Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Г. Куракин, Критические случаи устойчивости. Обращение теоремы о неявной функции для динамических систем с косимметрией, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 4, 572–578

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1317>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 16:19:41

УДК 517.938

КРИТИЧЕСКИЕ СЛУЧАИ УСТОЙЧИВОСТИ. ОБРАЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КОСИММЕТРИЕЙ

Л. Г. Куракин

В работе получены критерии устойчивости граничных равновесий для трех критических случаев: $(n, k) = (3, 0), (2, 1), (1, 1)$.

Библиография: 16 названий.

Понятие косимметрии векторного поля в гильбертовом пространстве или на римановом многообразии введено в работе [1] – векторное поле, ортогональное в каждой точке данному. Более общее определение [2]: косимметрия – дифференциальная 1-форма, аннулирующая данное векторное поле в каждой точке.

Векторные поля, далее, рассматриваются на конечномерном многообразии, а все рассуждения носят локальный характер. Поэтому ограничимся рассмотрением векторных полей на $\mathbb{R}^n$, используя обычные для линейного пространства отождествления точек с векторами, векторных полей с отображениями и т.д.

Непрерывное однопараметрическое семейство равновесий является обычным объектом для векторных полей с нетривиальной косимметрией [1], [3]–[5]. Спектр устойчивости равновесия меняется вдоль такого семейства [3], но всегда содержит точку нуль. Справедлив принцип линеаризации [6]: равновесие упомянутого семейства устойчиво, если весь его спектр устойчивости, кроме простого нулевого собственного значения, лежит строго в левой полуплоскости (следует из общих результатов А. М. Ляпунова для критического случая устойчивости при простом нулевом корне), и неустойчиво, если этот спектр содержит точку из правой полуплоскости.

Устойчивость равновесия, здесь и далее, понимается как нейтральная устойчивость вдоль семейства равновесий и, одновременно, асимптотическая устойчивость в трансверсальных к нему направлениях.

Семейство равновесий в условиях общего положения разбивается на устойчивые и неустойчивые по линейному приближению дуги. Разделяющие их равновесия будем называть *граничными*. Соседними могут оказаться не только устойчивая дуга с неустойчивой, но и две устойчивые или две неустойчивые дуги. Спектр устойчивости граничного равновесия расположен в замыкании левой полуплоскости, и его нейтральная часть,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01791, и Международного научного фонда, грант NRQ000.

лежащая на мнимой оси, отлична от простого нулевого собственного значения. В задаче устойчивости такого равновесия имеет место критический случай, т.е. линейного приближения недостаточно для ее решения.

В данной работе приведены критерии устойчивости граничного равновесия во всех критических случаях коразмерности 0 и 1 (см. замечание 1), кроме следующих двух случаев нейтрального спектра устойчивости:

- 1) двукратное нулевое собственное значение с индексом 2;
- 2) простые нуль и две пары чисто мнимых собственных значений.

Первый случай нет необходимости рассматривать, поскольку он полностью исследован Ляпуновым [7]. Что касается второго, то он непросто, но достаточно полное решение задачи устойчивости для него можно извлечь из результатов работы [8].

Наличие косимметрии определяет специфику рассматриваемых вырождений. В определенном смысле верно и обратное. Пусть динамическая система допускает гладкое однопараметрическое семейство равновесий. Тогда по крайней мере локально вблизи каждого невырожденного равновесия, входящего в состав семейства, можно определить нетривиальную косимметрию такую, что равновесия семейства оказываются некосимметричными, т.е. не являются равновесиями самой косимметрии.

1. Обращение теоремы о неявной функции для косимметрических систем. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{u} = F(u). \quad (1)$$

Векторное поле $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ является аналитическим в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, имеет равновесие $u_0 \in \Omega$ и допускает непрерывную косимметрию $L: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Последнее означает [1], [3], что в каждой точке $u \in \Omega$ векторы $F(u)$ и $L(u)$ ортогональны: $(F(u), L(u)) = 0$.

Считаем выполненными следующие предположения:

- i) равновесие u_0 некосимметрично: $L(u_0) \neq 0$;
- ii) размерность $\dim \ker A_0 = 1$, где оператор $A_0 = F'(u_0)$.

