Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Лычагина, Вырожденные пуассоновы структуры
в размерности 3, *Матем. заметки*, 1998, том 63, вы-
пуск 4, 579–592

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1318>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 02:43:56

УДК 514.763.85

ВЫРОЖДЕННЫЕ ПУАССОНОВЫ СТРУКТУРЫ В РАЗМЕРНОСТИ 3

О. В. Лычагина

В работе приведены формальные нормальные формы вырожденных пуассоновых структур в размерности 3. Исследование пуассоновых структур проведено с использованием спектральной последовательности на основе метода, введенного ранее. Этот метод, в частности, позволяет другим способом получить известные результаты о линейаризации пуассоновых структур с полупростой линейной частью. Однако, в размерности 3 имеются и нелинеаризуемые пуассоновы структуры.

Библиография: 9 названий.

Теорема о “расщеплении” Вейнштейна [1] сводит локальное изучение пуассоновых структур к изучению структур, обращающихся в 0 в фиксированной точке.

Проблема классификации таких структур изучалась многими математиками. В частности, Вейнштейн доказал формальную линейаризуемость вырожденной пуассоновой структуры с линейной частью, задающей полупростую алгебру Ли [1]. Кон доказал тот же результат в гладкой категории при дополнительном условии компактности типа для алгебры Ли [2]. Дюфур изучал гладкую линейаризуемость вырожденной пуассоновой структуры в трехмерном случае [3].

В работах [4], [5] найдены формальные нормальные формы вырожденных пуассоновых структур для случая произвольной размерности, описание которых приводится в терминах спектральной последовательности, сходящейся к формальным пуассоновым когомологиям. Более того, показано, что препятствия к линейаризации такой пуассоновой структуры лежат в группе вторых когомологий алгебры Ли $\mathcal{G}$, определяемой линейной частью вырожденной пуассоновой структуры.

В этой работе мы рассматриваем вырожденные пуассоновы структуры в размерности 3 с нетривиальной линейной частью и вычисляем соответствующие члены спектральной последовательности. Это дает описание (формальных) нормальных форм вырожденных пуассоновых структур на трехмерных многообразиях.

§ 1. Введение

Кратко напомним основные результаты, изложенные в работах [4], [5].

Пусть ∇ – пуассонова структура на гладком многообразии M^n , обращающаяся в 0 в точке $t \in M^n$, $\nabla_t = 0$.

Рассмотрим комплекс для пуассоновых когомологий, определяемый ∇ :

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_0 = A \xrightarrow{\partial_\nabla} \mathcal{D}_1 \xrightarrow{\partial_\nabla} \cdots \xrightarrow{\partial_\nabla} \mathcal{D}_i \xrightarrow{\partial_\nabla} \mathcal{D}_{i+1} \xrightarrow{\partial_\nabla} \cdots \xrightarrow{\partial_\nabla} \mathcal{D}_n \longrightarrow 0. \quad (1)$$

Здесь $\partial_\nabla(X) := (-1)^i [X, \nabla]$ для $X \in \mathcal{D}_i$, $[\cdot, \cdot]$ – скобка Схоутена на алгебре поливекторных полей $\mathcal{D}_* = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{D}_i$, где $\mathcal{D}_i$ – модули i -векторных полей на M^n .

Обозначим через $\mu \subset A$ максимальный идеал, отвечающий точке m : $\mu = \{f \in C^\infty(M^n) \mid f(m) = 0\}$, а через μ^k , $k \geq 1$, идеал функций порядка малости k в точке m . Соответственно через $\mu^k \mathcal{D}_i$ обозначим подмодуль i -векторных полей $\mathcal{D}_i$, имеющих в точке m порядок малости k .

Через $[\sigma]_{p+1}$ обозначим $(p+1)$ -джет в точке m бивекторного поля $\sigma \in \mu^{p+1} \mathcal{D}_2$, т.е. класс $\sigma \bmod \mu^{p+2} \mathcal{D}_2$. Тогда линейная часть $[\nabla]_1$ определяет структуру алгебры Ли на кокасательном пространстве $T_m^* M^n$. Обозначим эту алгебру через $\mathcal{G}$.

Введем фильтрацию в комплекс (1), полагая $F_{p,q} = \mu^p \mathcal{D}_{p+q}$. Из условия $\nabla \in \mu \mathcal{D}_2$ следует, что $\partial_\nabla(\mu^p \mathcal{D}_j) \subset \mu^p \mathcal{D}_{j+1}$. Тем самым, дифференциал ∂_∇ сохраняет фильтрацию:

$$\partial_\nabla(F_{p,q}) \subset F_{p,q+1}.$$

Фильтрация $F_{p,q}$ определяет спектральную последовательность $(E_r^{p,q}, d_r)$, в которой

- 1) $E_0^{p,q} = S^p T_m^* \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda^{p+q} T_m$;
- 2) $E_1^{p,q} = H^{p+q}(\mathcal{G}, S^p \mathcal{G})$;
- 3) для каждой пары чисел (p, q) найдется число $r_0 = r_0(p, q)$ такое, что

$$E_{r_0}^{p,q} = E_{r_0+1}^{p,q} = \dots = E_\infty^{p,q},$$

где $d_r = 0$, $r \geq r_0$ (т.е. спектральная последовательность стабилизируется).

Члены приведенной спектральной последовательности описывают нормальную форму p -го приближения следующим образом.

ТЕОРЕМА А [5]. Пусть бивекторные поля $v_1, \dots, v_r$, $v_i \in \mu^p \mathcal{D}_2$, $p \geq 2$, таковы, что их образы порождают $E_{p-s+1}^{p,2-p}$, где $2 \leq s \leq p+1$.

Тогда для каждой пуассоновой структуры вида $\nabla + \varepsilon$, где $\varepsilon \in \mu^p \mathcal{D}_2$, $p \geq 2$, существует локальный диффеоморфизм φ такой, что $\varphi^* = \text{id} \bmod \mu^p$ и

$$\varphi_*^{(2)} \left(\nabla - \sum_{i=1}^r c_i v_i \right) = (\nabla + \varepsilon) \bmod F_{p+1,1-p},$$

где $c_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq r$.

Введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Класс когомологий $h \in H^2(\mathcal{G}, S^{p+1} \mathcal{G})$ назовем *допустимым относительно ∇'* , если существует бивекторное поле $\sigma \in \mu^{p+1} \mathcal{D}_2$ такое, что класс когомологий $[\sigma]_{p+1}$ совпадает с h , а $\nabla' + \sigma$ является (формальной) пуассоновой структурой.

