Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. С. Кругликов, Тензоры Ниенхейса и препятствия к построению псевдоголоморфных отображений, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 4, 541–561

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1315>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 17:36:15

УДК 514.763.45

ТЕНЗОРЫ НИЕНХЕЙСА И ПРЕПЯТСТВИЯ К ПОСТРОЕНИЮ ПСЕВДОГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Б. С. Кругликов

В работе предложено несколько подходов к классификации почти комплексных структур и построению локальных или формальных псевдоголоморфных отображений из одного почти комплексного многообразия в другое. Соответствующие критерии даны в терминах тензоров Ниенхейса и их обобщений.

Библиография: 14 названий.

Введение

Пусть (L^{2l}, j_L) и (M^{2m}, j_M) – почти комплексные многообразия, т.е. многообразия, снабженные автоморфизмами j_L и j_M касательного расслоения, удовлетворяющими соотношениям $j_L^2 = -1_L: T_*L \rightarrow T_*L$ и $j_M^2 = -1_M$. Псевдоголоморфным отображением (РН-отображением) называется отображение $u: L \rightarrow M$ такое, что его дифференциал $u_*|_x = du_x: T_xL \rightarrow T_{u(x)}M$ коммутирует с почти комплексной структурой: $j_M \circ u_* = u_* \circ j_L$.

Если $M = \mathbb{C}$, то (нетривиальное) псевдоголоморфное отображение $u: L \rightarrow M$ называется *комплексной координатой*, и в общем случае такой координаты не существует (более того, если на многообразии L^{2l} существует l независимых локальных комплексных координат, то оно является комплексным). Для $l = 1$, т.е. когда (L, j_L) – риманова поверхность, РН-отображения существуют [1] и, более того, семейство таких отображений обладает структурой многообразия (при некоторых условиях, см. [2], [3]). Если же $l > 1$, то для почти комплексной структуры j_L общего вида такого отображения не существует даже локально. Препятствием является тензор Ниенхейса. Хорошо известно [1], [4], что если тензор Ниенхейса тождественно равен 0, то почти комплексное многообразие является комплексным, и для двух таких многообразий L и M существует локальное голоморфное отображение $u: (L, x) \rightarrow (M, y)$ (см. также [5]). В этой работе мы рассматриваем условия существования формального и локального псевдоголоморфных отображений для общих почти комплексных структур.

В §1 мы доказываем необходимое и достаточное условие для продолжения псевдоголоморфного на уровне 1-струй отображения одного почти комплексного многообразия в другое до псевдоголоморфного отображения на уровне 2-струй. Другими словами, мы описываем первое продолжение соответствующего уравнения Коши–Римана на пространстве 1-струй. В данном случае уравнение Коши–Римана – это условие коммутирования дифференциала $\Phi = du$ искомого отображения u в точке с почти комплексными структурами: $j_M \circ \Phi = \Phi \circ j_L$. Мы вводим пространство k -струй псевдоголоморфных отображений, которое в общем случае не имеет структуры многообразия, а

для формально интегрируемых “пополненных” уравнений Коши–Римана имеет. Здесь под “пополнением” подразумевается добавление определяющих соотношений, т.е. сужение в смысле пространства струй [6]. Уравнение Коши–Римана для отображений одного почти комплексного многообразия в другое является формально интегрируемым только в интегрируемом случае, т.е. когда многообразия комплексны. В общем случае это уравнение надо “пополнять”. Первым членом “пополнения” является условие коммутирования дифференциала искомого отображения в точке с тензорами Ниенхейса: $N_{j_M} \circ \wedge^2 \Phi = \Phi \circ N_{j_L}$.

В § 2 мы рассматриваем вопрос формальной интегрируемости, вводим новый инвариант – тензор Ниенхейса второго порядка $N_j^{(2)}$ – и выписываем следующий член “пополнения”: $N_{j_M}^{(2)} \circ \wedge^2 (\wedge^2 \Phi) = \Phi \circ N_{j_L}^{(2)}$.

В § 3 мы приводим критерий разрешимости уравнения Коши–Римана на уровне высших струй. Как следствие, мы получаем формальную часть известной теоремы Ньюландера–Ниренберга об интегрируемости почти комплексной структуры. Мы также используем этот критерий для нахождения формальных нормальных форм почти комплексных структур.

В § 4 мы вводим пространство линейных тензоров Ниенхейса и рассматриваем вопрос восстановления линейной комплексной структуры по тензору Ниенхейса.

В § 5 мы определяем понятие тензоров Ниенхейса общего вида. Мы называем почти комплексную структуру структурой общего вида, если соответствующий тензор Ниенхейса имеет общий вид. Для многообразий, снабженных такими структурами, необходимое и достаточное условие существования псевдоголоморфного отображения может быть сформулировано только в терминах тензоров Ниенхейса, что и составляет утверждение теоремы 6.

В § 6 мы приводим классификацию почти комплексных структур общего вида на четырехмерных многообразиях в терминах распределений (п. 6.1), а также вводим понятие лиевой почти комплексной структуры и приводим классификацию таких структур общего вида (п. 6.2).

Параграфы 4–6 не используют результатов и методов параграфов 1–3 и могут быть прочитаны независимо.

§ 1. Тензор Ниенхейса как первое препятствие к построению псевдоголоморфного отображения

Для отображения $u: (L, x) \rightarrow (M, y)$ обозначим через $u_*^{\wedge k}: \wedge^k T_x L \rightarrow \wedge^k T_y M$ индуцированное отображение.

Обозначим через $\mu = \mu_x$ идеал в кольце гладких функций $C^\infty(L)$, обращающихся в точке x в 0. Степень этого идеала μ^k является идеалом в кольце функций, обращающихся в 0 в точке x вместе со своими производными порядка меньше k : $\mu^k = \{f \mid \partial^\sigma f(x) = 0, |\sigma| < k\}$. Будем обозначать через $\mu^k = \mu^k T(p, q)$ подмодуль в модуле тензоров типа (p, q) , имеющих в точке x нуль порядка k . Обозначим символом $\theta_L(x)$ росток окрестностей точки $x \in L$. Положим $\mu_{x,y}^k = \{\Phi: T\theta_L(x) \rightarrow T\theta_M(y) \mid \text{Im } \Phi \subset \mu_y^k\}$.

Формальным псевдоголоморфным отображением называется отображение $u: \theta_L(x) \rightarrow \theta_M(y)$ такое, что $j_M \circ u_* - u_* \circ j_L \in \mu^\infty$. Это отображение называется *нетривиальным*, если $u_* \notin \mu^\infty$. Более того, в основном мы будем рассматривать невырожденные отображения: $u_* \notin \mu$ или $du_x \neq 0$.

Рассмотрим тензоры Ниенхейса N_{j_L} и N_{j_M} на многообразиях L и M :

$$N_j(\xi, \eta) = [j\xi, j\eta] - j[j\xi, \eta] - j[\xi, j\eta] - [\xi, \eta].$$

Непосредственно из определения следует, что если $u: L \rightarrow M$ – псевдоголоморфное отображение, то $N_{j_M} \circ u_*^{\wedge 2} = u_* \circ N_{j_L}$. Более того, это равенство выполнено в точке x , если u сохраняет почти комплексную структуру с точностью до второго порядка: $j_M \circ u_* - u_* \circ j_L \in \mu_{x,y}^2$.

Обозначим $J_{\text{РН}}^0(L, M) = J^0(L, M) = L \times M$ (используем обозначения из теории пространств струй, см. [7], [8]). Обозначим через $J_{\text{РН}}^1(L, M)$ подрасслоение расслоения струй $J^1(L, M) \rightarrow J^0(L, M)$ со слоем

$$(J_{\text{РН}}^1)_{x,y} = \{\Phi: T_x L \rightarrow T_y M \mid j_M \circ \Phi = \Phi \circ j_L\}.$$

Другими словами, многообразие $J_{\text{РН}}^1$ является расслоением над $L \times M$ со слоем $(J_{\text{РН}}^1)_{x,y}$. Обозначим также

$$J_{\text{РН}}^k \supset (J_{\text{РН}}^k)_{x,y} = \frac{\{u_*: T\mathcal{O}_L(x) \rightarrow T\mathcal{O}_M(y) \mid j_L \circ u_* - u_* \circ j_M \in \mu_{x,y}^k\}}{\{u_*: T\mathcal{O}_L(x) \rightarrow T\mathcal{O}_M(y) \mid u_* \in \mu_{x,y}^k\}}.$$

В отличие от $J_{\text{РН}}^1$ множества $J_{\text{РН}}^k$, $k \geq 2$, вообще говоря, не имеют структуры многообразия. Это связано с тем, что для отображения $\pi_{\text{РН}}^{r,s}$ ограничения проекции $\pi^{r,s}: J^r(L, M) \rightarrow J^s(L, M)$, $r \geq s$, прообраз точки может быть пуст.

Для получения критерия существования формального РН-отображения применим метод Картана продолжений-проекций [6]. Обозначим через $\mathcal{E}^k$ образ проекции $\text{Im } \pi_{\text{РН}}^{k,1} \subset J_{\text{РН}}^1 \subset J^1(L, M)$. Можно трактовать эти подмножества в пространстве 1-струй как дифференциальные уравнения первого порядка. Проблема построения формального псевдоголоморфного отображения сводится к сужению уравнения – нахождению проективного предела

$$\mathcal{E}^\infty \subset \dots \subset \mathcal{E}^2 \subset \mathcal{E}^1 \subset J^1(L, M).$$

Уравнение Коши–Римана $\mathcal{E}^1 = J_{\text{РН}}^1$ расслоено над $J^0 = L \times M$ со слоем

$$\mathcal{E}_{x,y}^1 = (\pi_{\text{РН}}^{1,0})^{-1}(x, y) = \{\Phi: T_x L \rightarrow T_y M \mid j_M \circ \Phi = \Phi \circ j_L\}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Ограничение проекции $\pi_{\text{РН}}^{1,0}$ на уравнение $\mathcal{E}^2 \subset J_{\text{РН}}^1$ имеет прообразы*

$$\mathcal{E}_{x,y}^2 = \{\Phi: T_x L \rightarrow T_y M \mid j_M \circ \Phi = \Phi \circ j_L, N_{j_M} \circ \Phi^{\wedge 2} = \Phi \circ N_{j_L}\}.$$

Доказательства этой и остальных теорем потребуют вычислений в пространствах струй. С этой целью введем следующие конструкции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для любого векторного поля ξ на X зададим отображения $d^p \xi = d_{\nabla}^p \xi: \bigotimes_1^p T_x X \rightarrow T_x X$, $x \in X$, формулой

$$d\xi(\eta) = \nabla_\eta \xi, \quad d^2 \xi(\eta_1, \eta_2) = \nabla_{\eta_2} \nabla_{\eta_1}(\xi) - \nabla_{\nabla_{\eta_2} \eta_1}(\xi),$$

$$d^{p+1} \xi(\eta_1, \dots, \eta_{p+1}) = d(d^p \xi(\eta_1, \dots, \eta_p))(\eta_{p+1}) - \sum_{i=1}^p d^p \xi(\eta_1, \dots, d\eta_i(\eta_{p+1}), \dots, \eta_p),$$

$p \geq 2$, где ∇ – некоторая симметричная связность. Если кривизна связности ∇ равна 0, то дифференциал $d_{\nabla}^p \xi$ симметричен, $d_{\nabla}^p \xi: S^p T_x X \rightarrow T_x X$, и в локальных евклидовых координатах имеет вид

$$d^p \xi(\eta_1, \dots, \eta_p)^i = \frac{\partial^p \xi^i}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_p}} \eta_1^{i_1} \dots \eta_p^{i_p}.$$

Легко видеть, что для $d\xi = d^1 \xi$ выполнено $L_\xi \eta = [\xi, \eta] = d\eta(\xi) - d\xi(\eta)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Для произвольного морфизма расслоений $A = (A_x)_{x \in X}$, $A_x: \wedge^q T_x X \rightarrow T_x X$, определим отображения $d^p A$, $d^p A_x: \wedge^q T_x X \otimes (\bigotimes_1^p T_x X) \rightarrow T_x X$, индуктивно: $d^0 A := A$,

$$d^{p+1} A(\xi_1, \dots, \xi_{q+p+1}) = d(d^p A(\xi_1, \dots, \xi_{q+p}))(\xi_{q+p+1}) - \sum_{i=1}^{q+p} d^p A(\xi_1, \dots, d\xi_i(\xi_{q+p+1}), \dots, \xi_{q+p}).$$