Тем самым, выполнены условия теоремы о неявной функции для косимметрических уравнений [1], [3]–[5], из которой следует, что уравнение (1) имеет однопараметрическое семейство S_1 некосимметричных равновесий, включающее в себя равновесие u_0 и задаваемое аналитическим отображением $T_1: J_1 \rightarrow \Omega$, так что $S_1 = T_1(J_1)$. Здесь $J_1 = \ker A_0 \cap \Omega_1$, где $\Omega_1 \subset \Omega$ – некоторая окрестность точки u_0 . В окрестности Ω_1 нет равновесий, не принадлежащих указанному семейству.

Возникает вопрос о существовании нетривиальной косимметрии у динамической системы, обладающей непрерывным однопараметрическим семейством равновесий. Мы же ограничимся тем результатом, который необходим в дальнейшем.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ автономное дифференциальное уравнение с нулевым равновесием

$$\dot{u} = Q(u), \quad Q(0) = 0. \quad (2)$$

Векторное поле $Q: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ является аналитическим в некоторой окрестности нуля $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$.

Следующую теорему можно рассматривать как обращение теоремы о неявной функции для косимметрических уравнений. Пусть X_1 – ортогональное дополнение к X_0 ,

$J = X_0 \cap \mathfrak{D}$, J' – некоторый, меньший J , отрезок прямой X_0 , содержащий нуль строго внутри себя.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) точка $\lambda_0 = 0$ принадлежит спектру $\sigma(A)$ оператора $A = Q'(0)$, причем этому собственному значению отвечает одна жорданова клетка, т.е. $\dim X_0 = 1$, где $X_0 = \ker A$;
- 2) векторное поле Q имеет однопараметрическое семейство S равновесий, параметризуемое отображением

$$V: J' \rightarrow \mathfrak{D}, \quad V: u \mapsto u + T(u),$$

где $T: J' \rightarrow X_1$ – аналитическое отображение, которое обращается в 0 в точке $u = 0$ вместе со своей производной: $T(0) = T'(0) = 0$.

Тогда в некоторой окрестности нуля $\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}$ можно задать аналитическую косимметрию $\mathfrak{L}$ уравнения (2) такую, что равновесия семейства S некосимметричны: $\mathfrak{L}(u_*) \neq 0$ в каждой точке $u_* \in S \cap \mathfrak{D}_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P_0 – ортогональный проектор на подпространство X_0 . Ему соответствует дополнительный проектор $P_1 = I - P_0$ на подпространство $X_1 = \text{im } P_1$.

Замена переменных

$$v = \Phi(u) = u - T(P_0(u)) \quad (3)$$

выпрямляет множество S . Это означает, что семейство равновесий преобразованного уравнения (2)

$$\dot{v} = G(v), \quad G(0) = 0 \quad (4)$$

целиком заполняет окрестность нуля прямой $P_1 v = 0$, т.е. равенство $G(P_0 v) = 0$ выполняется для каждой точки $v \in \mathfrak{D}$. Следовательно, векторное поле G представимо в виде $G: v \mapsto G(v) = K(v)P_1 v$, где $K(v)$ – (определяемая неоднозначно) линейная оператор-функция, гладко зависящая от вектора v , причем $K(0) = G'(0) = A$.

Поля Q и G связаны соотношением $Q = [\Phi']^{-1} G \Phi$. Для доказательства теоремы 1 достаточно найти нетривиальную косимметрию L уравнения (4), поскольку поле $\mathfrak{L} = [\Phi'^*]^{-1} L \Phi$ будет косимметрией поля Q , и $\mathfrak{L}(0) \neq 0$, если $L(0) \neq 0$.

Из тождества $(G(v), L(v)) = (P_1 v, K^*(v)L(v))$, в котором звездочка соответствует сопряженному оператору, следует, что всякий оператор L , удовлетворяющий равенству

$$K^*(v)L(v) = 0, \quad (5)$$

есть косимметрия оператора G .