Фиксируем пуассонову структуру ∇ и определим по ней дерево пуассоновых структур следующим образом.

Вершина – линейная пуассонова структура $\nabla^1 = [\nabla]_1$.

Уровень 1 – пуассоновы структуры вида $\nabla^1 + \sigma_2$, где $\sigma_2 \in \mu^2 \mathcal{D}_2$, а класс $[\sigma_2]_2$ в $H^2(\mathcal{G}, S^2 \mathcal{G})$ пробегает все ∇^1 -допустимые структуры. Для каждого ∇^1 -допустимого класса $\lambda_1 \in H^2(\mathcal{G}, S^2 \mathcal{G})$ зафиксируем одну из таких структур и обозначим ее через $\nabla_{\lambda_1}^2$.

Уровень 2 – пуассоновы структуры вида $\nabla_{\lambda_1}^2 + \sigma_3$, где $\sigma_3 \in \mu^3 \mathcal{D}_2$ – представитель $\nabla_{\lambda_1}^2$ -допустимых классов когомологий λ_2 в $E_{4-s(3)}^{3,-1}$. Здесь $E_{4-s(3)}^{3,-1}$ – член спектральной последовательности, построенной по пуассоновой структуре $\nabla_{\lambda_1}^2$. Обозначим эти структуры через $\nabla_{\lambda_1, \lambda_2}^3$.

Уровень p – пуассоновы структуры вида $\nabla_{\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}}^p + \sigma_{p+1}$, где $\sigma_{p+1} \in \mu^{p+1} \mathcal{D}_2$ – представитель $\nabla_{\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}}^p$ -допустимых классов когомологий λ_p в $E_{p-s(p+1)+2}^{p+1,1-p}$. Здесь

$E_{p-s(p+1)+2}^{p+1,1-p}$ – член спектральной последовательности, построенной по пуассоновой структуре $\nabla_{\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}}^p$. Обозначим эти структуры через $\nabla_{\lambda_1, \dots, \lambda_p}^{p+1}$.

Введем понятие ветви дерева (формальных) пуассоновых структур. Рассмотрим возникающие в дереве последовательности пуассоновых структур вида

$$\nabla^1, \nabla_{\lambda_1}^2, \nabla_{\lambda_1, \lambda_2}^3, \dots, \nabla_{\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}}^p, \dots$$

Каждую такую последовательность назовем *ветвью* дерева. Для каждой ветви существует (формальная) пуассонова структура $\tilde{\nabla}$, p -эквивалентная p -й точке ветвления ветви $((p-1)$ -му уровню ветви) – пуассоновой структуре $\nabla_{\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}}^p$.

Фиксируем структуру такого вида и обозначим ее через $\nabla_{\{\lambda_i\}_1^\infty}$. Будем отождествлять ветви и задающие их пуассоновы структуры.

В терминах построенного дерева пуассоновых структур мы получаем следующую теорему, описывающую нормальные формы вырожденных пуассоновых структур.

ТЕОРЕМА Б [5]. 1) *Любая пуассонова структура вида $\nabla + \varepsilon$, где $\varepsilon \in \mu^2 \mathcal{D}_2$, формально эквивалентна одной из ветвей приведенного дерева, т.е. существует диффеоморфизм φ такой, что $\varphi_*^{(2)}(\nabla + \varepsilon) = \nabla_{\{\lambda_i\}_1^\infty} \bmod \mu^\infty \mathcal{D}_2$ для некоторой последовательности $\{\lambda_i\}_1^\infty$, $\varphi^* = \text{id} \bmod \mu^2$. В частности, $\nabla + \varepsilon$ эквивалентна $\bmod \mu^{p+1} \mathcal{D}_2$ пуассоновой структуре $\nabla_{\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}}^p$ из $(p-1)$ -го уровня дерева.*

2) *Две пуассоновы структуры, формально эквивалентные одной ветви дерева, формально эквивалентны.*

Поскольку $E_1^{p,2-p} = H^2(\mathcal{G}, S^p \mathcal{G})$, мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Достаточным условием линейаризации вырожденной пуассоновой структуры является равенство $H^2(\mathcal{G}, S^p \mathcal{G}) = 0$.*

Это дает линейаризуемость вырожденных пуассоновых структур с полупростой алгеброй $\mathcal{G}$ [1], а также линейаризуемость редуктивных алгебр Ли $\mathcal{G}$ с одномерным центром. Так, например, пуассоновы структуры линейаризуемы в случаях, когда алгебра Ли $\mathcal{G}$ совпадает с $\mathfrak{gl}(n)$, $\mathfrak{osp}(n)$, $\mathfrak{so}(n)$ (см. [4], [5]).

Здесь мы не рассматриваем случаи полупростых алгебр Ли $\mathcal{G}$ и абелевых алгебр $\mathcal{G}$ ($[\nabla]_1 = 0$). В первом случае пуассоновы структуры формально линейаризуемы [1], во втором – поиск нормальных форм требует развития методов вычисления когомологий алгебр Ли–Склянина [4]–[6].

Рассмотрим случай трехмерных пуассоновых многообразий. Трехмерные алгебры Ли $\mathcal{G}$, отличные от абелевых и полупростых, согласно классификации Бьянки [7] имеют следующий вид.

Обозначим коммутант алгебры $\mathcal{G}$ через $\mathcal{H}$. Возможны следующие три случая:

- А) $\dim \mathcal{H} = 1$, существует базис x, y, z в $\mathcal{G}$ такой, что $[x, y] = x$, $[z, x] = 0$, $[z, y] = 0$;
- В) $\dim \mathcal{H} = 1$, существует базис x, y, z в $\mathcal{G}$ такой, что $[x, y] = z$, $[z, x] = 0$, $[z, y] = 0$;
- С) $\dim \mathcal{H} = 2$, существует базис x, y, z в $\mathcal{G}$ такой, что $[x, y] = 0$, $[z, x] = a_{11}x + a_{12}y$, $[z, y] = a_{21}x + a_{22}y$, где матрица (a_{ij}) невырождена.

Наша классификация (теоремы 1–4) вырожденных пуассоновых структур в размерности 3 излагается в соответствии с приведенной классификацией Бьянки.

§ 2. Когомологии алгебр Ли

с коэффициентами в симметрической степени

В этом параграфе мы приводим важнейший метод для вычисления первого члена

спектральной последовательности $E_1^{p,q}$. В нашем случае $E_1^{p,q} = H^{p+q}(\mathcal{G}, A)$, где $A = S^*\mathcal{G} = \sum_{i \geq 0} S^i\mathcal{G}$.