Если кривизна связности ∇ равна 0, то связность является локально тривиальной и дифференциал $d^p A: \wedge^q T_x X \otimes \mathbb{S}^p T_x X \rightarrow T_x X$ в локальных евклидовых координатах имеет вид

$$[d^p A(\xi_1, \dots, \xi_{q+p})]^i = \sum_{i_1 < \dots < i_q} \frac{\partial^p A_{i_1 \dots i_q}^i}{\partial x^{i_{q+1}} \dots \partial x^{i_{q+p}}} \xi_1^{i_1} \dots \xi_q^{i_q} \dots \xi_{q+p}^{i_{q+p}}.$$

Итак, евклидова связность ∇ определяет отображение $d_\nabla^p: \Omega^q \otimes \mathcal{D} \rightarrow \Omega^q \otimes \mathbb{S}^p \Omega^1 \otimes \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ – модуль векторных полей, а Ω^q – модуль внешних форм. Заметим, что такое отображение может быть построено по произвольной связности ∇ (см. [9]), но ввиду локальности дальнейших рассуждений будем считать связность ∇ тривиальной (евклидовой). Будем писать d^p вместо d_∇^p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. 1-РН-струя Φ поднимается до 2-РН-струи тогда и только тогда, когда выполнены уравнения

$$\begin{aligned} j_M \circ \Phi(\xi) &= \Phi \circ j_L(\xi), \quad \Phi^{(2)}(\xi, \eta) = \Phi^{(2)}(\eta, \xi), \\ dj_M(\Phi\xi, \Phi\eta) + j_M \circ \Phi^{(2)}(\xi, \eta) &= \Phi^{(2)}(j_L\xi, \eta) + \Phi \circ dj_L(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\xi, \eta \in T_x L$, а $\Phi^{(2)}: \mathbb{S}^2 T_x L \rightarrow T_y M$ есть 2-символ искомого РН-отображения, который в локальных координатах имеет вид

$$\Phi^{(2)}(\xi, \eta)^i = \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^r \partial x^s} \xi^r \eta^s.$$

Рассмотрим тензор

$$P \in T_x^* L \otimes T_x^* L \otimes T_y M, \quad P(\xi, \eta) = j_M \circ \Phi^{(2)}(\xi, \eta) - \Phi^{(2)}(j_L\xi, \eta). \quad (2)$$

Из (1) имеем

$$P(\xi, \eta) = \Phi \circ dj_L(\xi, \eta) - dj_M(\Phi\xi, \Phi\eta). \quad (3)$$

ЛЕММА 1. Тензор P , определенный по симметричному тензору $\Phi^{(2)}$ формулой (2), удовлетворяет уравнениям

$$j_M \circ P(\xi, \eta) = -P(j_L\xi, \eta), \quad (4)$$

$$P(\xi, \eta) - P(\eta, \xi) = P(j_L\xi, j_L\eta) - P(j_L\eta, j_L\xi). \quad (5)$$

ЛЕММА 2. Любой тензор, удовлетворяющий системе (4), (5), может быть представлен в виде (2), где $\Phi^{(2)}$ – симметричный тензор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку любое билинейное отображение представимо в виде суммы j_L - j_M -линейного и антилинейного по первому аргументу отображений, из (4) следует, что

$$P(\xi, \eta) = j_M \circ B(\xi, \eta) - B(j_L \xi, \eta) \quad (6)$$

для некоторого тензора B . Необходимо показать, что отображение $B: T_x L \otimes T_x L \rightarrow T_y M$ можно выбрать симметричным. Рассмотрим разложение B на симметричную и кососимметричную составляющие:

$$B = B_0 + B_1, \quad B_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(B(\xi, \eta) + (-1)^i B(\eta, \xi)), \quad i = 0, 1.$$

Подставляя это выражение в (5) и учитывая (6), получим

$$j_M \circ B_1(\xi, \eta) - B_1(j_L \xi, \eta) - B_1(\xi, j_L \eta) - j_M \circ B_1(j_L \xi, j_L \eta) = 0. \quad (7)$$

Разложим B_1 на линейную и антилинейную по первому и второму аргументам составляющие:

$$\begin{aligned} B_1 &= B_1^{0,0} + B_1^{0,1} + B_1^{1,0} + B_1^{1,1}, \quad B_1^{1,1} \equiv 0, \\ B_1^{0,0}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(B_1(\xi, \eta) - B_1(j_L \xi, j_L \eta)), \\ B_1^{0,1}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(B_1(\xi, \eta) + j_M \circ B_1(\xi, j_L \eta)), \\ B_1^{1,0}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(B_1(\xi, \eta) + j_M \circ B_1(j_L \xi, \eta)). \end{aligned}$$

С помощью (7) легко проверяются свойства

$$B_1^{r,s}(\xi, \eta) = (-1)^{r+1} j_M \circ B_1^{r,s}(j_L \xi, \eta) = (-1)^{s+1} j_M \circ B_1^{r,s}(\xi, j_L \eta), \quad r, s = 0, 1.$$

Заметим, что тензор

$$\widehat{B}_0(\xi, \eta) = B_1^{0,1}(\xi, \eta) - B_1^{1,0}(\xi, \eta) = \frac{j_M}{2}(B_1(\xi, j_L \eta) - B_1(j_L \xi, \eta))$$

симметричен, а тензор $B_1 + \widehat{B}_0 = B_1^{0,0} + 2B_1^{0,1}$ является j_L - j_M -линейным по ξ . Следовательно, преобразование $B = B_0 + B_1 \mapsto B - (B_1 + \widehat{B}_0) = B_0 - \widehat{B}_0$ определяет искомым симметричный тензор $\Phi^{(2)} = B_0 - \widehat{B}_0$, удовлетворяющий (2).

Итак, уравнение $\mathcal{E}^2$ выделяется как подуравнение в $\mathcal{E}^1$ соотношениями (3)–(5). При этом уравнение (4) является тождеством, поскольку

$$j_M \circ \Phi = \Phi \circ j_L, \quad j_L \circ dj_L = -dj_L \circ (j_L \otimes 1), \quad j_M \circ dj_M = -dj_M \circ (j_M \otimes 1). \quad (8)$$

Подставляя уравнение (3) в (5), находим

$$\begin{aligned} dj_M(\Phi \xi, \Phi \eta) - dj_M(\Phi \eta, \Phi \xi) - dj_M(j_M \Phi \xi, j_M \Phi \eta) + dj_M(j_M \Phi \eta, j_M \Phi \xi) \\ = \Phi(dj_L(\xi, \eta) - dj_L(\eta, \xi) - dj_L(j_L \xi, j_L \eta) + dj_L(j_L \eta, j_L \xi)). \end{aligned}$$

Умножив это равенство на j_M , воспользовавшись (8) и тождеством

$$N_j(\xi, \eta) = -dj(j\xi, \eta) - dj(\xi, j\eta) + dj(j\eta, \xi) + dj(\eta, j\xi), \quad (9)$$

получим уравнение $N_{j_M} \circ \Phi^{\wedge 2} = \Phi \circ N_{j_L}$. Теорема доказана.

Итак, теорема 1 задает уравнения в точке (на $T_x L$), определяющие возможность построения псевдоголоморфного отображения на уровне 2-струй.

Введем линейное пространство тензоров Ниенхейса в комплексном линейном пространстве $(\mathbb{C}^n, j)$:

$$\mathcal{N}_j^{(n)} = \{N \in \wedge^2(\mathbb{C}^n)^* \otimes \mathbb{C}^n \mid N(j\xi, \eta) = -jN(\xi, \eta), N(\xi, \eta) = -N(\eta, \xi)\}. \quad (10)$$

Рассмотрим на $\mathcal{N}_j^{(n)}$ отображение факторизации

$$\theta: \mathcal{N}_j^{(n)} \rightarrow \mathcal{N}_j^{(n)} / \text{Gl}_{\mathbb{C}}(n), \quad (11)$$

сопоставляющее тензору его орбиту относительно полной группы линейных комплексных преобразований. Подход Картана к формальной интегрируемости, а также подход Спенсера (см. теорему Гольдшмидта в [8], [6]) заключается в нахождении методом продолжений-проекций уравнения $\mathcal{E}^{(\infty)} \subset \mathcal{E}^2 \subset J_{\text{РН}}^1$, допускающего продолжение в пространство 2-струй, символы которого образуют расслоение. В частности, надо требовать $(\mathcal{E}^2)_{x', y'} \neq 0$ для всех $x' \in L$, $y' \in M$. Это будет так, если потребовать постоянства естественных отображений $\theta_L^{(N)}: \mathcal{O}_L(x) \rightarrow \mathcal{N}_{j_L}^{(l)} / \text{Gl}_{\mathbb{C}}(l)$, $\theta_M^{(N)}: \mathcal{O}_M(y) \rightarrow \mathcal{N}_{j_M}^{(m)} / \text{Gl}_{\mathbb{C}}(m)$, сопоставляющих точке x образ тензора Ниенхейса $(N_j)_x$ в этой точке при отображении (11), и существования морфизма $\Phi: T_x L \rightarrow T_y M$, сопрягающего N_{j_L} и N_{j_M} . Как показывает следующий пример, многообразия (L, j_L) с $\theta_L^{(N)} \equiv \text{const}$ существуют.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим группу Ли G . Алгебра Ли группы $G \times G$ изоморфна $\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}$. Введем почти комплексную структуру на $T_e(G \times G)$ формулой $j(\xi, \eta) = (-\eta, \xi)$ и продолжим ее левыми сдвигами на всю группу. Тензор Ниенхейса левоинвариантен и имеет вид

$$\begin{aligned} N((\xi, 0), (\eta, 0)) &= -N((0, \xi), (0, \eta)) = (-[\xi, \eta], [\xi, \eta]), \\ N((\xi, 0), (0, \eta)) &= N((0, \xi), (\eta, 0)) = ([\xi, \eta], [\xi, \eta]). \end{aligned}$$

Это показывает, что линейная классификация однородных тензоров Ниенхейса на комплексификациях алгебр Ли тесно связана с классификацией действительных алгебр Ли.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В работе [10] показано, что на многообразии $J_{\text{РН}}^1(L, M)$ существует каноническая почти комплексная структура $j^{[1]}$. Эта структура определяется как $(j_L \oplus j_M) \oplus j_M$ на $T_p J_{\text{РН}}^1 = T_p J_{\text{РН}}^0 \oplus \text{Smb}l_{\mathcal{E}^1}^1$ в разложении, индуцированном минимальными связностями на многообразиях L и M . По определению эти связности такие, что их формы кручения совпадают с формами кручения почти комплексных структур, т.е. с соответствующими тензорами Ниенхейса [11]. В точках $p \in \mathcal{E}^2 \subset J_{\text{РН}}^1$ почти комплексная структура $j^{[1]}$ на $T_p J_{\text{РН}}^1$ может быть определена иначе. Действительно, 1-РН-струя

p продолжается до 2-РН-струи $p^{(2)}$, и $p^{(2)}$ определяет подпространство $L_{p^{(2)}}$ в касательном пространстве к $J_{\text{РН}}^1$ (касательное пространство к порождающему $p^{(2)}$ графику, ср. [7]). Таким образом, касательное пространство $T_p J_{\text{РН}}^1$ изоморфно прямой сумме слоя проекции $\pi: J_{\text{РН}}^1(L, M) \rightarrow L$ с почти комплексной структурой j_M и пространства $L_{p^{(2)}}$ с почти комплексной структурой j_L . Ввиду комплексности обоих слагаемых на $T_p J_{\text{РН}}^1$ имеется каноническая комплексная структура. Заметим, что хотя продолжение $p^{(2)}$ может быть построено неоднозначно, структура $j_p^{[1]}$ не зависит от него. Предположим, что подмножества $(\mathcal{E}^2)_{x', y'}$ не зависят от точек $x' \in L, y' \in M$ и образуют расслоение над $J_{\text{РН}}^0$, т.е. $\mathcal{E}^2$ – подмногообразие в $\mathcal{E}^1$. Из теоремы 1 следует, что это подмногообразие не является в общем случае комплексным, и это “измеряет” неинтегрируемость структур j_L и j_M . Действительно, в силу антилинейности квадрика, выделяемая в комплексном линейном пространстве $\{\Phi \in T_x^* L \otimes T_y M \mid j_M \circ \Phi = \Phi \circ j_L\}$ условием $N_{j_M} \circ \Phi^{\wedge 2} = \Phi \circ N_{j_L}$, не является комплексным подмногообразием, если $N_{j_M}|_{\text{Im } \Phi^{\wedge 2}} \neq 0$. Таким образом, на $J_{\text{РН}}^2$ не существует почти комплексной структуры такой, что ограничение проекции $\pi_{\text{РН}}^{2,1}: J_{\text{РН}}^2 \rightarrow J_{\text{РН}}^1$ псевдоголоморфно.

