далее

$$\mathbb{E}[\xi_{j_1} \xi_{j_2}] = \begin{cases} \frac{q}{n}, & \text{если } j_1 = j_2, \\ \frac{q(q-1)}{n(n-1)}, & \text{если } j_1 \neq j_2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|C\|_F^2] &= \frac{q(q-1)}{n(n-1)} \sum_{j_1, j_2} \sum_{i_1, i_2} (a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_1} a_{i_1 j_2}^* a_{i_2 j_2}^*) \\ &\quad + \left(\frac{q}{n} - \frac{q(q-1)}{n(n-1)} \right) \sum_j \sum_{i_1, i_2} (a_{i_1 j} a_{i_2 j} a_{i_1 j}^* a_{i_2 j}^*) \\ &= \frac{q(q-1)}{n(n-1)} \|AA^*\|_F^2 + \left(\frac{q}{n} - \frac{q(q-1)}{n(n-1)} \right) nq^2 = q^2 \left(q + \frac{q-1}{n-1} (n-q) \right) \leq 2q^3. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь лемма 2 непосредственно вытекает из (4)–(6).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть H – обобщенная $(n \times n)$ -матрица Адамара и H_0 – ее случайная $(q \times q)$ -подматрица. Тогда $E[\text{rk}(H_0)] \geq q/8$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подматрица H_0 строится в два этапа: сначала мы выбираем случайным образом q строк, затем q столбцов. Поскольку $(q \times n)$ -матрица A , получающаяся на первом этапе, удовлетворяет требованиям леммы 2, для любого фиксированного выбора строк $1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n$ имеет место оценка условной вероятности $P[\text{rk}(H_0) \leq q/4 \mid H_0 \text{ содержит строки } i_1, \dots, i_q] \leq 1/2$. Следовательно, $P[\text{rk}(H_0) \leq q/4] \leq 1/2$ и $E[\text{rk}(H_0)] \geq q/4 \cdot P[\text{rk}(H_0) \geq q/4] \geq q/8$.

Теперь мы готовы завершить доказательство теоремы. Пусть H – обобщенная $(n \times n)$ -матрица Адамара и $r \leq n/2$. Поскольку оценка $R_H^C(n/2) \geq n/2$ очевидна, не ограничивая общности можем считать, что $r \leq n/16$. Пусть матрица A такова, что $\text{rk}(H - A) \leq r$. Положим $q = 16r$ и в матрице H случайным образом выберем $(q \times q)$ -подматрицу H_0 . Если A_0 – соответствующая подматрица матрицы A , то

$$E[\text{rk}(H_0)] \leq E[\text{rk}(H_0 - A_0)] + E[\text{rk}(A_0)] \leq r + E[\text{wt}(A_0)] = r + \frac{q^2}{n^2} \text{wt}(A).$$

С другой стороны, $E[\text{rk}(H_0)] \geq 2r$ согласно следствию из леммы 2. Объединяя два последних неравенства, заключаем, что $\text{wt}(A) \geq rn^2/q^2 = \Omega(n^2/r)$. Это завершает доказательство утверждения а) теоремы.

б) Предложение 1в) было доказано в [6] путем применения неравенства Хоффмана–Виландта к паре матриц $H, \frac{1}{\theta}B$. Мы обобщим этот подход на случай $\theta \geq n/r$ варьированием коэффициента при матрице B .

Пусть, как и ранее, H – обобщенная $(n \times n)$ -матрица Адамара и $r \leq n/2$. Пусть матрица A такова, что $\text{rk}(H - A) \leq r$ и $|a_{ij}| \leq \theta$ для всех i, j , где $\theta \geq n/r$ – еще один параметр. Применяя предложение 2 к паре матриц $H, \frac{r}{n}(H - A)$, мы, как и в [6], имеем

$$\left\| H - \frac{r}{n}(H - A) \right\|_F^2 \geq n(n - r). \quad (7)$$

С другой стороны,

$$H - \frac{r}{n}(H - A) = \left(1 - \frac{r}{n}\right)H + \frac{r}{n}A.$$

Следовательно, эта матрица имеет не более $\text{wt}(A)$ элементов, ограниченных по модулю величиной $1 + r\theta/n$, в то время как остальные элементы по модулю не превосходят $1 - r/n$. Отсюда следует оценка

$$\left\| H - \frac{r}{n}(H - A) \right\|_F^2 \leq \text{wt}(A) \left(1 + \frac{r\theta}{n}\right)^2 + \left(1 - \frac{r}{n}\right)^2 n^2. \quad (8)$$