Рассмотрим комплекс

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{d_1} A \otimes \mathcal{G}^* \xrightarrow{d_2} A \otimes \Lambda^2 \mathcal{G}^* \longrightarrow \dots$$

с дифференциалом d_k , действующим по формуле $d_k(a \otimes \omega) = da \wedge \omega + a \otimes d_k \omega$, где $d_k \omega$ – дифференциал для когомологий алгебр Ли с тривиальными коэффициентами, а $da(x) = \hat{x}(a)$ – действие элемента $x \in \mathcal{G}$ на алгебре A .

Мы будем использовать координатную запись. Пусть $x_1, \dots, x_n$ – базис в $\mathcal{G}$, $[x_i, x_j] = c_{ij}^k x_k$. Элемент $a \in S^*\mathcal{G}$, представимый в виде $a = a_{\sigma_1 \dots \sigma_n} x_1^{\sigma_1} \circ \dots \circ x_n^{\sigma_n}$, где “ $\circ$ ” – симметрическое произведение, будем отождествлять с полиномом $a = a_{\sigma_1 \dots \sigma_n} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}$, где “ $\cdot$ ” – произведение в полиномах, тем самым, рассматривая $S^*\mathcal{G}$ как алгебру однородных полиномов на $\mathcal{G}^*$.

Каждый элемент $v \in \mathcal{G}$ действует присоединенным образом на $S^*\mathcal{G}$. А именно, v определяет линейное векторное поле $\hat{v}$ на $\mathcal{G}^*$, где $\hat{v} = \sum_i v_i(x) \partial_{x_i}$, а $v_i = \hat{v}(x_i) = [v, x_i]$. Тогда действие $\hat{v}(a)$ совпадает с производной полинома a вдоль векторного поля $\hat{v}$.

Если $\dim \mathcal{G} = 1$, то комплекс для вычисления когомологий алгебры Ли $\mathcal{G}$ с коэффициентами в A имеет вид

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{d} A \otimes \mathcal{G}^* \longrightarrow 0,$$

где $d(a)(v) = \hat{v}(a)$, $v \in \mathcal{G}$, $a \in A$.

Поэтому $H^i(\mathcal{G}, A) = 0$, если $i \geq 2$, и $H^0(\mathcal{G}, A) = A^{\mathcal{G}} = \{a \in A \mid v(a) = 0 \text{ для всех } v \in \mathcal{G}\}$, $H^1(\mathcal{G}, A) = A/\mathcal{G}(A)$.

Для вычисления групп когомологий $H^i(\mathcal{G}, S^*\mathcal{G})$, $i = 0, 1, 2$, мы будем использовать спектральную последовательность Серра–Хохшильда $(E_r^{p,q}, d_r^{p,q})$, построенную по паре $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ [8]. Второй член этой последовательности имеет вид

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{G}/\mathcal{H}, H^q(\mathcal{H}, A)).$$

Далее, во всех вычислениях, если аргумент функции не указан, предполагается, что функция зависит от всех аргументов.

§ 3. Нормальные формы

3.1. Пуассоновы структуры в размерности 2. В этом пункте мы проиллюстрируем наш метод для двумерных вырожденных пуассоновых структур с нетривиальной линейной частью. Теорема о линеаризуемости таких структур приведена, например, в работе [9].

Комплекс для вычисления когомологий двумерной алгебры $\mathcal{G}$ с базисом x, y имеет вид

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{d_1} A \otimes \mathcal{G}^* \xrightarrow{d_2} A \otimes \Lambda^2 \mathcal{G}^* \longrightarrow 0,$$

где $d_1 p = \hat{x}(p) \partial_x + \hat{y}(p) \partial_y$ для $p \in A$ и

$$d_2(p_1 \partial_x + p_2 \partial_y) = (\hat{x}(p_2) - \hat{y}(p_1) - (p_1 \partial_x + p_2 \partial_y)([x, y])) \partial_x \wedge \partial_y.$$

Пусть $\mathcal{G}$ – разрешимая двумерная алгебра Ли. Выберем базис x, y в $\mathcal{G}$ такой, что $[x, y] = x$. Пусть $\mathcal{H}$ – коммутант алгебры $\mathcal{G}$, $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$. Тогда $\mathcal{H} = \mathbb{R} \cdot x$, $\mathcal{G}/\mathcal{H} = \mathbb{R} \cdot y$ и $\hat{x} = x \partial_y$, $\hat{y} = -x \partial_x$.

Проведем вычисление групп когомологий $H^i(\mathcal{G}, S^*\mathcal{G})$, $i = 0, 1, 2$, с помощью спектральной последовательности Серра–Хохшильда $(E_r^{p,q}, d_r^{p,q})$, сходящейся к когомологиям алгебры $\mathcal{G}$ [8].

Комплекс для вычисления когомологий $H^*(\mathcal{H}, A)$ имеет следующий вид:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A \otimes \mathcal{H}^* \longrightarrow 0.$$

Поэтому

$$H^0(\mathcal{H}, A) = \left\{ p \in \mathbb{R}[x, y] \mid x \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \right\} = \mathbb{R}[x],$$

$$H^1(\mathcal{H}, A) = \frac{\{p \partial_x\}}{\{x \cdot \partial q / \partial y \cdot \partial_x\}} = \{p(y) \partial_x\} = \mathbb{R}[y] \partial_x \simeq \mathbb{R}[y].$$

Для вычисления членов $E_2^{p,q}$ воспользуемся комплексами

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}[x] \longrightarrow (\mathcal{G}/\mathcal{H})^* \otimes \mathbb{R}[x] \longrightarrow 0, \quad (2)$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}[y] \partial_x \xrightarrow{\text{iso}} (\mathcal{G}/\mathcal{H})^* \otimes (\mathbb{R}[y] \partial_x) \longrightarrow 0, \quad (3)$$

где изоморфизм iso определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} p(y) \partial_x &\mapsto d(p(y) \partial_x) = \widehat{y}(p(y) \partial_x) \wedge \partial_y = -x \partial_x (p(y) \partial_x) \wedge \partial_y \\ &= -p(y) [x \partial_x, \partial_x] \wedge \partial_y = -p(y) \partial_x \wedge \partial_y. \end{aligned}$$

Из (2) следует, что

$$E_2^{0,0} = H^0(\mathcal{G}/\mathcal{H}, \mathbb{R}[x]) = (\mathbb{R}[x])^{\mathcal{G}/\mathcal{H}} \simeq \mathbb{R}, \quad E_2^{1,0} \simeq E_2^{0,0} \simeq \mathbb{R},$$