Имеют место разложения $K^*(v) = K_0^*(v) + K_1^*(v)$, $L(v) = L_0(v) + L_1(v)$, где оператор-функции $K_i(v)$ и операторы L_i определяются следующим образом: $K_i(v) = P_i K(v)$, $L_i = P_i L$ ($i = 0, 1$). Справедливы тождества $K_0^*(v)L_1(v) = K^*(v)P_0^*P_1L(v) = 0$ (учли, что $P_0^* = P_0$), $K_1^*(v)L_0(v) = 0$. Это позволяет записать уравнение (5) в виде

$$K_0^*(v)L_0(v) + K_1^*(v)L_1(v) = 0. \quad (6)$$

Нетривиальной косимметрией уравнения (4) является, например, векторное поле $L: v \mapsto L(v) = e_0 + L_1(v)$, где $e_0 \in X_0$ – произвольный фиксированный ненулевой вектор, а отображение L_1 определяется из уравнения (6):

$$L_1: v \mapsto L_1(v) = -[K_1^*(v)]^{-1} K_0^*(v) e_0.$$

Так как оператор $K_1^*(0) = P_1 A^*$ обратим, оператор $[K_1^*(v)]^{-1}$ существует и аналитичен для всех v из некоторой окрестности нуля $\mathfrak{D}_2 \subset \mathfrak{D}$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть уравнение (1) с аналитической правой частью F обладает всеми указанными выше свойствами: допускает непрерывную косимметрию L , имеет равновесие u_0 . Пусть выполнены предположения i) и ii). Тогда в некоторой окрестности точки u_0 определена и аналитическая нетривиальная косимметрия $\mathfrak{L}$ этого уравнения, причем $\mathfrak{L}(u_0) \neq 0$.

2. Критические случаи устойчивости. Будем рассматривать только те вырождения задачи устойчивости равновесия u_0 косимметрического уравнения (1), при которых не нарушаются условия i) и ii) теоремы о неявной функции для динамических систем с косимметрией, что гарантирует существование семейства S_1 равновесий. Теорема 1 позволяет в разобранных далее критических случаях устойчивости косимметрическое уравнение (1) рассматривать просто как уравнение, имеющее семейство равновесий, не накладывая каких-либо дополнительных ограничений (т.е. как уравнение (2) в условиях 1) и 2) теоремы 1). Считая, что семейство S равновесий локально расположено на прямой, чего всегда можно добиться заменой (3), приходим к задаче устойчивости нулевого равновесия уравнения (4).

Предположим, что весь спектр $\sigma(A)$ лежит на мнимой оси. Согласно принципу сведения [9], к такому случаю редуцируется и общая задача устойчивости равновесия, когда спектр $\sigma(A)$ лежит в замыкании левой полуплоскости (это выполнено для граничных равновесий).

Рассмотрим три различных случая нейтрального спектра устойчивости.

1. *Трехкратное нулевое собственное значение:* $\sigma(A) = \{0\}$. Уравнение (4) трехмерно, в жордановом базисе матрицы A имеет следующую координатную форму записи:

$$\dot{x}_1 = x_2 + g_1(x), \quad \dot{x}_2 = x_3 + g_2(x), \quad \dot{x}_3 = g_3(x). \quad (7)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $g_i: \mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}$ – аналитические функции ($i = 1, 2, 3$), разложения которых в ряд Тейлора начинаются со слагаемых не ниже второй степени, причем $g_i(x_1, 0, 0) = 0$ ($i = 1, 2, 3$) для всех векторов $(x_1, 0, 0) \in \mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^3$.

ТЕОРЕМА 2. Нулевое равновесие системы (7) неустойчиво, если величина $a \neq 0$, где $a = \frac{\partial^2 g_3}{\partial x_1 \partial x_2}(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Квазиоднородная система

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = ax_1x_2$$

имеет растущие решения вида *инвариантный луч* [10]:

$$x_1 = kr^2, \quad x_2 = 2kr^3, \quad x_3 = 6kr^4, \quad \dot{r} = r^2, \quad k = 12/a. \quad (8)$$

Далее проходят стандартные рассуждения [10]. Введем обобщенные сферические координаты

$$x_1 = kR^2, \quad x_2 = 2kR^3(1 + \theta_1), \quad x_3 = 6kR^4(1 + \theta_2),$$

где $R \geq 0$, $\theta_i \in \mathbb{R}$ ($i = 0, 1$). Когда переменная $R \rightarrow 0$, а $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ меняется внутри некоторой окрестности нуля $W \subset \mathbb{R}^2$, система (7) имеет в этих координатах следующую асимптотику:

$$\dot{R} = R^2(1 + \theta_1) + o(R^2), \quad \dot{\theta} = Rf(\theta) + o(R).$$

Здесь $f = (f_1, f_2)$ – вектор-функция:

$$f_1(\theta) = -3(1 + \theta_1)^2 + 3(1 + \theta_2), \quad f_2(\theta) = -4(1 + \theta_1)\theta_2.$$

Рассмотрим двумерную систему $\dot{\theta} = f(\theta)$. Ее равновесие $\theta = 0$, отвечающее растущему лучу (8), асимптотически устойчиво в линейном приближении. Достаточное условие неустойчивости нулевого равновесия системы (7) выполнено (см. [10, с. 86]).