Поскольку $J_{\text{РН}}^1(L, M)$ обладает канонической почти комплексной структурой $j_{L,M}^{[1]}$, можно рассмотреть многообразие $J_{\text{РН}}^{[2]}(L, M) = J_{\text{РН}}^1(L, J_{\text{РН}}^1(L, M))$ с почти комплексной структурой $j_{L,M}^{[2]}$ и определить индуктивно многообразия

$$J_{\text{РН}}^{[k+1]}(L, M) = J_{\text{РН}}^1(L, J_{\text{РН}}^{[k]}(L, M))$$

с почти комплексной структурой $j_{L,M}^{[k+1]}$. Заметим, что $J_{\text{РН}}^k(L, M) \subset J_{\text{РН}}^{[k]}(L, M)$. Скажем, что 1-струя $\Phi \in (J_{\text{РН}}^1(L, M))_{x,y}$ поднимается до k -струи, если $(J_{\text{РН}}^k)_{x,y} \supset (\pi_{\text{РН}}^{k,1})^{-1}(\Phi) \neq \emptyset$. В силу теоремы 1 1-струя Φ поднимается до 2-струи тогда и только тогда, когда $N_{j_M} \circ \Phi^{\wedge 2} = \Phi \circ N_{j_L}$; в этом случае существует (необязательно единственное) поднятие $\Phi^{[2]} \in (J_{\text{РН}}^2)_{x,y} \subset (J_{\text{РН}}^{[2]})_{x,y}$, являющееся 1-струей в объемлющем пространстве. Эта 1-струя может быть поднята до 2-струи $\Phi^{[3]} \in (J_{\text{РН}}^{[3]})_{x,y}$ тогда и только тогда, когда $N_{j_{L,M}^{[1]}} \circ (\Phi^{[2]})^{\wedge 2} = \Phi^{[2]} \circ N_{j_L}$. В общем случае, если среди поднятий $\Phi^{[k]} \in (J_{\text{РН}}^{[k]})_{x,y}$ струи $\Phi^{[k-1]} \in (J_{\text{РН}}^{[k-1]})_{x,y}$ имеется такое, для которого

$$N_{j_{L,M}^{[k-1]}} \circ (\Phi^{[k]})^{\wedge 2} = \Phi^{[k]} \circ N_{j_L}, \quad (12)$$

то струя $\Phi^{[k]} \in (J_{\text{РН}}^{[k]})_{x,y}$ может быть поднята до струи $\Phi^{[k+1]} \in (J_{\text{РН}}^{[k+1]})_{x,y}$. Итак, мы имеем ряд необходимых условий (12), при выполнении которых существуют поднятия $\Phi^{[r]} \in (J_{\text{РН}}^{[r]})_{x,y}$ 1-струи $\Phi \in (J_{\text{РН}}^1)_{x,y}$. Это дает возможность искать такие поднятия, для которых $\Phi^{[r]} \in (J_{\text{РН}}^r)_{x,y}$.

§ 2. Построение псевдоголоморфного отображения на уровне высших струй

В § 1 мы нашли алгебру инвариантов $\mathcal{A}_j^2 = \langle j, N_j \rangle$, порожденную относительно коммутатора элементами j, N_j , такую, что $\mathcal{E}_{x,y}^2 = \{\Phi: T_x L \rightarrow T_y M \mid \mathcal{A}_{j_M}^2 \circ \Phi^{\wedge*} = \Phi \circ \mathcal{A}_{j_L}^2\}$. Применяя метод продолжений-проекций (см. § 1), мы сужаем уравнение $\mathcal{E}^2$ до уравнения $\mathcal{E}^\infty$ и находим алгебру инвариантов $\mathcal{A}_j^\infty$ такую, что $\mathcal{E}_{x,y}^\infty = \{\Phi: T_x L \rightarrow T_y M \mid$

$\mathcal{A}_{j_M}^\infty \circ \Phi^{\wedge*} = \Phi \circ \mathcal{A}_{j_L}^\infty$. Как показано в п. 6.2 (замечание 7), ни алгебра $\mathcal{A}_j^2$, ни ее замыкание относительно дифференциальной скобки Ниеенхейса (см. [12], [6]) – алгебра Ниеенхейса $\mathcal{A}_j^\infty$ – не совпадают с искомой алгеброй $\mathcal{A}_j^\infty$, т.е. $\mathcal{A}_j^\infty \neq \mathcal{A}_j^\infty = \langle j, N_j, \dots \rangle$. Ниже мы построим новый инвариант, приходящий из пространств высших струй и являющийся новой (третьей) образующей $\mathcal{A}_j^\infty$. Отметим, что, проводя дальнейшие вычисления, можно указать и последующие образующие.

ТЕОРЕМА 2. *Существуют новые тензорные инварианты – высшие тензоры Ниеенхейса – такие, что $\mathcal{A}_j^\infty = \langle j, N_j, N_j^{(2)}, \dots \rangle$. Первый из таких инвариантов $N_j^{(2)}$ имеет вид*

$$\begin{aligned} N_j^{(2)}(\xi, \eta, \zeta, \nu) = & -[N_j(\xi, \eta), jN_j(\zeta, \nu)] - [jN_j(\xi, \eta), N_j(\zeta, \nu)] \\ & + N_j([\xi, jN_j(\zeta, \nu)], \eta) + N_j(\xi, [\eta, jN_j(\zeta, \nu)]) + jN_j([\xi, N_j(\zeta, \nu)], \eta) \\ & + jN_j(\xi, [\eta, N_j(\zeta, \nu)]) - N_j([\zeta, jN_j(\xi, \eta)], \nu) - N_j(\zeta, [\nu, jN_j(\xi, \eta)]) \\ & - jN_j([\zeta, N_j(\xi, \eta)], \nu) - jN_j(\zeta, [\nu, N_j(\xi, \eta)]), \end{aligned} \quad (13)$$

где ξ, η, ζ, ν – произвольные векторные поля, продолжающие векторы, заданные в точке x .

В общем случае $N_j^{(2)}$ является первым среди образующих инвариантов из $\mathcal{A}_j^\infty$, различающим структуры j и $-j$ (см. § 5, замечание 4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как показано в теореме 1, для уравнения $\tilde{\mathcal{E}}^1 = \mathcal{E}^2 \subset J_{\text{РН}}^1$ проекции $\tilde{\mathcal{E}}^k, \mathcal{E}^{k+1}$ совпадают. Поэтому вместо задачи о проекциях высших продолжений уравнения $\mathcal{E}^1$, ведущей к формально интегрируемому уравнению (см. § 1), можно рассматривать задачу поиска проекции высших продолжений для нового уравнения $\tilde{\mathcal{E}}^1$ и, как первый шаг, задачу о поднятии на один уровень. Решение на уровне 1-струй уравнения $\tilde{\mathcal{E}}^1$ продолжается до решения на уровне 2-струй, если и только если выполнены уравнения (1) и

$$\begin{aligned} U(\xi, \eta, \theta) := & \Phi^{(2)}(N_{j_L}(\xi, \eta), \theta) - N_{j_M}(\Phi^{(2)}(\xi, \theta), \Phi\eta) - N_{j_M}(\Phi\xi, \Phi^{(2)}(\eta, \theta)) \\ & = d(N_{j_M})(\Phi\xi, \Phi\eta, \Phi\theta) - \Phi \circ d(N_{j_L})(\xi, \eta, \theta). \end{aligned} \quad (14)$$

Из (1) и (14) имеем

$$\begin{aligned} U(\xi, \eta, j_L\theta) + j_M U(\xi, \eta, \theta) = & 2j_M \circ \Phi^{(2)}(N_{j_L}(\xi, \eta), \theta) + dj_M(\Phi\theta, N_{j_M}(\Phi\xi, \Phi\eta)) \\ & - \Phi \circ dj_L(\theta, N_{j_L}(\xi, \eta)) - N_{j_M}(dj_M(\Phi\theta, \Phi\xi), \Phi\eta) - N_{j_M}(\Phi\xi, dj_M(\Phi\theta, \Phi\eta)) \\ & + \Phi \circ N_{j_L}(dj_L(\theta, \xi), \eta) + \Phi \circ N_{j_L}(\xi, dj_L(\theta, \eta)) \\ = & d(N_{j_M})(\Phi\xi, \Phi\eta, j_M\Phi\theta) + j_M \circ d(N_{j_M})(\Phi\xi, \Phi\eta, \Phi\theta) \\ & - \Phi \circ d(N_{j_L})(\xi, \eta, j_L\theta) - \Phi \circ j_L \circ d(N_{j_L})(\xi, \eta, \theta), \end{aligned}$$

откуда $2j_M \circ \Phi^{(2)}(N_j(\xi, \eta), \theta) = R_{j_M}(\Phi\xi, \Phi\eta, \Phi\theta) - \Phi \circ R_{j_L}(\xi, \eta, \theta)$, где

$$\begin{aligned} R_j(\xi, \eta, \theta) = & d(N_j)(\xi, \eta, j\theta) + jd(N_j)(\xi, \eta, \theta) \\ & + N_j(dj(\theta, \xi), \eta) + N_j(\xi, dj(\theta, \eta)) - dj(\theta, N_j(\xi, \eta)). \end{aligned} \quad (15)$$

Так как $\Phi^{(2)}$ – симметричный тензор, для тензора

$$N_j^{(2)}(\xi, \eta, \zeta, \nu) = R_j(\xi, \eta, N_j(\zeta, \nu)) - R_j(\zeta, \nu, N_j(\xi, \eta)) \quad (16)$$

имеем

$$N_{jM}^{(2)} \circ (\Phi^{\wedge 2})^{\wedge 2} = \Phi \circ N_{jL}^{(2)}. \quad (17)$$

Итак, согласно (17) мы имеем новый инвариант $N_j^{(2)} \in \mathcal{A}_j^3 \subset \mathcal{A}_j^\infty$, который будем называть *высшим тензором Ниенхейса*. Формула (16) показывает тензорный характер этого инварианта, тем самым, $N_j^{(2)} \in \wedge^2(\wedge^2 T_x^*) \otimes T_x$, а формула (13), следующая из (14) и (15), показывает его независимость от евклидовой связности ∇ , определяющей $d = d_\nabla$. Возможно, тензор $N_j^{(2)}$ валентности $(1, 4)$ мог бы оказаться зависимым с тензорами четвертого порядка, получаемыми из $\mathcal{A}_j^2$, такими как $N_j(N_j(\xi, \eta), N_j(\zeta, \nu))$, т.е. не являться новым, но следующий пример показывает, что это не так.

ПРИМЕР 2. Пусть $\partial_i = \partial/\partial x^i$ – базисные векторы в $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^4(x^1, x^2, x^3, x^4)$. Зададим комплексную структуру соотношениями

$$j\partial_1 = \partial_2, \quad j\partial_2 = -\partial_1, \quad j\partial_3 = \partial_4 + x^2\partial_1, \quad j\partial_4 = -\partial_3 - x^2\partial_2.$$

Для тензоров N_j и $N_j^{(2)}$ имеем

$$\begin{aligned} N_j(\partial_1, \partial_2) &= 0, & N_j(\partial_3, \partial_4) &= x^2\partial_1, & N_j(\partial_1, \partial_3) &= -N_j(\partial_2, \partial_4) = \partial_1, \\ N_j(\partial_2, \partial_3) &= N_j(\partial_1, \partial_4) = -\partial_2, & N_j^{(2)}(\partial_1, \partial_3, \partial_3, \partial_4) &= -\partial_1, \\ N_j^{(2)}(\partial_1, \partial_3, j\partial_3, \partial_4) &= N_j^{(2)}(\partial_1, \partial_3, \partial_4, \partial_4) + x^2 N_j^{(2)}(\partial_1, \partial_3, \partial_1, \partial_4) = 0. \end{aligned}$$

§ 3. Критерий разрешимости уравнения Коши–Римана и формальные нормальные формы почти комплексных структур

3.1. Разрешимость уравнения Коши–Римана. Множество РН-струй может быть локально описано следующим образом:

$$\begin{aligned} J_{\text{РН}}^k &= \{(x, y, \Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(k)}) \mid x \in L, y \in M, \Phi^{(i)} \in \text{Smb}_\text{РН}^i(L, M) \subset \mathbb{S}^i T^*L \otimes TM\}, \\ &\sum_{\substack{r_1 + \dots + r_p = k \\ 1 \leq p \leq k}} \sum_{\substack{1 \leq i_s^r \leq k, \# \{i_s^r\} = k \\ i_1^1 < i_2^1 < \dots < i_p^1 \\ i_s^1 < i_s^2 < \dots < i_s^{r_s}}} d^{p-1} j_M(\Phi^{(r_1)}(\xi_{i_1^1}, \dots, \xi_{i_1^{r_1}}), \dots, \Phi^{(r_p)}(\xi_{i_p^1}, \dots, \xi_{i_p^{r_p}})) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq p \leq k, i_1^1 = 1, 1 \leq i_s^r \leq k, \\ \# \{i_s^r\} = k, i_s^1 < i_s^2 < \dots < i_s^{r_s}}} \Phi^{(k-p+1)}(dj_L^{p-1}(\xi_{i_1^1}, \dots, \xi_{i_1^p}), \xi_{i_2^1}, \dots, \xi_{i_2^{k-p}}). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $\#S$ обозначает количество различных элементов множества S .