Из неравенств (7) и (8) получаем

$$\text{wt}(A) \left(1 + \frac{r\theta}{n}\right)^2 \geq r(n - r).$$

Поскольку $r \leq n/2$ и $\theta \geq n/r$, отсюда следует требуемая оценка $\text{wt}(A) \geq \Omega(n^3/(r\theta^2))$. Это завершает доказательство утверждения б) теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Valiant L. G. Some Conjectures Relating to Superlinear Complexity Bounds. Tech. Report no. 85: Univ. of Leeds, 1976.
- [2] Valiant L. G. Graph-Theoretic Arguments in Low-Level Complexity. Tech. Report no. 13-77: Univ. of Edinburgh, Dept. of Comp. Sci., 1977.
- [3] Григорьев Д. Ю. Использование понятий отделенности и независимости для получения нижних оценок сложности схем // Записки научн. семин. ЛОМИ. 1976. Т. 60. С. 38–48.
- [4] Григорьев Д. Ю. Нижние оценки в алгебраической сложности вычислений // Записки научн. семин. ЛОМИ. 1982. Т. 118. С. 25–82.
- [5] Разборов А. А. Об устойчивых матрицах. Препринт. М.: МИАН, 1989.
- [6] Lokam S. V. Spectral methods for matrix rigidity with applications to size-depth tradeoffs and communication complexity // Proc. of the 36th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. Los Alamitos (C.A.): IEEE, 1995. P. 6–15.
- [7] Friedman J. A note on matrix rigidity // Combinatorica. 1993. V. 13. № 2. P. 235–239.
- [8] Pudlák P., Vavřín Z. Computation of rigidity of order n^2/r for one simple matrix // Comment. Math. Univ. Carolin. 1991. V. 32. № 2. P. 213–218.
- [9] Kimmel P., Settle A. Reducing the Rank of Lower Triangular All-Ones Matrix. Tech. Report CS 92-21: Univ. of Chicago, 1992.
- [10] Pudlák P. Large communication in constant depth circuits // Combinatorica. 1994. V. 14. № 2. P. 203–216.
- [11] Krause M., Waack S. Variation ranks of communication matrices and lower bounds for depth two circuits having symmetric gates with unbounded fan-in // Proc. of the 32nd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. Los Alamitos (C.A.): IEEE, 1991. P. 777–782.
- [12] Nisan N., Wigderson A. On the complexity of bilinear forms // Proceedings of the 27th ACM Symposium on the Theory of Computing. New York: ACM, 1995. P. 723–732.
- [13] Pudlák P., Razborov A., Savický P. Observations on Rigidity of Hadamard Matrices. Manuscript, 1988.
- [14] Alon N. On the Rigidity of Hadamard Matrices. Manuscript: Tel Aviv Univ., 1990.
- [15] Hoffman A. J., Wielandt H. W. The variation of the spectrum of a normal matrix // Duke Math. J. 1953. V. 20. P. 37–39.
- [16] Golub G. H., van Loan C. F. Matrix Computations. Baltimore, Maryland: John Hopkins Univ. Press, 1983.
- [17] Кашин Б. С. О некоторых свойствах матриц ограниченных операторов из пространства ℓ_2^n в ℓ_2^n // Изв. АН АрмССР. Матем. 1980. Т. 15. № 5. С. 379–394.
- [18] Лунин А. А. Об операторных нормах подматриц // Матем. заметки. 1989. Т. 45. № 3. С. 94–100.
- [19] Kashin B., Tzafriri L. Some Remarks on the Restriction of Operators to Coordinate Subspaces. Tech. Report no. 12. Jerusalem: The Edmund Landau Center for Research in Math. Anal., Hebrew Univ., 1993/94.
- [20] Rudelson M. Almost orthogonal submatrices of an orthogonal matrix // Israel J. Math. (to appear).