а из (3) –

$$E_2^{0,1} \simeq E_2^{1,1} \simeq H^0(\mathcal{G}/\mathcal{H}, \mathbb{R}[y] \partial_x) = (\mathbb{R}[y] \partial_x)^{\mathcal{G}/\mathcal{H}} = 0.$$

Таким образом, член E_2 спектральной последовательности имеет вид

$q \uparrow$	0	0	$E_2^{p,q}$
$q = 1$	0	0	
$q = 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
	$p = 0$	$p = 1$	$\overrightarrow{p}$

Из соображений размерности $d_2^{p,q} = d_3^{p,q} = \dots = 0$, тем самым, $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$. Следовательно, $H^0(\mathcal{G}, S^r \mathcal{G}) = H^1(\mathcal{G}, S^r \mathcal{G}) = \delta_0^r \cdot \mathbb{R}$, а $H^2(\mathcal{G}, A) = 0$. Поэтому, используя теорему Б, получаем следующее

СЛЕДСТВИЕ 2. *Любая вырожденная двумерная пуассонова структура с нетривиальной линейной частью формально линеаризуема.*

3.2. Алгебры типа А. В данном случае идеал $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ порожден x , $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ порожден y, z и векторные поля $\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}$ имеют вид $\widehat{x} = x \partial_y$, $\widehat{y} = -x \partial_x$, $\widehat{z} = 0$ соответственно.

Вычислим сначала $H^q(\mathcal{H}, A)$ для $q = 0, 1$. Заметим, что в комплексе

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}[x, y, z] \xrightarrow{d_1} \mathbb{R}[x, y, z] \otimes \mathcal{H}^* \longrightarrow 0$$

дифференциал действует следующим образом:

$$d_1 : p \mapsto d_1 p = \widehat{x}(p) \partial_x = x \frac{\partial p}{\partial y} \partial_x.$$

Поэтому

$$H^0(\mathcal{H}, A) = A^{\mathcal{H}} = \mathbb{R}[x, z], \quad H^1(\mathcal{H}, A) = \frac{\{p \otimes \partial_x\}}{\{x \cdot \partial q / \partial y \cdot \partial_x\}} = \mathbb{R}[y, z] \partial_x.$$

Для вычисления когомологий $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ рассмотрим комплекс

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}[x, z] \xrightarrow{d_1} \mathbb{R}[x, z] \otimes (\mathcal{G}/\mathcal{H})^* \xrightarrow{d_2} \mathbb{R}[x, z] \otimes \Lambda^2(\mathcal{G}/\mathcal{H})^* \longrightarrow 0,$$

где

$$\begin{aligned} d_1 p &= \widehat{y}(p) \partial_y + \widehat{z}(p) \partial_z = -x \frac{\partial p}{\partial x} \partial_y, \\ d_2(p_1 \partial_y + p_2 \partial_z) &= (\widehat{y}(p_2) - \widehat{z}(p_1)) \partial_y \wedge \partial_z = -x \frac{\partial p_2}{\partial x} \partial_y \wedge \partial_z. \end{aligned}$$

Таким образом, для $q = 0$ получаем

$$\begin{aligned} E_2^{0,0} &= H^0(\mathcal{G}/\mathcal{H}, \mathbb{R}[x, z]) = (\mathbb{R}[x, z])^{\mathcal{G}/\mathcal{H}} = \left\{ p \mid x \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \right\} = \mathbb{R}[z], \\ E_2^{1,0} &= H^1(\mathcal{G}/\mathcal{H}, \mathbb{R}[x, z]) = \frac{Z^1}{B^1} = \frac{\{p_1 \partial_y + p_2 \partial_z \mid \partial p_2 / \partial x = 0\}}{\{-x \cdot \partial q / \partial x \cdot \partial_y\}} \\ &= \{p_1^0(z) \partial_y + p_2^0(z) \partial_z\} = (\mathcal{G}/\mathcal{H})^* \otimes \mathbb{R}[z], \\ E_2^{2,0} &= H^2(\mathcal{G}/\mathcal{H}, \mathbb{R}[x, z]) = \frac{Z^2}{B^2} = \frac{\{p \partial_y \wedge \partial_z\}}{\{-x \cdot \partial p_2 / \partial x \cdot \partial_y \wedge \partial_z\}} \\ &= \mathbb{R}[z] \partial_y \wedge \partial_z = \Lambda^2(\mathcal{G}/\mathcal{H})^* \otimes \mathbb{R}[z]. \end{aligned}$$

Для $q = 1$ рассмотрим комплекс

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}[y, z] \partial_x \xrightarrow{d_1} \mathbb{R}[y, z] \partial_x \otimes (\mathcal{G}/\mathcal{H})^* \xrightarrow{d_2} \mathbb{R}[y, z] \partial_x \otimes \Lambda^2(\mathcal{G}/\mathcal{H})^* \longrightarrow 0,$$

где для $p \in \mathbb{R}[y, z]$

$$\begin{aligned} d_1(p \partial_x) &= \widehat{y}(p \partial_x) \otimes \partial_y + \widehat{z}(p \partial_x) \otimes \partial_z = [-x \partial_x, p \partial_x] \otimes \partial_y \\ &= \left(p - x \frac{\partial p}{\partial x} \right) \partial_x \otimes \partial_y = p \partial_x \otimes \partial_y, \\ d_2(p_1 \partial_x \otimes \partial_y + p_2 \partial_x \otimes \partial_z) &= \widehat{y}(p_2 \partial_x) \partial_y \wedge \partial_z = \left(p_2 - x \frac{\partial p_2}{\partial x} \right) \partial_x \wedge \partial_y \wedge \partial_z \\ &= p_2 \partial_x \wedge \partial_y \wedge \partial_z. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} E_2^{0,1} &= H^0(\mathcal{G}/\mathcal{H}, \mathbb{R}[y, z] \partial_x) = \{p \mid p = 0\} \otimes \partial_x = 0, \\ E_2^{1,1} &= H^1(\mathcal{G}/\mathcal{H}, \mathbb{R}[y, z] \partial_x) = \frac{\{p_1 \partial_x \wedge \partial_y + p_2 \partial_x \wedge \partial_z \mid p_2 = 0\}}{\{q \partial_x \wedge \partial_y\}} = 0, \\ E_2^{2,1} &= H^2(\mathcal{G}/\mathcal{H}, \mathbb{R}[y, z] \partial_x) = \frac{\{p \partial_x \wedge \partial_y \wedge \partial_z\}}{\{q \partial_x \wedge \partial_y \wedge \partial_z\}} = 0. \end{aligned}$$

В результате имеем следующий вид члена $E_2^{p,q}$ спектральной последовательности:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 q \uparrow & & & & E_2^{p,q} \\
 \hline
 q = 1 & 0 & 0 & 0 & \\
 \hline
 q = 0 & \mathbb{R}[z] & \mathbb{R}[z] \otimes (\mathcal{G}/\mathcal{H})^* & \mathbb{R}[z] \otimes \Lambda^2(\mathcal{G}/\mathcal{H})^* & \\
 \hline
 & p = 0 & p = 1 & p = 2 & \xrightarrow{p}
 \end{array} ,$$

или с учетом градуировки $S^r \mathcal{G}$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 q \uparrow & & & & E_2^{p,q}(r) \\
 \hline
 q = 0 & \mathbb{R} & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \mathbb{R} & \\
 \hline
 & p = 0 & p = 1 & p = 2 & \xrightarrow{p}
 \end{array} .$$

Из соображений размерности $d_2^{p,q} = d_3^{p,q} = \dots = 0$, следовательно, $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$.