Следующая теорема обобщает теорему 1.

ТЕОРЕМА 3. Пусть отображение $u: \mathcal{O}_L(x) \rightarrow \mathcal{O}_M(y)$ таково, что

$$j_M \circ u_* = u_* \circ j_L \pmod{\mu^{k-1}}, \quad N_{jM} \circ u_*^{\wedge 2} \equiv u_* \circ N_{jL} \pmod{\mu^{k-1}}, \quad 2 \leq k \leq \infty.$$

Тогда существует отображение $\tilde{u}: \mathcal{O}_L(x) \rightarrow \mathcal{O}_M(y)$ такое, что $j_M \circ \tilde{u}_* - \tilde{u}_* \circ j_L \in \mu^k$, $u_* - \tilde{u}_* \in \mu^{k-1}$. В частности, если $(u_*)_x \neq 0$, то $(\tilde{u}_*)_x \neq 0$, и если $(u_*)_x$ – вложение или отображение “на”, то это же можно сказать и об $(\tilde{u}_*)_x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что $(k-1)$ -РН-струя $(\Phi, \Phi^{(2)}, \dots, \Phi^{(k-1)})$ поднимается до k -РН-струи тогда и только тогда, когда для некоторого симметричного тензора $\Phi^{(k)}$ выполнено уравнение (18). Рассмотрим тензор

$$P_k = j_M \circ \Phi^{(k)} - \Phi^{(k)} \circ (j_L \otimes \mathbf{1}_L^{k-1}). \quad (19)$$

Далее нам потребуются две вспомогательные леммы.

ЛЕММА 3. Для всякого $k \geq 1$ тензор P_k , определенный равенством (19), удовлетворяет следующим свойствам:

$$j_M \circ P_k = -P_k \circ (j_L \otimes \mathbf{1}_L^{k-1}), \quad (20)$$

$$P_k(\xi, \eta, \vec{\theta}^{k-2}) - P_k(\eta, \xi, \vec{\theta}^{k-2}) = P_k(j_L \xi, j_L \eta, \vec{\theta}^{k-2}) - P_k(j_L \eta, j_L \xi, \vec{\theta}^{k-2}), \quad (21)$$

$$P_k \in T_x^* L \otimes \mathbb{S}^{k-1} T_x^* L \otimes T_y M. \quad (22)$$

ЛЕММА 4. Любой тензор P_k , удовлетворяющий условиям (20)–(22), может быть представлен в виде (19), где $\Phi^{(k)} \in \mathbb{S}^k T_x^* L \otimes T_y M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим тензор $B(\xi, \vec{\eta}^{(k-1)})$ такой, что $P_k = j_M \circ B - B \circ (j_L \otimes \mathbf{1}_L^{k-1})$. В силу (20) его всегда можно найти, а согласно (22) можно считать, что B симметричен по последним $k-1$ аргументам: $B \in T_x^* L \otimes \mathbb{S}^{k-1} T_x^* L \otimes T_y M$. Заметим, что при изменении B на j_L - j_M -линейный по первому аргументу тензор соответствующий тензор P_k не меняется. Таким образом, в разложении $B = B^{0,*} + B^{1,*}$ на j_L - j_M -линейную и антилинейную по первому аргументу компоненты можно избавиться от первого слагаемого и считать $B = B^{1,*}$.

Рассмотрим разложение

$$B^{1,*} = \sum_{p=0}^{k-1} C_p, \quad C_p = \sum_{\tau_p \in \mathbb{Z}_2^{k-1}} B^{1,\tau_p}, \quad \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\},$$

количество единиц в τ_p равно $\#_1 \tau_p = p$, и тензор B^{1,τ_p} является j_L - j_M -линейным или антилинейным по s -му аргументу, если на s -м месте в $(1, \tau_p)$ стоит соответственно 0 или 1. Заметим, что если единицы образуют в τ_p множество $i_1, \dots, i_r$, а нули – множество $j_1, \dots, j_{k-r-1}$, то B^{1,τ_p} симметричен по соответствующим аргументам $\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_r}$ и $\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_{k-r-1}}$. Заметим также, что тензор B^{1,τ_p} симметричен по аргументам ξ_1, ξ_{i_s} . Например, для $B^{1,1,*}$, пользуясь j_L - j_M -антилинейностью по ξ_1 , из формулы (21) имеем

$$B^{1,*}(\xi, \eta, \vec{\theta}^{k-2}) + j_M B^{1,*}(\xi, j_L \eta, \vec{\theta}^{k-2}) = B^{1,*}(\eta, \xi, \vec{\theta}^{k-2}) + j_M B^{1,*}(\eta, j_L \xi, \vec{\theta}^{k-2}),$$

т.е. $B^{1,1,*}(\xi, \eta, \vec{\theta}^{k-2}) = B^{1,1,*}(\eta, \xi, \vec{\theta}^{k-2})$.

Итак, тензор B^{1,τ_p} симметричен по аргументам $\xi_1, \xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_r}$. Несложно показать, что если $\gamma \in S_{k-1}$ – перестановка, то тензор $B^{1,\gamma(\tau_p)}$ совпадает с $B^{1,\tau_p} \circ (\mathbf{1} \times \gamma)$, где $\mathbf{1} \times \gamma$ действует как перестановка на аргументах; в случае $\gamma(\tau_p) = \tau_p$ утверждение совпадает со свойством симметричности B^{1,τ_p} , отмеченным выше. Итак, если к тензору C_p добавить сумму

$$\sum_{\#_1 \tau_{p+1}=p+1} B^{0,\tau_{p+1}},$$

где $B^{0, \tau_{p+1}} = B^{1, \tau_p} \circ \sigma$ и перестановка $\sigma \in S_k$ такова, что $(0, \tau_{p+1}) = \sigma^{-1}(1, \tau_p)$, то получится новый симметричный тензор $\hat{C}_p \in \mathbb{S}^k T_x^* L \otimes T_y M$.

Рассмотрим тензор

$$\Phi^{(k)} = \sum_{p=0}^{k-1} \hat{C}_p,$$

симметричный по построению, при этом $\Phi^{(k)} - B$ является j_L - j_M -линейным. Следовательно, тензор $P_k = j_M \circ \Phi^{(k)} - \Phi^{(k)} \circ (j_L \otimes \mathbf{1}^{k-1})$, построенный по $\Phi^{(k)}$, совпадает с аналогичным тензором, построенным по B , и лемма 4 доказана.

Заметим, что предложенная конструкция несколько отличается от конструкции леммы 2 ($k = 2$). Для случая $k = 3$ имеем $B^{1,*} = B^{1,0,0} + (B^{1,0,1} + B^{1,1,0}) + B^{1,1,1}$. Тензор $B^{1,1,1}$ симметричен, а $B^{1,0,0}$ симметричен по последним двум аргументам (η, θ) . Следовательно, если σ – циклическая перестановка аргументов, $\sigma(\xi, \eta, \theta) = (\eta, \theta, \xi)$, то $B^{1,0,0} \circ \sigma$ и $B^{1,0,0} \circ \sigma^2$ являются j_L - j_M -линейными по первому аргументу, а тензор $B^{1,0,0} + B^{1,0,0} \circ \sigma + B^{1,0,0} \circ \sigma^2$ симметричным. Тензор $B^{1,1,0}$ симметричен по аргументам (ξ, η) в силу (21) при $k = 3$. Значит, $B^{1,1,0}(\xi, \eta, \theta) = A(\xi, \eta, \theta) + A(\eta, \xi, \theta)$ для некоторого тензора A , j_L - j_M -антилинейного по первым двум и линейного по последнему аргументам. Кроме того, тензор $B^{1,*}$ инвариантен относительно перестановки τ последних двух аргументов, $\tau(\xi, \eta, \theta) = (\xi, \theta, \eta)$. Поэтому

$$\begin{aligned} B^{1,0,1}(\xi, \eta, \theta) &= B^{1,1,0} \circ \tau(\xi, \eta, \theta) = A(\xi, \theta, \eta) + A(\theta, \xi, \eta), \\ B^{1,0,1}(\xi, \eta, \theta) &= B^{1,1,0}(\xi, \theta, \eta) = B^{1,1,0}(\theta, \xi, \eta) = B^{1,1,0} \circ \sigma^2(\xi, \eta, \theta). \end{aligned}$$

Введем тензор

$$B^{0,1,1}(\xi, \eta, \theta) := B^{1,1,0} \circ \sigma(\xi, \eta, \theta) = A(\eta, \theta, \xi) + A(\theta, \eta, \xi).$$

Заметим, что тензор $B^{1,1,0} + B^{1,0,1} + B^{0,1,1}$ симметричен, а $B^{0,1,1}$ является j_L - j_M -линейным по первому аргументу. Таким образом, выполнено

$$P_3 = j_M \circ B^{1,*} - B^{1,*} \circ (j_L \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) = j_M \circ \Phi^{(3)} - \Phi^{(3)} \circ (j_L \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}),$$

где $\Phi^{(3)} \in \mathbb{S}^3 T_x^* L \otimes T_y M$ определяется равенством

$$\Phi^{(3)} = (B^{1,0,0} + B^{1,0,0} \circ \sigma + B^{1,0,0} \circ \sigma^2) + (B^{1,1,0} + B^{1,0,1} + B^{0,1,1}) + B^{1,1,1}.$$

Леммы 3, 4 можно трактовать как точность следующего комплекса:

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}_k \xrightarrow{i} \mathbb{S}^k T^* L \otimes TM \xrightarrow{\sigma_k} T^* L \otimes \mathbb{S}^{k-1} T^* L \otimes TM \xrightarrow{\varkappa_k \oplus \nu_k} \Theta_k \oplus \Delta_k \longrightarrow 0.$$

Здесь $\mathcal{G}_k$ – продолжение символа $\mathcal{E}^1$ (см. [6], [7]) уравнения Коши–Римана, $\mathbb{S}^k T^* L \otimes TM$ – пространство всех символов, i – включение, σ_k – линейаризация оператора $\bar{\partial}$: $\sigma_k(\Psi) = j_M \circ \Psi - \Psi \circ (j_L \otimes \mathbf{1}^{k-1})$. Отображения $\varkappa_k$ и ν_k в пространства

$$\Theta_k = \wedge^2 T^* L \otimes \mathbb{S}^{k-2} T^* L \otimes TM \quad \text{и} \quad \Delta_k = \mathbb{S}^{k-1} T^* L \otimes \text{Hom}_{\mathbb{C}}(TL, TM)$$

имеют вид $\varkappa_k = \delta_k \circ \tilde{\sigma}_k$ и $\nu_k(X \otimes \vec{Y}^{(k-1)} \otimes Z) = \vec{Y}^{(k-1)} \otimes \varepsilon(X \otimes Z)$, где δ_k – оператор альтернирования по первым двум аргументам, $\delta_k(B)(X, Y, \vec{Z}^{(k-2)}) = B(X, Y, \vec{Z}^{(k-2)}) - B(Y, X, \vec{Z}^{(k-2)})$, $\tilde{\sigma}_k \Psi = j_M \circ \Psi - \Psi \circ (\mathbf{1} \otimes j_L \otimes \mathbf{1}^{k-2})$, а $\varepsilon(B) = j_M \circ B + B \circ j_L$ – линейаризация оператора ∂ .

Заметим, что член Θ_k , соответствующий условию (21), дает условие сохранения дифференциала тензора Ниенхейса, а член Δ_k , отвечающий условию (20), – тождество. Более подробно, выразим при помощи формулы (18) тензор P_k через локальные представители $(k-1)$ -струи $(\Phi, \Phi^{(2)}, \dots, \Phi^{(k-1)})$ отображения $u: \mathcal{O}_L(x) \rightarrow \mathcal{O}_M(y)$ и подставим соответствующее выражение в формулы леммы 3. При этом условия (20) и (22) дадут тождество, а (21) – условие сохранения $(k-1)$ -струи тензора Ниенхейса. Соответствующие выкладки проводятся как и в теореме 1 для $k=2$.