2. *Двукратное нулевое и простая пара чисто мнимых собственных значений*: $\sigma(A) = \{0, \pm i\omega\}$, $\omega > 0$. Перейдем к комплексной координатной форме записи уравнения (4) в жордановом базисе матрицы A , раскладывая правую часть G в ряд Тейлора. Затем надлежащей заменой переменных удалим нерезонансные квадратичные слагаемые [11]. Получим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + ax_1x_2 + a_1x_2^2 + a_2|z|^2 + q_1(y), & \dot{x}_2 &= bx_1x_2 + b_1x_2^2 + b_2|z|^2 + q_2(y), \\ \dot{z} &= i\omega z + C_1x_1z + C_2x_2z + q_3(y). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $y = (x_1, x_2, z, \bar{z})$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$; аналитические функции $q_i: W \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$), $q_3: W \rightarrow \mathbb{C}$ определены в некоторой окрестности нуля $W \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2$, отвечающей области $\mathfrak{D}$, причем $|q_j(y)| = o(\|y\|^2)$ при $\|y\| \rightarrow 0$ ($j = 1, 2, 3$). Коэффициенты a, b, a_i, b_i вещественны, а C_i комплексны ($i = 1, 2$).

ТЕОРЕМА 3. *Нулевое равновесие системы (9) неустойчиво, если коэффициент $b \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем новые координаты $R, \theta_1, \theta_2, \varphi \in \mathbb{R}$, полагая

$$x_1 = lR, \quad x_2 = lR^2(1 + \theta_1), \quad z = R^2\theta_2 \exp(i\varphi), \quad l = 2/b, \quad R, \theta_2 > 0.$$

Переписанная в этих координатах система (9) имеет следующее асимптотическое представление:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R^2h(\theta) + o(R^2), & \dot{\theta} &= R\psi(\theta) + o(R), & \dot{\varphi} &= \Phi(R, \theta, \varphi), \\ h &= 1 + \theta_1, & \psi &= (\psi_1, \psi_2), & \psi_1 &= -2h\theta_1, & \psi_2 &= (-2h + l \operatorname{Re} C_1)\theta_2, \end{aligned}$$

когда $R \rightarrow 0$, а переменная $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ принадлежит области $W_\delta = \{\theta \in \mathbb{R}^2 : |\theta_1| < \delta, 0 < \theta_2 < \delta\}$, $\delta > 0$. Явный вид известной функции Φ не имеет значения для дальнейших рассуждений.

Обратимся теперь к системе $\dot{\theta} = \psi(\theta)$. Она имеет равновесие $\theta_0 = 0$ такое, что выполнено неравенство $h(\theta_0) > 0$. Матрица $\Gamma = \psi'(0)$ имеет собственные значения $\lambda_1 = -2$,

$\lambda_2 = l \operatorname{Re} C_1 - 2$. Нулевое равновесие системы (9) неустойчиво при любом значении $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Это следует из общей теоремы о неустойчивости (см. [10, с. 86]), если равновесие θ_0 асимптотически устойчиво в линейном приближении ($\lambda_2 < 0$). В случае $\lambda_2 \geq 0$ соответствующие функции Четаева построены в работе [12, с. 18] при изучении проблемы в общей форме.

3. *Простые нуль и пара чисто мнимых собственных значений:* $\sigma(A) = \{0, \pm i\omega\}$, $\omega > 0$. Трехмерное уравнение (4), нормализованное до слагаемых четвертого порядка включительно [11], имеет следующую асимптотику при $|(x, z, \bar{z})| \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= b_0|z|^2 + b_1x|z|^2 + b_2x^2|z|^2 + b_3|z|^4 + o(x^3|z| + |z|^4), \\ \dot{z} &= i\omega z + D_1xz + D_2x^2z + D_0z|z|^2 + o(x^2|z| + |z|^3).\end{aligned}\tag{10}$$

Здесь x – вещественная, а z – комплексная переменные; коэффициенты b_l ($l = 0, 1, 2, 3$) вещественны, а $D_j = d_j + i\delta_j$ комплексны, $d_j, \delta_j \in \mathbb{R}$ ($j = 0, 1, 2$).