Таким образом,

$$H^0(\mathcal{G}, S^r \mathcal{G}) = \mathbb{R}, \quad H^1(\mathcal{G}, S^r \mathcal{G}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \quad H^2(\mathcal{G}, S^r \mathcal{G}) = \mathbb{R},$$

а группа $H^2(\mathcal{G}, S^* \mathcal{G}) = \bigoplus_r H^2(\mathcal{G}, S^r \mathcal{G})$ бесконечномерна.

Из приведенного описания следует, что препятствия для линеаризации пуассоновой структуры ∇ с линейной частью $\nabla_1 = x\partial_x \wedge \partial_y$, задающей алгебру Ли типа А, лежат в $H^2(\mathcal{G}, S^r \mathcal{G})$ и являются бивекторами вида $z^r \partial_y \wedge \partial_z$, $r \geq 2$.

Рассмотрим разность $\nabla - \nabla_1 \in \mu^2 \mathcal{D}_2$. Она является коциклом $\text{mod } \mu^3 \mathcal{D}_2$. Пусть этот коцикл представлен бивектором $a_2 z^2 \partial_y \wedge \partial_z$. Рассмотрим $\nabla_2 = x\partial_x \wedge \partial_y + a_2 z^2 \partial_y \wedge \partial_z$. Поскольку разность $[\nabla - \nabla_2]_2$ является 2-кограницей, существует локальный диффеоморфизм φ_2 такой, что $(\varphi_2)_*^{(2)}(\nabla) - \nabla_2 \in \mu^3 \mathcal{D}_2$.

Заметим, что любое бивекторное поле вида $(x\partial_x + p(z)\partial_z) \wedge \partial_y$ является пуассоновой структурой. Действительно, обозначим $a = x\partial_x + f(z)\partial_z$, $b = \partial_y$. Тогда

$$\begin{aligned}
 [a \wedge b, a \wedge b] &= -[a \wedge b, a] \wedge b + a \wedge [a \wedge b, b] = -[a, a \wedge b] \wedge b + a \wedge [b, a \wedge b] \\
 &= [a, a] \wedge b \wedge b + a \wedge [a, b] \wedge b - a \wedge [b, a] \wedge b - a \wedge a \wedge [b, b] = 2a \wedge [a, b] \wedge b = 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, ∇_2 – пуассонова структура, поэтому $[(\varphi_2)_*^{(2)}(\nabla) - \nabla_2]_3$ – коцикл. Пусть он представлен бивектором $a_3 z^3 \partial_y \wedge \partial_z$. Рассмотрим пуассонову структуру $\nabla_3 = x\partial_x \wedge \partial_y + (a_2 z^2 + a_3 z^3) \partial_y \wedge \partial_z$. Заметим, что $[\nabla - \nabla_3]_3$ является кограницей, поэтому существует локальный диффеоморфизм φ_3 такой, что $(\varphi_3 \circ \varphi_2)_*^{(2)}(\nabla) - \nabla_3 \in \mu^4 \mathcal{D}_2$.

Продолжая этот процесс, мы получаем, что существует диффеоморфизм φ такой, что $\varphi_*^{(2)}(\nabla) = (x\partial_x \wedge \partial_y + p(z)\partial_y \wedge \partial_z) \text{ mod } \mu^\infty \mathcal{D}_2$, где $p(0) = p'(0) = 0$, т.е. $p(z) = a_2 z^2 + \dots$. Векторное поле $p(z)\partial_z$ на прямой может быть приведено к нормальной форме $\pm Z^r \partial_Z$, которую для четного r всегда можно брать со знаком “+”. Тем самым, доказана

ТЕОРЕМА 1. *Любая вырожденная пуассонова структура ∇ в $\mathbb{R}^3$ с линейной частью, задающей алгебру Ли типа А, формально эквивалентна пуассоновой структуре вида $\nabla_r = (x\partial_x + \varepsilon z^r \partial_z) \wedge \partial_y$, где $r \geq 2$ и*

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{при четном } r, \\ \pm 1 & \text{при нечетном } r, \\ 0 & \text{при } r = \infty \text{ (формальная линеаризация)}. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим следующий подмодуль в модуле векторных полей:

$$\{\nabla(df) \mid f \in A = \mathcal{D}_0\} \subset \mathcal{D}_1.$$

Траектории членов этого подмодуля определяют слоение размерности 2 на трехмерном многообразии (оно также задается поверхностями уровня функций Казимира), а слои называются пуассоновыми листами. Для пуассоновых структур ∇_r из теоремы 1 пуассоново слоение будет иметь особенность вдоль кривой $x = z = 0$, и индуцированное слоение на трансверсали к этой кривой диффеоморфно слоению плоскости $\mathbb{R}(x, z)$ траекториями векторного поля $x\partial_x + \varepsilon z^r\partial_z$. Таким образом, для различных $r \in (\mathbb{N} \setminus \{1\}) \cup \{\infty\}$ пуассоновы структуры ∇_r неэквивалентны.

3.3. Алгебры типа В. Идеал $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ порожден z , а факторалгебра $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ порождена x, y . В данном случае $\hat{x} = z\partial_y$, $\hat{y} = -z\partial_x$, $\hat{z} = 0$.