Например, при $k=3$ имеем

$$\begin{aligned} P_3(\xi, \eta, \theta) &= j_M \Phi^{(3)}(\xi, \eta, \theta) - \Phi^{(3)}(j_L \xi, \eta, \theta) \\ &= \Phi d^2 j_L(\xi, \eta, \theta) - d^2 j_M(\Phi \xi, \Phi \eta, \Phi \theta) + \Phi^{(2)}(dj_L(\xi, \theta), \eta) + \Phi^{(2)}(dj_L(\xi, \eta), \theta) \\ &\quad - dj_M(\Phi^{(2)}(\xi, \theta), \Phi \eta) - dj_M(\Phi \xi, \Phi^{(2)}(\eta, \theta)) - dj_M(\Phi^{(2)}(\xi, \eta), \Phi \theta). \end{aligned} \quad (23)$$

Подстановка выражения (23) в (20) и (22) при $k=3$ дает тождество согласно (8) и формуле

$$d^2 j(j\xi, \eta, \theta) = -j d^2 j(\xi, \eta, \theta) - dj(dj(\xi, \theta), \eta) - dj(dj(\xi, \eta), \theta). \quad (24)$$

Подставим выражение (23) в (21) при $k=3$ и воспользуемся формулами (1), (8), (24) и тождеством

$$\begin{aligned} dj(N_j(\xi, \eta), \theta) + j dN_j(\xi, \eta, \theta) &= d^2 j(j\xi, j\eta, \theta) - d^2 j(j\eta, j\xi, \theta) - d^2 j(\xi, \eta, \theta) + d^2 j(\eta, \xi, \theta) \\ &\quad + dj(dj(\xi, \theta), j\eta) - dj(dj(\eta, \theta), j\xi) + dj(j\xi, dj(\eta, \theta)) - dj(j\eta, dj(\xi, \theta)), \end{aligned}$$

которое получается дифференцированием тождества (9). Имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi^{(2)}(dj_L(\xi, \theta), \eta) + \Phi^{(2)}(dj_L(\xi, \eta), \theta)) - dj_M(\Phi^{(2)}(\xi, \theta), \Phi \eta) - dj_M(\Phi \xi, \Phi^{(2)}(\eta, \theta)) \\ &\quad - dj_M(\Phi^{(2)}(\xi, \eta), \Phi \theta) + \Phi d^2 j_L(\xi, \eta, \theta) - d^2 j_M(\Phi \xi, \Phi \eta, \Phi \theta) - \Phi^{(2)}(dj_L(\eta, \theta), \xi) \\ &\quad - \Phi^{(2)}(dj_L(\eta, \xi), \theta) + dj_M(\Phi^{(2)}(\eta, \theta), \Phi \xi) + dj_M(\Phi \eta, \Phi^{(2)}(\xi, \theta)) \\ &\quad + dj_M(\Phi^{(2)}(\eta, \xi), \Phi \theta) - \Phi d^2 j_L(\eta, \xi, \theta) + d^2 j_M(\Phi \eta, \Phi \xi, \Phi \theta) \\ &\quad - \Phi^{(2)}(dj_L(j_L \xi, \theta), j_L \eta) - \Phi^{(2)}(dj_L(j_L \xi, j_L \eta), \theta) + dj_M(\Phi^{(2)}(j_L \xi, \theta), j_M \Phi \eta) \\ &\quad + dj_M(j_M \Phi \xi, \Phi^{(2)}(j_L \eta, \theta)) + dj_M(\Phi^{(2)}(j_L \xi, j_L \eta), \Phi \theta) - \Phi d^2 j_L(j_L \xi, j_L \eta, \theta) \\ &\quad + d^2 j_M(j_M \Phi \xi, j_M \Phi \eta, \Phi \theta) + \Phi^{(2)}(dj_L(j_L \eta, \theta), j_L \xi) + \Phi^{(2)}(dj_L(j_L \eta, j_L \xi), \theta) \\ &\quad - dj_M(\Phi^{(2)}(j_L \eta, \theta), j_M \Phi \xi) - dj_M(j_M \Phi \eta, \Phi^{(2)}(j_L \xi, \theta)) - dj_M(\Phi^{(2)}(j_L \eta, j_L \xi), \Phi \theta) \\ &\quad + \Phi d^2 j_L(j_L \eta, j_L \xi, \theta) - d^2 j_M(j_M \Phi \eta, j_M \Phi \xi, \Phi \theta) \\ &= j_M(-\Phi^{(2)}(N_{j_L}(\xi, \eta), \theta) - \Phi dN_{j_L}(\xi, \eta, \theta) + N_{j_M}(\Phi^{(2)}(\xi, \theta), \Phi \eta) \\ &\quad + N_{j_M}(\Phi \xi, \Phi^{(2)}(\eta, \theta)) + dN_{j_M}(\Phi \xi, \Phi \eta, \Phi \theta)). \end{aligned}$$

Обращение в 0 последнего выражения в точности означает, что 1-струя из $\tilde{\mathcal{E}}^1$ может быть продолжена до 2-струи.

По причине громоздкости мы опускаем выкладки для случая произвольного k . Теорема 2 доказана.

Следствие. Пусть тензоры Ниенхейса являются малыми порядка k в точках $x \in L$ и $y \in M$, т.е. $N_{j_L} \in \mu_x^k$, $N_{j_M} \in \mu_y^k$ ($1 \leq k \leq \infty$). Тогда существует отображение $u: \mathcal{O}_L(x) \rightarrow \mathcal{O}_M(y)$ такое, что $du_x \neq 0$ и $j_M \circ u_* - u_* \circ j_L \in \mu^{k+1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае $\dim_{\mathbb{C}} L = \dim_{\mathbb{C}} M = n$, $k = \infty$, это утверждение является формальной частью теоремы Ньюландера–Ниренберга (см. [1], [4]): если тензоры Ниенхейса почти комплексных структур j и j_0 совпадают, то эти структуры локально изоморфны; здесь j_0 – стандартная комплексная структура на $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(0)$ (конечно, $N_{j_0} \equiv 0$, см. формулу (9)). Обобщением этого факта является теорема 6 (см. § 5). Заметим также, что из формальной эквивалентности не следует гладкая. Действительно, можно построить почти комплексную структуру j такую, что $N_j \in \mu^\infty$, но $N_j \not\equiv 0$ (см. доказательство теоремы 5 в § 4). Тогда j формально эквивалентна j_0 , но не эквивалентна гладко.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условия следствия можно сформулировать в виде $dN_{j_L} \in \mu_x^{k-1}$, $dN_{j_M} \in \mu_y^{k-1}$, где $d = d_\nabla$, а ∇ – тривиальная связность. Заметим, однако, что не существует почти комплексных структур с условием $dN_j \equiv 0$, отличных от комплексных. Действительно, в этом случае существуют координаты, в которых компоненты тензора Ниенхейса являются постоянными, причем можно считать, что индуцированные координаты в фиксированном касательном пространстве $T_x \simeq \mathbb{C}^n$ являются комплексными. Запишем действие почти комплексной структуры на базисные векторы $\partial_r = \partial/\partial x^r$:

$$j\partial_{2r-1} = \partial_{2r} + \sum a_{2r}^i \partial_i, \quad j\partial_{2r} = -\partial_{2r-1} + \sum a_{2r-1}^i \partial_i, \quad a_i^s \in \mu_x.$$

Если для почти любого вектора ξ выполнено $\dim N_j(\xi, T_x) = 2n - 2$, т.е. N_j – тензор общего вида, $n_{N_j} = 2$ почти всюду (в смысле определения 4 из § 4), то из условий $N_j(j\partial_{2r-1}, \partial_{2r}) \equiv N_j(j\partial_{2s-1}, \partial_{2s}) \equiv 0$ следует, что $a_{2s}^{2r} \equiv a_{2s-1}^{2r} \equiv a_{2s}^{2r-1} \equiv a_{2s-1}^{2r-1} \equiv 0$ для всех $r \neq s$, иными словами, $N_j(\partial_{2r}, \partial_{2s}) = 0$, – противоречие. Предположим теперь, что существует подпространство $K_1 \subset T_x$ ($\dim K_1 \geq 4$) такое, что $N_j|_{\wedge^2 K_1} \equiv 0$, причем будем считать K_1 максимальным, удовлетворяющим этому свойству. Продолжив K_1 аффинными сдвигами в фиксированной системе координат на окрестность точки x , получаем слоение $\mathcal{K}_1$, $\dim \mathcal{K}_1 = \dim K_1$, j -инвариантное в силу $N_j(j\xi, \eta) = -jN_j(\xi, \eta) = 0$ для $\xi, \eta \in T_p \mathcal{K}_1$, ограничение j на слои которого является интегрируемым, $N_j|_{\mathcal{K}_1} \equiv 0$. В дополнительном подпространстве выберем максимальное вырожденное относительно N_j подпространство K_2 , построим по нему слоение $\mathcal{K}_2$, и т.д. В итоге мы получим, что почти комплексная структура j в окрестности точки x представима как прямая сумма комплексных структур на слоях стандартных слоений $\mathcal{K}_i$, полученных из компонент комплексного разложения $T_x = \bigoplus K_i$. Теперь несложно получить противоречие с условием $dN_j \equiv 0$, если j неинтегрируема в целом.

Заметим, что существуют нетривиальные связности ∇ такие, что $d_\nabla N_j \equiv 0$. Действительно, если в качестве ∇ взять почти комплексную связность [11], то $d_\nabla j \equiv 0$, откуда $d_\nabla N_j \equiv 0$. В частности, такому свойству будет удовлетворять минимальная связность ∇ , которая несимметрична и имеет тензор кручения $T_\nabla = \frac{1}{4}N_j$ (такие связности всегда существуют, см. [11]).

3.2. Формальные нормальные формы почти комплексных структур. С помощью теоремы 3 можно построить *формальные нормальные формы почти комплексных структур*, рассматривая почти комплексные структуры $\text{mod } \mu^k$, т.е. автоморфизмы $j: T_{x'}X \rightarrow T_{x'}X$, $x' \in X$, такие, что $j^2 = -1_X \pmod{\mu_x^k}$.

Предположим, что мы построили нормальные формы почти комплексных структур $\text{mod } \mu^k$: $\mathcal{J}_k = \{j_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}}\}$. Здесь $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ – параметры, задающие элементы $\mathcal{J}_k$. Рассмотрим те из них, которые продолжаются до почти комплексных структур $\text{mod } \mu^{k+1}$, т.е. те $J_k \in \mathcal{J}_k$, для которых существует автоморфизм касательного расслоения $\Delta J_k \in \mu^k$ с почти комплексной $\text{mod } \mu^{k+1}$ структурой $J_k + \Delta J_k$.

Назовем такие структуры *k-допустимыми*. Если J_k – почти комплексная структура $\text{mod } \mu^{k+1}$ и $\Delta J_k \in \mu^k$, то $J_k + \Delta J_k$ является почти комплексной структурой $\text{mod } \mu^{k+1}$ тогда и только тогда, когда $j_0 \circ \Delta J_k + \Delta J_k \circ j_0 \in \mu^{k+1}$, где $j_0 = J_k \pmod{\mu}$ – линеаризация структуры J_k .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Две почти комплексные $\text{mod } \mu^{k+1}$ ($k \geq 1$) структуры J_k и $J_k + \Delta J_k$ эквивалентны μ^{k+1} тогда и только тогда, когда автоморфизм ΔJ_k согласован с комплексной структурой j_0 по модулю μ^{k+1} :*

$$N_{(j_0, \Delta J_k)}(\xi, \eta) := [j_0 \xi, \Delta J_k \eta] + [\Delta J_k \xi, j_0 \eta] - j_0[\xi, \Delta J_k \eta] - j_0[\Delta J_k \xi, \eta] - \Delta J_k[\xi, j_0 \eta] - \Delta J_k[j_0 \xi, \eta] \in \mu^{k+1}.$$

Действительно, $N_{(J_k + \Delta J_k, J_k)} := N_{(J_k + \Delta J_k)} - N_{J_k} \equiv N_{(j_0, \Delta J_k)} \pmod{\mu^{k+1}}$.

Таким образом, *k-допустимые* почти комплексные структуры $j_{\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}}$ из $\mathcal{J}_k$ определяют нормальные формы почти комплексных $\text{mod } \mu^{k+1}$ структур $j_{\lambda_1, \dots, \lambda_k}$ из $\mathcal{J}_{k+1}$, где параметр λ_k принимает значения в символах *k-струй* тензоров совместности Ниеенхейса:

$$\lambda_k = [N_{(j_0, \Delta J_k)}]_k \in (\mu^k \wedge^2 T_x^* \otimes T_x) / (\mu^{k+1} \wedge^2 T_x^* \otimes T_x) = \wedge^2 T_x^* \otimes \mathbb{S}^k T_x^* \otimes T_x.$$

Заметим, что λ_k принимает значения в пространстве Θ_{k+2} , которое возникает в доказательстве теоремы 3.