Будем говорить, что нулевое равновесие системы (10) *z-устойчиво*, если оно устойчиво по Ляпунову [6] и, одновременно, асимптотически устойчиво по отношению к переменной z [7], [13].

ТЕОРЕМА 4. *Справедливы следующие утверждения об устойчивости нулевого равновесия системы (10):*

- 1) *равновесие z-устойчиво, если $b_0d_1 < 0$, и неустойчиво, если $b_0d_1 > 0$;*
- 2) *в вырожденном случае $d_1 = 0$, $b_0 \neq 0$ равновесие z-устойчиво, если $d_2 < 0$, и неустойчиво, если $d_2 > 0$;*
- 3) *в вырожденном случае $b_0 = 0$, $d_1 \neq 0$ равновесие z-устойчиво при выполнении любого из следующих условий:*

а) $k_1 < 0$, $k_2 < 0$,

б) $k_1 > 0$, $k_3 < 0$,

и неустойчиво, если $k_2 > 0$ или справедливы неравенства $k_1 > 0$, $k_3 \geq 0$.

Здесь $k_1 = 2d_0 + b_1$, $k_2 = 2b_3d_1 - 2d_0b_1$, $k_3 = k_1^2 + 4k_2$.

Для доказательства *z-устойчивости* нулевого равновесия системы (10) в каждом случае строится определенно-положительная функция, производная которой в силу этой системы является определенно-отрицательной по отношению к переменной z [13]. За единственным исключением, ее удается построить в форме полинома. Труднее оказался случай 3б), в котором строится трансцендентная функция Ляпунова и доказывается, что полиномиальных не существует. Подробнее это будет изложено в другой работе.

Для обоснования условий неустойчивости достаточно проверить выполнение общих достаточных условий неустойчивости, полученных в работах [14], [15].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Случай 1) теоремы 4 ($b_0d_1 \neq 0$) встречается как случай общего положения в уравнениях с косимметрией. Случаи вырождения задачи устойчивости граничного равновесия, рассмотренные в теоремах 2–4, имеют коразмерность 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Неустойчивость нулевого равновесия системы (10) в случае $b_0d_1 > 0$ следует из результатов работы [16].

Автор благодарит В. И. Юдовича за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Юдович В. И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Матем. заметки. 1991. Т. 49. № 5. С. 142–148.
- [2] Юдович В. И. Косимметрия и дифференциальные уравнения второго порядка // Деп. ВИНТИ № 1008–В93. М.: ВИНТИ, 1993.
- [3] Yudovich V. I. Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // Chaos. 1995. V. 2. № 5. P. 402–411.
- [4] Юдович В. И. Теорема о неявной функции для косимметрических уравнений // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 2. С. 313–317.
- [5] Yudovich V. I. The cosymmetric version of the implicit function theorem // Seminar “Linear Topological Spaces and Complex Analysis”. II / ed. A. Aytuna. Ankara: Middle East Technical Univ., 1995. P. 105–125.
- [6] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950.
- [7] Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Собр. сочинений. Т. 2. М.: АН СССР, 1956. С. 272–331.
- [8] Хазин Л. Г. Условия устойчивости равновесия при двух парах чисто мнимых и одном нулевом корне. Препринт № 50. М.: ИПМ АН СССР, 1986.
- [9] Плисс В. А. Принцип сведения в теории устойчивости движения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. № 6. С. 1297–1324.
- [10] Хазин Л. Г., Шноль Э. Э. Устойчивость критических положений равновесия. Пушино: ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1985.
- [11] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [12] Шноль Э. Э., Хазин Л. Г. Об устойчивости стационарных решений общих систем дифференциальных уравнений вблизи критических случаев. Препринт № 91. М.: ИПМ АН СССР, 1979.
- [13] Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1957. № 4. С. 9–16.
- [14] Каменков Г. В. Избранные труды. Т. 2. Устойчивость и колебания нелинейных систем. М.: Наука, 1972.
- [15] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
- [16] Хазин Л. Г. Об устойчивости положений равновесия в некоторых критических случаях. Препринт № 10. М.: ИПМ АН СССР, 1979.