В комплексе

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}[x, y, z] \xrightarrow{d_1} \mathbb{R}[x, y, z] \otimes \mathcal{H}^* \longrightarrow 0$$

дифференциал тривиален: $d_1(p) = \hat{z}(p)\partial_z = 0$. Поэтому

$$H^0(\mathcal{H}, A) = \mathbb{R}[x, y, z], \quad H^1(\mathcal{H}, A) = \mathbb{R}[x, y, z]\partial_z.$$

Для вычисления когомологий $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ при $q = 0$ рассмотрим комплекс

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}[x, y, z] \xrightarrow{d_1} \mathbb{R}[x, y, z] \otimes (\mathcal{G}/\mathcal{H})^* \xrightarrow{d_2} \mathbb{R}[x, y, z] \otimes \Lambda^2(\mathcal{G}/\mathcal{H})^* \longrightarrow 0,$$

где

$$d_1(p) = \hat{x}(p)\partial_x + \hat{y}(p)\partial_y = z\frac{\partial p}{\partial y}\partial_x - z\frac{\partial p}{\partial x}\partial_y,$$

$$d_2(p_1\partial_x + p_2\partial_y) = (\hat{x}(p_2) - \hat{y}(p_1))\partial_x \wedge \partial_y = z\left(\frac{\partial p_2}{\partial y} + \frac{\partial p_1}{\partial x}\right)\partial_x \wedge \partial_y.$$

Имеем

$$Z^1 = \left\{ p_1\partial_x + p_2\partial_y \mid \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y} = 0 \right\}, \quad B^1 = \left\{ z\left(\frac{\partial p}{\partial y}\partial_x - \frac{\partial p}{\partial x}\partial_y\right) \right\}.$$

Пусть

$$p_i = \sum_{j=0}^{\infty} p_i^j(x, y)z^j.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{Z^1(\mathcal{G}/\mathcal{H}, \mathbb{R}[x, y, z])}{B^1(\mathcal{G}/\mathcal{H}, \mathbb{R}[x, y, z])} &= \bigoplus_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\{p_1^j(x, y)\partial_x + p_2^j(x, y)\partial_y \mid \partial p_1^j/\partial x + \partial p_2^j/\partial y = 0\}}{\{\partial p^{j-1}(x, y)/\partial y \cdot \partial_x - \partial p^{j-1}(x, y)/\partial x \cdot \partial_y\}} \otimes z^j \right) \\ &\quad \oplus \left\{ p_1^0(x, y)\partial_x + p_2^0(x, y)\partial_y \mid \frac{\partial p_1^0}{\partial x} + \frac{\partial p_2^0}{\partial y} = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что все слагаемые бесконечной суммы – нули, тем самым,

$$\frac{Z^1}{B^1} = \left\{ p_1^0(x, y)\partial_x + p_2^0(x, y)\partial_y \mid \frac{\partial p_1^0}{\partial x} + \frac{\partial p_2^0}{\partial y} = 0 \right\}.$$

Итак, первые когомологии указанного комплекса – бездивергентные поля на плоскости $\mathbb{R}(x, y)$ с формальными коэффициентами. Эти поля совпадают с гамильтоновыми:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_H &= \left\{ p_1^0(x, y)\partial_x + p_2^0(x, y)\partial_y \mid \frac{\partial p_1^0}{\partial x} + \frac{\partial p_2^0}{\partial y} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \frac{\partial p(x, y)}{\partial y}\partial_x - \frac{\partial p(x, y)}{\partial x}\partial_y \right\} \simeq \mathbb{R}[x, y]/\mathbb{R},\end{aligned}$$

где $\mathbb{R}[x, y]$ – формальные ряды, а $\mathbb{R}$ – свободные члены.

Заметим, что при переходе от гамильтоновых векторных полей к гамильтонианам градуировка поднимается на 1. Таким образом,

$$\begin{aligned}E_2^{0,0} &= H^0(\mathcal{G}/\mathcal{H}, \mathbb{R}[x, y, z]) = (\mathbb{R}[x, y, z])^{\mathcal{G}/\mathcal{H}} = \left\{ p \mid \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \right\} = \mathbb{R}[z], \\ E_2^{1,0} &= H^1(\mathcal{G}/\mathcal{H}, \mathbb{R}[x, y, z]) = \mathcal{D}_H \simeq \mathbb{R}[x, y]/\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Вычислим вторые когомологии. Заметим, что кограницы B^2 порождены бивекторными полями вида

$$p\partial_x \wedge \partial_y = z \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y} \right) \partial_x \wedge \partial_y.$$

Очевидно, что любое (формальное) бивекторное поле на $\mathbb{R}(x, y)$ представимо в таком виде, при условии, что оно кратно z . Таким образом,

$$E_2^{2,0} = H^2(\mathcal{G}/\mathcal{H}, \mathbb{R}[x, y, z]) = \frac{Z^2}{B^2} = \mathbb{R}[x, y]\partial_x \wedge \partial_y. \quad (4)$$

Для вычисления членов спектральной последовательности при $q = 1$ имеем следующий комплекс:

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}[x, y, z]\partial_z \xrightarrow{d_1} \mathbb{R}[x, y, z]\partial_z \otimes (\mathcal{G}/\mathcal{H})^* \xrightarrow{d_2} \mathbb{R}[x, y, z]\partial_z \otimes \Lambda^2(\mathcal{G}/\mathcal{H})^* \longrightarrow 0,$$

где

$$\begin{aligned}d_1(p\partial_z) &= \hat{x}(p)\partial_z \otimes \partial_x + \hat{y}(p)\partial_z \otimes \partial_y = z\partial_z \wedge \left(\frac{\partial p}{\partial y}\partial_x - \frac{\partial p}{\partial x}\partial_y \right), \\ d_2(p_1\partial_z \wedge \partial_x + p_2\partial_z \wedge \partial_y) &= z \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y} \right) \partial_z \wedge \partial_x \wedge \partial_y.\end{aligned}$$

Поскольку этот комплекс отличается от предыдущего сомножителем ∂_z , коммутирующим с дифференциалами, то

$$\begin{aligned}E_2^{0,1} &= H^0(\mathcal{G}/\mathcal{H}, \mathbb{R}[x, y, z]\partial_z) = \mathbb{R}[z]\partial_z, \\ E_2^{1,1} &= H^1(\mathcal{G}/\mathcal{H}, \mathbb{R}[x, y, z]\partial_z) = \mathcal{D}_H \wedge \partial_z \simeq (\mathbb{R}[x, y]/\mathbb{R})^{1\uparrow} \wedge \partial_z, \\ E_2^{2,1} &= H^2(\mathcal{G}/\mathcal{H}, \mathbb{R}[x, y, z]\partial_z) = \mathbb{R}[x, y]\partial_x \wedge \partial_y \wedge \partial_z,\end{aligned}$$

где через $(\cdot)^{1\uparrow}$ обозначен оператор повышения градуировки на 1. В результате спектральная последовательность имеет следующий вид:

$q \uparrow$				$E_2^{p,q}$
$q = 1$	$S^* \mathcal{H}$	$(S^*(\mathcal{G}/\mathcal{H})/\mathbb{R})^{1\uparrow}$	$S^*(\mathcal{G}/\mathcal{H})$	,
$q = 0$	$S^* \mathcal{H}$	$(S^*(\mathcal{G}/\mathcal{H})/\mathbb{R})^{1\uparrow}$	$S^*(\mathcal{G}/\mathcal{H})$	
	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$	$\overrightarrow{p}$

или для r -компоненты градуировки $A = S^*\mathcal{G} = \bigoplus_{r=0}^{\infty} S^r\mathcal{G}$:

$q \uparrow$				$E_2^{p,q}(r)$
$q = 1$	$S^r \mathcal{H}$	$S^{r+1}(\mathcal{G} / \mathcal{H})$	$S^r(\mathcal{G} / \mathcal{H})$	
$q = 0$	$S^r \mathcal{H}$	$S^{r+1}(\mathcal{G} / \mathcal{H})$	$S^r(\mathcal{G} / \mathcal{H})$	
	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$	$\overrightarrow{p}$

В этой спектральной последовательности имеется лишь один нетривиальный дифференциал – отображение трансгрессии $d_2^{0,1}: E_2^{0,1} \rightarrow E_2^{2,0}$. Вычислим это отображение. Пусть $p(z)\partial_z$ – представитель элемента из $E_2^{0,1}$. Тогда по определению $d_2^{0,1}$ имеем

$$d_2^{0,1}[p(z)\partial_z]_2^{0,1} = [d(p(z)\partial_z)]_2^{2,0},$$

где через $[\cdot]_2^{p,q}$ обозначены классы соответствующих элементов в $E_2^{p,q}$.

Имеем

$$\begin{aligned} d(p(z)\partial_z) &= \hat{x}(p(z)\partial_z) \wedge \partial_x + \hat{y}(p(z)\partial_z) \wedge \partial_y \\ &= \left(z \frac{\partial p(z)}{\partial y} \partial_z + p(z)[z\partial_y, \partial_z] \right) \wedge \partial_x + \left(-z \frac{\partial p(z)}{\partial x} \partial_z + p(z)[-z\partial_x, \partial_z] \right) \wedge \partial_y \\ &= (-p(z)\partial_y) \wedge \partial_x + (p(z)\partial_x) \wedge \partial_y = 2p(z)\partial_x \wedge \partial_y. \end{aligned}$$

После факторизации в силу (4) получаем

$$d_2^{0,1}[p(z)\partial_z]_2^{0,1} = [2p(0)\partial_x \wedge \partial_y]_2^{2,0},$$

т.е.

$$\text{Ker } d_2^{0,1} = (\mathbb{R}[z]/\mathbb{R}) \otimes \partial_z \simeq (\mathbb{R}[z])^{1\uparrow}, \quad \text{Coker } d_2^{2,0} = (\mathbb{R}[x, y]/\mathbb{R}) \otimes (\partial_x \wedge \partial_y).$$

Таким образом, имеем следующее представление члена $E_3^{p,q}$:

$q \uparrow$				$E_3^{p,q} = E_{\infty}^{p,q}$
$q = 1$	$\mathbb{R}[z]/\mathbb{R}$	$(\mathbb{R}[x, y]/\mathbb{R})^{1\uparrow}$	$\mathbb{R}[x, y]$	
$q = 0$	$\mathbb{R}[z]$	$(\mathbb{R}[x, y]/\mathbb{R})^{1\uparrow}$	$\mathbb{R}[x, y]/\mathbb{R}$	
	$p = 0$	$p = 1$	$p = 2$	$\overrightarrow{p}$

Следовательно, группа $H^2(\mathcal{G}, S^*\mathcal{G}) = \bigoplus_r H^2(\mathcal{G}, S^r\mathcal{G})$ бесконечномерна.

Рассмотрим пуассонову структуру ∇ в $\mathbb{R}^3$ с линейной частью $\nabla_1 = z\partial_x \wedge \partial_y$, задающей алгебру Ли типа В.

Как следует из вычисления когомологий $H^2(\mathcal{G}, S^r\mathcal{G})$, препятствия к линеаризации ∇ могут быть двух видов: бивекторы $p(x, y)\partial_x \wedge \partial_y$, $p \in \mu^2$ (из $E_{\infty}^{2,0}$), а также бивекторы вида $X_H \wedge \partial_z$, где

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial x} \partial_y - \frac{\partial H}{\partial y} \partial_x$$

– гамильтоново векторное поле на плоскости $\mathbb{R}(x, y)$, $H \in \mu^3$ (из $E_{\infty}^{1,1}$).

Таким образом (теорема А), пуассонова структура ∇ с точностью до членов третьего порядка малости приводится к виду

$$(z + p_2(x, y))\partial_x \wedge \partial_y + X_H \wedge \partial_y,$$

где $p_2(x, y)$ – квадратичный, а $H(x, y)$ – кубический многочлены. С помощью преобразования из $\text{sl}(2, \mathbb{R})$ квадрата p_2 приводится к главным осям. При этом сохраняется максимальный бивектор $\partial_x \wedge \partial_y$. Так как $\text{sl}(2, \mathbb{R}) = \text{sp}(2, \mathbb{R})$, такие преобразования переводят гамильтоновы векторные поля в гамильтоновы. Итак, доказана

ТЕОРЕМА 2. Для любой пуассоновой структуры ∇ в $\mathbb{R}^3$ с линейной частью $\nabla_1 = z\partial_x \wedge \partial_y$, задающей алгебру Ли типа В, существует диффеоморфизм φ такой, что $\varphi^* = \text{id} \bmod \mu^2$ и

$$(\varphi)_*^{(2)}(\nabla) = ((z + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2)\partial_x \wedge \partial_y + X_H \wedge \partial_z) \bmod \mu^3 \mathcal{D}_2,$$

где X_H – гамильтоново векторное поле на плоскости $\mathbb{R}(x, y)$, а H – однородный кубический полином.

3.4. Алгебры типа С. Рассмотрим теперь случай двумерного коммутанта $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$. Пусть идеал $\mathcal{H}$ порожден x, y , а $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ порождена z , и $[x, y] = 0$, $[z, x] = f = a_{11}x + a_{12}y$, $[z, y] = g = a_{21}x + a_{22}y$. В этом случае $\hat{x} = -f\partial_z$, $\hat{y} = -g\partial_z$, $\hat{z} = f\partial_x + g\partial_y$.