Итак, мы построили нормальные формы почти комплексных $\text{mod } \mu^{k+1}$ структур: $\mathcal{J}_{k+1} = \{j_{\lambda_1, \dots, \lambda_k}\}$, т.е. нашли структуры такие, что для любой почти комплексной $\text{mod } \mu^{k+1}$ структуры $j: T\mathcal{O}(x) \rightarrow T\mathcal{O}(x)$ существуют диффеоморфизм $\varphi_k: \mathcal{O}(x) \rightarrow \mathcal{O}(x)$ и набор параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, удовлетворяющие тождеству $\varphi_k^* j \equiv j_{\lambda_1, \dots, \lambda_k} \pmod{\mu^{k+1}}$.

Назовем *деревом почти комплексных структур* иерархию $\mathcal{J}_1 = \{j_0\}$, $\mathcal{J}_2 = \{j_{\lambda_1}\}$, $\mathcal{J}_3 = \{j_{\lambda_1, \lambda_2}\}$, и т.д. Назовем *ветвью дерева* произвольную последовательность продолжающих друг друга почти комплексных структур из дерева $j_0, j_{\lambda_1}, j_{\lambda_1, \lambda_2}, j_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}, \dots$; обозначим такую последовательность через $j_{\{\lambda_i\}_1^\infty}$, а их совокупность через $\mathcal{J}_\infty$. По теореме Бореля для любого формального диффеоморфизма существует индуцирующий его гладкий диффеоморфизм. Таким образом, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. *Множество $\mathcal{J}_\infty$ задает формальные нормальные формы почти комплексных структур $\text{mod } \mu^\infty$, т.е. для любой формальной почти комплексной структуры j , $j^2 + 1 \in \mu^\infty$, существуют элемент $j_{\{\lambda_i\}_1^\infty} \in \mathcal{J}_\infty$ и диффеоморфизм $\varphi: \mathcal{O}(x) \rightarrow \mathcal{O}(x)$ такие, что*

$$\varphi^* j \equiv j_{\{\lambda_i\}_1^\infty} \pmod{\mu^\infty}.$$

Заметим, что построенные нормальные формы не будут минимальными в смысле разбиения на непересекающиеся классы даже $\text{mod } \mu^2$, т.е. по модулю классификации тензоров Ниеенхейса в точке. Тем не менее, приведенная классификация является достаточно тонкой: всем комплексным структурам соответствует одна точка $j_{\{0\}^\infty} \in \mathcal{J}_\infty$.

§ 4. Пространство линейных тензоров Ниеенхейса

Рассмотрим тензор Ниеенхейса $N = N_j$ на фиксированном касательном пространстве T_x как билинейное отображение $N: T_x \otimes T_x \rightarrow T_x$. Это отображение антилинейно и кососимметрично, $N \in \mathcal{N}_j$ (см. (10)). Никаких других ограничений нет.

ТЕОРЕМА 5. *Для любого тензора $N \in \mathcal{N}_{j_0}(T_x)$ существует почти комплексная структура j на $\mathcal{O}(x)$ такая, что $j_x = j_0$ и $N = (N_j)_x$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (x^i) – система координат в окрестности точки x такая, что векторы $\partial_i = \partial/\partial x^i|_x$ образуют стандартный комплексный относительно j_0 базис в T_x . Тогда на $\theta(x)$ имеем (считаем, что $x^i = 0$ в точке x)

$$\begin{aligned} j\partial_{2r-1} &= \partial_{2r} + \sum a_{2r}^i \partial_i, \quad j\partial_{2r} = -\partial_{2r-1} + \sum a_{2r-1}^i \partial_i, \quad a_s^i(0) = 0; \\ N_j(\partial_{2s-1}, \partial_{2t-1})_0 &= \sum \left(\frac{\partial a_{2t}^{2i-1}}{\partial x^{2s}}(0) - \frac{\partial a_{2s}^{2i-1}}{\partial x^{2t}}(0) + \frac{\partial a_{2t}^{2i}}{\partial x^{2s-1}}(0) - \frac{\partial a_{2s}^{2i}}{\partial x^{2t-1}}(0) \right) \partial_{2i-1} \\ &\quad + \sum \left(\frac{\partial a_{2t}^{2i}}{\partial x^{2s}}(0) - \frac{\partial a_{2s}^{2i}}{\partial x^{2t}}(0) - \frac{\partial a_{2t}^{2i-1}}{\partial x^{2s-1}}(0) + \frac{\partial a_{2s}^{2i-1}}{\partial x^{2t-1}}(0) \right) \partial_{2i} \\ &= \sum (c_{s,t}^{2i-1} \partial_{2i-1} + c_{s,t}^{2i} \partial_{2i}). \end{aligned} \quad (25)$$

Необходимо доказать, что при любом выборе констант $c_{s,t}^i, 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq s < t \leq n$, уравнение (26) имеет решение. Полагая $a_{2t}^i(x^1, \dots, x^{2n}) = \sum_{s < t} c_{s,t}^i x^{2s}$ и определяя a_{2t-1}^i из условия $j^2 = -1$, с учетом формулы (25) получаем требуемое.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовем *пространством линейных тензоров Ниенхейса* множество тензоров $\mathcal{N}_j^{(n)}$ на фиксированном комплексном линейном пространстве $V \simeq \mathbb{C}^n$, заданное формулой (10).

Рассмотрим отображение, сопоставляющее тензору Ниенхейса $N \in \mathcal{N}_j(V)$ на $V \simeq \mathbb{C}^n$ функцию $n_N: V \rightarrow 2\mathbb{Z}_+$:

$$n_N(\xi) := \dim\{\eta \mid N(\xi, \eta) = 0\} = 2 \dim_{\mathbb{C}}\{\eta \mid N(\xi, \eta) = 0\} \in 2\mathbb{Z}_+.$$

Поскольку $n_N(\xi) = n_N(j\xi)$, функцию n_N можно рассматривать как отображение $n_N: PV \simeq \mathbb{CP}^{n-1} \rightarrow 2\mathbb{Z}_+$. Эта функция полунепрерывна сверху по ξ :

$$\overline{\lim}_{\xi \rightarrow \xi_0} n_N(\xi) \leq n_N(\xi_0) \quad \forall \xi_0 \in V;$$

она также полунепрерывна сверху по N :

$$\overline{\lim}_{N' \rightarrow N} n_{N'}(\xi) \leq n_N(\xi) \quad \forall N \in \mathcal{N}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что линейный тензор Ниенхейса $N \in \mathcal{N}_j$ *находится в общем положении*, если для почти всех ξ выполнено равенство $n_N(\xi) = 2$, т.е. ограничение N на двумерные плоскости равно 0 только на комплексных прямых за исключением множества двумерных плоскостей меры 0.

Несложно показать, что условие в определении 4 является действительно условием общего положения: множество тензоров $N \in \mathcal{N}_j$ с $n_N(\xi) = 2$ почти всюду является открытым в силу полунепрерывности, а всюду плотность легко доказывается с использованием следующего примера.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим билинейное кососимметричное отображение $A: \wedge^2 \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, определяемое формулой

$$A(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n (\xi^i \eta^{i+1} - \xi^{i+1} \eta^i) e_i, \quad \xi = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i, \quad \eta = \sum_{i=1}^n \eta^i e_i, \quad \xi^{n+1} = \xi^1, \quad \eta^{n+1} = \eta^1.$$

Тензор A удовлетворяет свойству: для почти всех векторов ξ из равенства $A(\xi, \eta) = 0$ следует параллельность векторов ξ и η .

Определим комплексную структуру j на $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}_1^n \oplus \mathbb{R}_2^n$ формулой $j(\xi \oplus \eta) = (-\eta, \xi)$ и соответствующий антиинвариантный тензор $N \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^{2n})$, $N: \wedge^2 \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, формулой

$$N(\xi_1 \oplus \eta_1, \xi_2 \oplus \eta_2) = (A(\xi_1, \xi_2) - A(\eta_1, \eta_2)) \oplus (-A(\xi_1, \eta_2) - A(\eta_1, \xi_2)).$$

Легко видеть, что $n_N(\xi) = 2$ для почти всех ξ .

Из определения 4 следует, что комплексные прямые можно выделить из двумерных плоскостей при помощи тензора Ниенхейса общего положения $N: \mathbb{C}\xi = \text{Ker } N(\xi, \cdot)$ для почти всех ξ , а для других ξ можно определить по непрерывности. Это позволяет ввести комплексную независимость векторов через тензор Ниенхейса N общего положения: векторы $\xi_1, \dots, \xi_r$ *комплексно независимы*, если для любого вектора ξ из линейной оболочки $\Lambda = \langle \xi_1, \dots, \xi_r \rangle$ общего положения и любого числа s равенство $N(\xi_s, \xi) = 0$ влечет $\xi = \text{const} \cdot \xi_s$. Более того, по любому комплексно независимому набору из $n = \dim_{\mathbb{C}} V$ векторов общего положения в V с помощью тензора N канонически строится разложение на комплексные прямые $V = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}$, каждому вектору сопоставляется его двумерный N -аннулятор.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $N \in \wedge^2 V^* \otimes V$ – *кососимметричный тензор, антилинейный относительно двух комплексных структур j_1 и j_2 на линейном пространстве V , $N \in \mathcal{N}_{j_1} \cap \mathcal{N}_{j_2}$. Если N – тензор общего положения, то $j_1 = \pm j_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную комплексную прямую $\mathbb{C} \subset V$, т.е. двумерное подпространство, ограничение тензора N на которое равно 0 в предположении, что $\mathbb{C}$ комплексно порождается вектором ξ таким, что $n_N(\xi) = 2$. Инвариантность этого подпространства относительно j_1 и j_2 очевидна. На этой прямой существует вектор $\xi \neq 0$ такой, что векторы $j_1 \xi$ и $j_2 \xi$ параллельны. Действительно, с точностью до гомотетии оператор комплексного умножения j_k на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ совпадает с поворотом на некоторый угол:

$$\varphi \mapsto \varphi + \delta_k(\varphi) \mapsto \varphi + \pi, \quad \varphi \in \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}^1 \pmod{2\pi}.$$

Заменяя, если необходимо, j_2 на $-j_2$, можно считать, что $\delta_1(\varphi), \delta_2(\varphi) \in (0, \pi)$. Ни одно из неравенств $\delta_1(\varphi) < \delta_2(\varphi)$, $\delta_1(\varphi) > \delta_2(\varphi)$ не может выполняться для всех φ , поскольку $j_1^2 = j_2^2 = -1$. Поэтому существует φ такое, что $\delta_1(\varphi) = \delta_2(\varphi)$, т.е. существует вектор $\xi \neq 0$, для которого $j_1 \xi = \alpha j_2 \xi$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Для любого вектора $\eta \notin \mathbb{C} = \mathbb{C}\xi$ имеем

$$N(\xi, j_1 \eta) = N(j_1 \xi, \eta) = N(\alpha j_2 \xi, \eta) = N(\xi, \alpha j_2 \eta),$$

т.е. $N(\xi, j_1 \eta - \alpha j_2 \eta) = 0$. Но $j_1 \eta, j_2 \eta \in \mathbb{C}\eta$ (как объяснено выше, $\mathbb{C}\eta$ определяется только тензором Ниенхейса N), в то же время $\mathbb{C}\xi \cap \mathbb{C}\eta = \{0\}$. В силу равенства $n_N(\xi) = 2$ имеем $j_1 \eta = \alpha j_2 \eta$ для любого вектора $\eta \notin \mathbb{C}\xi$, следовательно, и для любого $\eta \in V$ (по непрерывности). Итак, $j_1 = \alpha j_2$, откуда $\alpha = \pm 1$.

Рассмотрим линейное пространство V , две комплексных структуры j_1 и j_2 на нем и произвольный тензор Ниенхейса $N \in \mathcal{N}_{j_1} \cap \mathcal{N}_{j_2}$, необязательно общего вида. Предположим, что $N \neq 0$. Тогда существует вектор $\theta = N(\xi, \eta) \neq 0$. Заметим, что $j_1 j_2 \theta = N(j_1 \xi, j_2 \eta) = j_2 j_1 \theta$. Поэтому подпространство $\Theta = \langle \theta, j_1 \theta, j_2 \theta, j_1 j_2 \theta \rangle$ является j_1 - j_2 -инвариантным. Заметим, что Θ распадается на сумму инвариантных подпространств:

$\Theta = \langle \theta^+, j_1 \theta^+ \rangle \oplus \langle \theta^-, j_1 \theta^- \rangle$, где $\theta^+ = j_1 \theta + j_2 \theta$ и $\theta^- = j_1 \theta - j_2 \theta$ удовлетворяют соотношениям $j_1 \theta^+ = j_2 \theta^+$, $j_1 \theta^- = -j_2 \theta^-$. Таким образом, если подпространство Θ четырехмерно, то существуют ненулевые векторы $\theta^\pm$ такие, что $j_1 \theta^\pm = \pm j_2 \theta^\pm$; если же Θ двумерно, то существует лишь один из таких векторов. Обозначим $\Pi^+ = \{\xi \mid j_1 \xi = j_2 \xi\}$, $\Pi^- = \{\xi \mid j_1 \xi = -j_2 \xi\}$, $\Pi = \Pi^+ \oplus \Pi^-$. Мы показали, что любой вектор $\theta \in \text{Im } N(\cdot, \cdot)$ представим в виде суммы векторов из Π^+ и Π^- . Заметим, что любой вектор $\theta \in V$ представим в виде $\theta = \theta_{(+)} + \theta_{(-)}$, где $\theta_{(\pm)} = (\theta \mp j_1 j_2 \theta)/2$, причем $N(\theta_{(+)}, \Pi^-) = 0$, $N(\theta_{(-)}, \Pi^+) = 0$. Положим $K^+ = \{\xi \mid N(\xi, \Pi^-) = 0\}$, $K^- = \{\xi \mid N(\xi, \Pi^+) = 0\}$. Мы доказали

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для подпространства $\hat{\Pi} \subset V$, порожденного $\text{Im } N(\cdot, \cdot)$, имеет место включение $\hat{\Pi} \subset \Pi$. Кроме того, $\Pi^+ \subset K^+$, $\Pi^- \subset K^-$, $V = K^+ + K^-$. Пересечение $K^+ \cap K^-$ совпадает с пространством векторов $K = \text{Ker } N(\cdot, \Pi) := \{\xi \mid N(\xi, \Pi) = 0\}$.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим линейное пространство $V^8 = \mathbb{C}_1 \oplus \mathbb{C}_2 \oplus \mathbb{C}_3 \oplus \mathbb{C}_4$, $\mathbb{C}_s = \langle \partial_{2s-1}, \partial_{2s} \rangle$, $s = 1, 2, 3, 4$, со стандартной комплексной структурой j_1 и структурой j_2 , отличающейся от j_1 только на базисных векторах $\mathbb{C}_3$, где $j_2 \partial_5 = \partial_6 + \partial_1$, $j_2 \partial_6 = -\partial_5 - \partial_2$. Рассмотрим тензор $N \in \mathcal{N}_{j_1} \cap \mathcal{N}_{j_2}$, заданный условиями

$$N(\partial_1, \partial_3) = \partial_1, \quad N(\partial_5, \partial_7) = \partial_1, \quad N(\mathbb{C}_1 \oplus \mathbb{C}_2, \mathbb{C}_3 \oplus \mathbb{C}_4) = 0.$$

Имеем $\Pi^- = 0$, $\Pi = \Pi^+ = \mathbb{C}_1 \oplus \mathbb{C}_2 \oplus \mathbb{C}_4$, $K^- = \text{Ker } N(\cdot, \Pi) = \mathbb{C}_4$, $K^+ = V^8$, $\text{Ker } N(\cdot, \cdot) = 0$.

§ 5. Почти комплексные структуры общего вида и их классификация

В этом параграфе мы изучим общие свойства тензоров Ниенхейса и упростим следствие из теоремы 3 для почти комплексных структур общего вида.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем говорить, что почти комплексная структура j на $\mathcal{O}(x)$ имеет общий вид в точке x , если линейный тензор Ниенхейса $(N_j)_x$ в T_x обладает свойством общего положения $\mathfrak{n}_{N_j}(\xi) = 2$ для почти всех ξ . Кроме того, будем считать, что пара $(\mathcal{O}(x), j)$ неизоморфна $(\mathcal{O}(x), -j)$.

Отметим, что множество точек, где почти комплексная структура имеет общий вид, является открытым.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Почти комплексная структура j на $\mathcal{O}(x)$ общего вида неизоморфна структуре $-j$. Действительно, для инварианта, введенного в § 2, имеем $N_{-j}^{(2)} = -N_j^{(2)}$, и для почти комплексной структуры j общего вида тензоры $N_j^{(2)}$ и $-N_j^{(2)}$ (на фиксированном касательном пространстве) неизоморфны. Заметим, что $(T_x, j_x) \simeq (T_x, -j_x)$ и $N_{-j} = N_j$, откуда следует, что $j \simeq -j \pmod{\mu_x^2}$ на $\mathcal{O}(x)$, но почти всегда $j \not\simeq -j \pmod{\mu_x^3}$, и тензор $N_j^{(2)}$ является первым образующим инвариантом в $\mathcal{A}_j^\infty$, различающим в общем случае почти комплексные структуры j и $-j$.

ПРИМЕР 5. Рассмотрим почти комплексную структуру в $\mathbb{R}^4$, определенную равенствами

$$\begin{aligned} j\partial_1 &= \partial_2, & j\partial_3 &= \partial_4 + (x^2)^2\partial_1 + \varepsilon(x^3)^2\partial_2, \\ j\partial_2 &= -\partial_1, & j\partial_4 &= -\partial_3 - (x^2)^2\partial_2 + \varepsilon(x^3)^2\partial_1. \end{aligned}$$

При $\varepsilon = 0$ почти комплексные структуры j и $-j$ изоморфны, а при $\varepsilon \neq 0$ неизоморфны. Легко видеть, что при $\varepsilon \neq 0$ приведенная почти комплексная структура имеет общий вид.

ТЕОРЕМА 6. *Предположим, что почти комплексные структуры j_L на $\mathcal{O}_L(x)$ и j_M на $\mathcal{O}_M(y)$ имеют общий вид.*

1. *Пусть существует отображение $u: \mathcal{O}_L(x) \rightarrow \mathcal{O}_M(y)$, сопрягающее N_{j_L} с N_{j_M} и являющееся диффеоморфизмом на образ. Тогда u является либо псевдоголоморфным, либо антипсевдоголоморфным отображением: $j_M \circ u_* = \pm u_* \circ j_L$.*

2. *Если тензоры Ниемхейса сопряжены формально, $N_{j_M} \circ u_*^{\wedge 2} \equiv u_* \circ N_{j_L} \pmod{\mu_{x,y}^\infty}$, и размерности многообразий L и M совпадают, то почти комплексная структура j_L формально эквивалентна в точности одной из структур j_M или $-j_M$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай гладкой сопряженности тензоров Ниемхейса (формальный получается переходом к рядам). Пусть $N_{j_M} \circ \wedge^2 u_* = u_* \circ N_{j_L}$. Выберем комплексные параллелизации $T_x/L = \bigoplus_1^l \mathbb{C}$ и $T_y/M = \bigoplus_1^m \mathbb{C}$ такие, что отображение u_* вкладывает одну в другую. Образ $u(L)$ является j_M -инвариантным. Поэтому мы можем рассматривать случаи многообразий одинаковой размерности $2l = 2m$ и предполагать, что u – диффеоморфизм. Мы имеем в точке $y' \in u(L) \subset M$ тензор Ниемхейса $N_{j_M} = u_* \circ N_{j_L} \circ (u_*^{\wedge 2})^{-1}$ и две комплексные структуры j_M и $u_* \circ j_L \circ u_*^{-1}$ на $T_{y'}$, относительно которых N_{j_M} антилинеен. В силу предложения 2 $j_M u_* = \pm u_* j_L$ и так как почти комплексная структура j общего вида неизоморфна $-j$, теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Теорема неверна для почти комплексных структур не общего положения. Если j_L на $\mathcal{O}_L(x)$ и j_M на $\mathcal{O}_M(y)$ – структуры общего положения, то тензоры Ниемхейса почти комплексных структур $j_L \oplus j_M$ и $j_L \oplus (-j_M)$ на $\mathcal{O}_L(x) \times \mathcal{O}_M(y)$ совпадают, хотя сами структуры ни изоморфны и ни антиизоморфны.

§ 6. Два частных случая

6.1. Почти комплексные структуры в $\mathbb{R}^4$. Рассмотрим почти комплексную структуру j в $\mathbb{R}^4$ в окрестности нуля. Предположим, что $(N_j)_0 \neq 0$. В этом случае образ $\text{Im } N_j(\cdot, \cdot)$ двумерен и комплексно порожден вектором $N_j(\xi, \eta) \neq 0$ для любых комплексно независимых векторов ξ и η . Рассмотрим двумерное распределение $\Pi_x^2 = \text{Im}(N_j)_x \subset T_x = T_x \mathbb{R}^4$. Оно является инвариантом почти комплексной структуры, поэтому инварианты этого распределения приводят к инвариантам структуры (заметим, что любое регулярное 2-распределение на четырехмерном пространстве может быть реализовано как образ тензора Ниемхейса некоторой почти комплексной структуры). Важным инвариантом распределения является *инвариант Танаки* (см. [13], [14]) – набор градуированных алгебр Ли $\mathfrak{m}(x)$ для каждой точки x , присоединенных к фильтрованным алгебрам $\{D^p(x) \subset T_x\}_{p \geq 1}$, где модуль сечений $\mathcal{D}^{(p)}$ распределения D^p определяется как $(p-1)$ -я производная: $\mathcal{D}^{(p)} = \partial^{(p-1)} \mathcal{D}^{(1)} = \partial^{(p-2)} \mathcal{D}^{(1)} + [\mathcal{D}^{(1)}, \partial^{(p-2)} \mathcal{D}^{(1)}]$; здесь $[\cdot, \cdot]$ – коммутатор векторных полей, а $\partial^{(0)} \mathcal{D}^{(1)} = \mathcal{D}^{(1)}$ – сечения первоначального распределения D^1 ; умножение Ли индуцировано коммутатором векторных полей.

Предположим, что первая производная распределения Π_x^2 нетривиальна в точке 0, т.е. $(\partial^{(1)} \Pi^2)_0 \neq \Pi_0^2$. Тогда мы имеем трехмерное распределение $\Pi^3 = \partial^{(1)} \Pi^2$ в $\mathcal{O}(0)$. В пространстве $\Pi_x^3 \subset T_x$ существуют векторы $\xi_i = \xi_i(x) \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, такие, что $N_j(\xi_1, \xi_3) = \xi_1$, $N_j(\xi_2, \xi_3) = -\xi_2$. Обозначим одномерные подпространства, порожденные векторами ξ_1 и ξ_2 , через $\Upsilon_1 = \langle \xi_1 \rangle$ и $\Upsilon_2 = \langle \xi_2 \rangle$ соответственно, $\Pi_x^2 = (\Upsilon_1)_x \oplus (\Upsilon_2)_x$. Заметим, что если подпространство $(\Pi_x^3)^+ \subset \Pi_x^3 \setminus \Pi_x^2$, в котором лежит вектор ξ_3 , фиксировано, то этот вектор определен с точностью до Π_x^2 -сдвигов: $\xi_3 \mapsto \xi_3 + \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2$. При замене полупространства $\xi_3 \mapsto \tilde{\xi}_3 = -\xi_3$ векторы ξ_1 и ξ_2 (следовательно, и распределения Υ_1 и Υ_2) поменяются местами: $\tilde{\xi}_1 = \pm \xi_2$, $\tilde{\xi}_2 = \pm \xi_1$. Выбор полупространства

в $\Pi_x^3 \setminus \Pi_x^2$, т.е. ориентации в $\Theta_x^1 = \Pi_x^3/\Pi_x^2$, определяет порядок следования распределений Υ_1 и Υ_2 ; изменение этой ориентации меняет нумерацию. Другими словами, в двумерном пространстве $\Theta_x^1 \times P(\Pi_x^2)$ имеется каноническая ориентация. Назовем ее Θ -ориентацией. Заметим также, что в пространстве Π_x^3 выделена пара двумерных аффинных подпространств: $\{\pm\xi_3 + \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2\}$, т.е. на Θ_x^1 фиксирована метрика. Назовем ее Θ -метрикой.

Рассмотрим теперь для подпространства $\Pi_x^3 \subset T_x$ фактор $\Xi_x^1 = T_x^4/\Pi_x^3$. Существует вектор $\xi_4 \notin \Pi_x^3$ такой, что $N_j(\xi_1, \xi_4) = \xi_2$, $N_j(\xi_2, \xi_4) = -\xi_1$. В своем полупространстве $T_x^4 \setminus \Pi_x^3$ он определен с точностью до Π_x^2 -сдвигов: $\xi_4 \mapsto \xi_4 + \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$, поэтому на Ξ_x^1 имеется естественная метрика. Назовем ее Ξ -метрикой. При замене полупространства $\xi_4 \mapsto \tilde{\xi}_4 = -\xi_4$ в одном из подпространств Υ_1 или Υ_2 меняется ориентация: $\xi_1 \mapsto -\xi_1$ или $\xi_2 \mapsto -\xi_2$. Поэтому определена естественная ориентация пространства $\Upsilon_1^1 \times \Upsilon_2^1 \times \Xi^1$. Назовем ее Ξ -ориентацией.

Назовем $\Upsilon\Theta\Xi$ -инвариантом пару распределений Υ_1, Υ_2 , Θ - и Ξ -метрики и Θ - и Ξ -ориентации. Из рассуждений, приведенных выше, и теоремы 6 следует

ТЕОРЕМА 7. Пусть для почти комплексных структур j_1 на $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^4}(x)$ и j_2 на $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^4}(y)$ тензоры Ниенхейса не равны 0 и первая производная распределения Π^2 нетривиальна, $\partial^{(1)}\Pi^2 \neq \Pi^2$. Псевдоголоморфное или антипсевдоголоморфное отображение $u: (\mathcal{O}_{\mathbb{R}^4}(x), j_1) \rightarrow (\mathcal{O}_{\mathbb{R}^4}(y), j_2)$ существует тогда и только тогда, когда существует отображение $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^4}(x) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{R}^4}(y)$, переводящее один $\Upsilon\Theta\Xi$ -инвариант в другой.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В случае, если вторая производная распределения Π^2 не совпадает с первой, $\partial^{(2)}\Pi^2 \neq \partial^{(1)}\Pi^2 \neq \Pi^2$, т.е. $(\partial^{(2)}\Pi^2)_x = T_x^4$, инвариант Танаки имеет подлежащее пространство вида $\mathfrak{m}(x) \simeq \Pi_x^2 \oplus \Theta_x^1 \oplus \Xi_x^1$. При этом в силу градуированности умножение Ли задается 2-формой на Π_x^2 со значениями в Θ_x^1 и 1-формой на Π_x^2 со значениями в $\text{Hom}(\Theta_x^1, \Xi_x^1)$. В силу существования Θ - и Ξ -метрик, Θ - и Ξ -ориентаций и разложения $\Pi_x^2 = (\Upsilon_1)_x \oplus (\Upsilon_2)_x$ структура алгебры Ли на $\mathfrak{m}(x)$ задается элементами $\omega_x^2 \in (\Upsilon_1)_x^* \otimes (\Upsilon_2)_x^* = \text{Hom}(\Upsilon_1, \Upsilon_2)_x$ и $\omega_x^1 \in (\Upsilon_1)_x^* \oplus (\Upsilon_2)_x^*$. Таким образом, инвариант Танаки порождает еще два инварианта: ω^1 и ω^2 .

6.2. Лиевы почти комплексные структуры. Рассмотрим почти комплексную структуру j и ее тензор Ниенхейса N_j . Он определяет билинейное кососимметричное отображение $N_j: \mathcal{D} \otimes \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ на модуле $\mathcal{D}$ векторных полей. В общем случае, это отображение не является умножением Ли. Действительно, из тождества Якоби

$$N(\xi, N(\eta, j\zeta)) + N(\eta, N(j\zeta, \xi)) + N(j\zeta, N(\xi, \eta)) = 0$$

для элементов $\xi, \eta, j\zeta$ следует

$$jN(\xi, N(\eta, \zeta)) + jN(\eta, N(\zeta, \xi)) - jN(\zeta, N(\xi, \eta)) = 0,$$

что вместе с тождеством Якоби для ξ, η, ζ дает

$$N(\xi, N(\eta, \zeta)) \equiv 0. \quad (27)$$

Итак, $(\mathcal{D}, N(\cdot, \cdot))$ является алгеброй Ли тогда и только тогда, когда выполняется (27). Обозначим через $\Pi_x \subset T_x$ подпространство, порожденное $\text{Im } N(\cdot, \cdot)$. Положим $A_x = \{\xi \mid N(\xi, \cdot) \equiv 0\}$. Формула (27) равносильна включению (j -инвариантных) подрасслоений $\Pi \subset A \subset TX$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Назовем почти комплексную структуру j на X *лиевой*, если ее тензор Ниеенхейса N_j определяет структуру алгебры Ли на модуле $\mathcal{D}$. Назовем лиеву почти комплексную структуру *невыврожденной в точке x* , если $\Pi_x = A_x$ и для почти всякого вектора $\xi \in T_x$ из $N_j(\xi, \eta) = 0$ следует, что $\eta \in \mathbb{C}\xi \oplus \Pi_x$.

Из теоремы 6 следует, что тензор Ниеенхейса невыврожденной лиевой почти комплексной структуры определяет почти комплексную структуру на трансверсали к Π с точностью до знака и прибавления элемента из A . Отсюда в силу $\Pi = A$ следует определенность с точностью до знака почти комплексной структуры на A . Итак, если две невыврожденные лиевы почти комплексные структуры имеют одинаковые тензоры Ниеенхейса, то они могут отличаться только на сечение σ расслоения $\bigcup_x \text{Hom}(T_x/\Pi_x, \Pi_x)$, которое мы назовем *связывающим сечением*.

ТЕОРЕМА 8. *Лиева почти комплексная структура j задает разрешимую алгебру Ли $\mathcal{G} = (\mathcal{D}, N_j(\cdot, \cdot))$ с рангом разрешимости 2: $\mathcal{G}^{(2)} = 0$. Две невыврожденные лиевы почти комплексные структуры эквивалентны или антиэквивалентны (формально или гладко), если эквивалентны соответствующие алгебры Ли $(\mathcal{D}, N(\cdot, \cdot))$ и связывающее сечение $\sigma \in \text{Hom}(\mathcal{G}/\mathcal{G}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)})$ равно 0.*

Таким образом, теорема приводит к исследованию деформаций умножений Ли специального вида; заметим, что не все такие деформации встречаются (см. замечание 3).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Рассмотрим (под)алгебру Ниеенхейса $\mathcal{A}_j^{\mathcal{N}}$, порожденную комплексной структурой j при помощи алгебраического коммутатора

$$[A, B] = B \bar{\wedge} A - (-1)^{\deg A \deg B} A \bar{\wedge} B$$

и скобки Ниеенхейса $[\cdot, \cdot]$, в алгебре векторнозначных форм $\Omega^* \otimes \mathcal{D}$ на многообразии X (см. [12], [6], обозначения схожи с [8]). Здесь Ω^* – алгебра скалярнозначных дифференциальных форм, а $\mathcal{D}$ – модуль векторных полей. Заметим, что в случае лиевой почти комплексной структуры $\mathcal{A}_j^{\mathcal{N}} = \langle j, N_j, j \circ N_j \rangle$. Действительно, как показывают соотношения (2.9), (2.10), (2.16), (5.6), (5.8), (5.22), (5.23) в [12], с учетом тождества Якоби $N_j \bar{\wedge} N_j = 0$ для N_j имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} [j, j] &= 0, & [j, N_j] &= -3j \bar{\wedge} N_j = \frac{3}{2} N_j \bar{\wedge} j = -3j \circ N_j, & [j, j \circ N_j] &= 3N_j, \\ [N_j, N_j] &= 2N_j \bar{\wedge} N_j = 0, & [N_j, j \circ N_j] &= 0, & [j \circ N_j, j \circ N_j] &= 0, \\ [j, j] &= N_j, & [j, N_j] &= 0, & [j, j \circ N_j] &= -\frac{1}{2} N_j \bar{\wedge} N_j = 0, \\ [N_j, N_j] &= 0, & [N_j, j \circ N_j] &= 0, & [j \circ N_j, j \circ N_j] &= 0. \end{aligned}$$

Следующий пример показывает, что значения $(\mathcal{A}_j^{\mathcal{N}})_x$ в точке x недостаточно для формальной классификации почти комплексной структуры, т.е. $\mathcal{A}_j^{\mathcal{N}} \neq \mathcal{A}_j^{\infty}$ (см. начало § 2).

ПРИМЕР 6. Рассмотрим невыврожденную лиеву почти комплексную структуру, определенную формулами

$$\begin{aligned} j\partial_1 &= \partial_2, & j\partial_3 &= \partial_4 + f(x^5)\partial_1, & j\partial_5 &= \partial_6, \\ j\partial_2 &= -\partial_1, & j\partial_4 &= -\partial_3 - f(x^5)\partial_2, & j\partial_6 &= -\partial_5. \end{aligned}$$

Тензор Ниенхейса на базисных векторах определяется равенствами

$$N_j(\partial_1, \cdot) = N_j(\partial_2, \cdot) = N_j(\partial_3, \partial_4) = N_j(\partial_5, \partial_6) = 0, \\ N_j(\partial_3, \partial_5) = -N_j(\partial_4, \partial_6) = f'(x^5)\partial_2, \quad N_j(\partial_3, \partial_6) = N_j(\partial_4, \partial_5) = f'(x^5)\partial_1.$$

Видно, что структура j формально не классифицируется алгеброй $(\mathcal{A}_j^N)_x$. Действительно, при $f(x^5) = \varepsilon(x^5)^2$ имеется инвариант $(dN_j)_0$, а при $f(x^5) = x^5 + \varepsilon(x^5)^2$ алгебры $\mathcal{A}_j^N$ тоже недостаточно, чтобы различить структуры при различных ε , хотя тензоры Ниенхейса во всех точках из окрестности x сопряжены.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Рассмотрим тензор Ниенхейса лиевой почти комплексной структуры j на $\mathcal{O}(x)$. Существует возрастающая j -инвариантная фильтрация $\Theta_k \subset T_x$, где Θ_k порождено $\text{Im } d^k N(\cdot, \cdot, *)$. Точке x можно сопоставить следующий инвариант: присоединенную градуированную j -комплексную алгебру Ли относительно N -произведения $\oplus V_k$, $V_k = \Theta_k / \Theta_{k-1}$.

Автор благодарит профессора В. В. Лычагина за внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Nijenhuis A., Woolf W. B. Some integration problems in almost-complex and complex manifolds // *Ann. of Math.* (2). 1963. V. 77. P. 424–489.
- [2] Gromov M. Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds // *Invent. Math.* 1985. V. 82. P. 307–347.
- [3] McDuff D., Salamon D. *J-Holomorphic Curves and Quantum Cohomology*. Univ. Lecture Ser. V. 6. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1994.
- [4] Ньюландер А., Ниренберг Л. Комплексные аналитические координаты на почти комплексных многообразиях // *Математика*. 1959. Т. 3. №6. С. 131–144.
- [5] Kuranishi M. New proof for the existence of locally complete families of complex structures // *Proc. Conf. on Complex Analysis* (Minneapolis, 1964). Berlin: Springer, 1965. P. 142–154.
- [6] Алексеев Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии. Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундамент. направления. Т. 28. М.: ВИНТИ, 1988.
- [7] Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986.
- [8] Kumpera A., Spencer D. Lie Equations. V. 1: General Theory. *Ann. of Math. Stud.* V. 73. Princeton (N.J.): Princeton Univ. Press, Univ. of Tokyo Press, 1972.
- [9] Пале Р. Семинар по теореме Атьи–Зингера об индексе. М.: Мир, 1970.
- [10] Gauduchon P. The canonical almost complex structure on the manifold of 1-jets of pseudo-holomorphic mappings between two almost complex manifolds. Appendix to Ch. II // *Holomorphic Curves in Symplectic Geometry* / ed. M. Audin, J. Lafontaine. *Progr. Math.* V. 117. Boston (M.A.): Birkhäuser, 1994. P. 69–73.
- [11] Лихнерович А. Теория связностей в целом и группы голономий. М.: ИЛ, 1960.
- [12] Frölicher A., Nijenhuis A. Theory of vector-valued differential forms. I: Derivations in the graded ring of differential forms // *Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A.* 1956. V. 59. P. 338–359.
- [13] Tanaka N. On differential systems, graded Lie algebras and pseudo-groups // *J. Math. Kyoto Univ.* 1970. V. 10. P. 1–82.
- [14] Yamaguchi K. Differential systems associated with simple graded Lie algebras // *Progress in Differential Geometry*. Adv. Stud. Pure Math. V. 22. Tokyo: Kinokuniya, 1993. P. 413–494.