Начнем с вычисления когомологий $\mathcal{H}$ с коэффициентами в $A = S^*\mathcal{G}$. Из комплекса

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}[x, y, z] \xrightarrow{d_1} \mathbb{R}[x, y, z] \otimes \mathcal{H}^* \xrightarrow{d_2} \mathbb{R}[x, y, z] \otimes \Lambda^2 \mathcal{H}^* \longrightarrow 0,$$

где

$$\begin{aligned} d_1 p &= \hat{x}(p)\partial_x + \hat{y}(p)\partial_y = -f\frac{\partial p}{\partial z}\partial_x - g\frac{\partial p}{\partial z}\partial_y, \\ d_2(p_1\partial_x + p_2\partial_y) &= (\hat{x}(p_2) - \hat{y}(p_1))\partial_x \wedge \partial_y = \left(g\frac{\partial p_1}{\partial z} - f\frac{\partial p_2}{\partial z}\right)\partial_x \wedge \partial_y, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} H^0(\mathcal{H}, A) &= A^{\mathcal{H}} = \left\{ p \mid \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \right\} = \mathbb{R}[x, y], \\ H^1(\mathcal{H}, A) &= \frac{Z^1}{B^1} = \frac{\{p_1\partial_x + p_2\partial_y \mid g \cdot \partial p_1/\partial z - f \cdot \partial p_2/\partial z = 0\}}{\{f \cdot \partial p/\partial z \cdot \partial_x + g \cdot \partial p/\partial z \cdot \partial_y\}}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что данное факторпространство совпадает с $\text{Vect}(x, y)/\langle \mathbb{R}[x, y]\hat{z} \rangle$, т.е.

$$H^1(\mathcal{H}, A) = \frac{\text{Vect}(x, y)}{\langle \mathbb{R}[x, y]\hat{z} \rangle}, \quad (5)$$

где $\text{Vect}(x, y)$ – модуль всех формальных векторных полей на плоскости $\mathbb{R}(x, y)$.

Далее имеем

$$H^2(\mathcal{H}, A) = \frac{\{p\partial_x \wedge \partial_y\}}{\{(g \cdot \partial p_1/\partial z - f \cdot \partial p_2/\partial z)\partial_x \wedge \partial_y\}} = \mathbb{R}[z]\partial_x \wedge \partial_y = \mathbb{R}[z] \otimes \Lambda^2 \mathcal{H}^*.$$

Для вычисления $E_2^{0,0}$ и $E_2^{1,0}$ имеем комплекс

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}[x, y] \xrightarrow{d} \mathbb{R}[x, y] \otimes (\mathcal{G}/\mathcal{H})^* \longrightarrow 0,$$

где

$$dp = \hat{z}(p)\partial_z = \left(f\frac{\partial p}{\partial x} + g\frac{\partial p}{\partial y}\right)\partial_z.$$

Поэтому $E_2^{0,0} = H^0(\mathcal{G}/\mathcal{H}, \mathbb{R}[x, y]) = I$ – алгебра (формальных) первых интегралов векторного поля $\hat{z}$ на плоскости $\mathbb{R}(x, y)$, а

$$E_2^{1,0} = H^1(\mathcal{G}/\mathcal{H}, \mathbb{R}[x, y]) = \mathbb{R}[x, y]/\hat{z}(\mathbb{R}[x, y]).$$

Соответственно из комплекса

$$0 \longrightarrow H^1(\mathcal{H}, A) \longrightarrow H^1(\mathcal{H}, A) \otimes (\mathcal{G}/\mathcal{H})^* \longrightarrow 0$$

мы получаем, что

$$E_2^{0,1} = (H^1(\mathcal{H}, A))^{\hat{z}}, \quad E_2^{1,1} = H^1(\mathcal{G}/\mathcal{H}, H^1(\mathcal{H}, A)) \simeq \frac{H^1(\mathcal{H}, A)}{\hat{z}(H^1(\mathcal{H}, A))}.$$

Для вычисления этих когомологий воспользуемся описанием $H^1(\mathcal{H}, A)$ и введем отображение $\Phi: \text{Vect}(x, y) \rightarrow \Lambda^2 \text{Vect}(x, y)$ из пространства векторных полей на плоскости $\mathbb{R}(x, y)$ в пространство бивекторных, определенное внешним умножением на $\hat{z}: v \mapsto v \wedge \hat{z}$.

Заметим, что $\text{Ker}(\Phi) = \langle \hat{z} \rangle = \{p(x, y)\hat{z}\}$. Следовательно, в силу (5) образ $\text{Im } \Phi$ отображения Φ изоморфен группе $H^1(\mathcal{H}, A)$. Кроме того, при изоморфизме Φ градуировка увеличивается на 1.

Найдем образ дифференцирования $\hat{z}$ при изоморфизме $\tilde{\Phi}: H^1(\mathcal{H}, A) \rightarrow \text{Im } \Phi$. Имеем

$$\Phi(\hat{z}(v)) = \hat{z}(v) \wedge \hat{z} = L_{\hat{z}}(v \wedge \hat{z}) = L_{\hat{z}}\Phi(v),$$

т.е. $\hat{z}$ действует как производная Ли $L_{\hat{z}}$.

Имеем

$$\hat{z}(p(x, y)\partial_x \wedge \partial_y) = (\hat{z}(p) - p \text{div } \hat{z})\partial_x \wedge \partial_y, \quad (6)$$

где $\text{div } \hat{z} = \text{tr}(a_{ij}) = a_{11} + a_{22}$.

Итак, мы имеем индуцированное действие векторного поля $\hat{z}$ в $H^1(\mathcal{H}, A)$, изоморфной $S^*(x, y)$:

$$D_{\hat{z}}^{r+1}: S^{r+1}(x, y) \rightarrow S^{r+1}(x, y),$$

где $D_{\hat{z}}^{r+1}$ есть $(r+1)$ -я компонента оператора (6).

Пусть λ_1, λ_2 – собственные числа оператора $S^1(x, y) \rightarrow S^1(x, y)$, т.е. собственные числа матрицы (a_{ij}) . Тогда собственными числами оператора $D_{\hat{z}}^{r+1}$ на S^{r+1} являются

$$\{m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 - d \mid m_1 + m_2 = r + 1, m_1, m_2 \geq 0, r \geq 2\},$$

где $d = \text{div } \hat{z} = \lambda_1 + \lambda_2$. Таким образом, спектр оператора $D_{\hat{z}}^{r+1}$ совпадает с множеством

$$\Pi^{r+1}(\lambda_1, \lambda_2) = \{(m_1 - 1)\lambda_1 + (m_2 - 1)\lambda_2 \mid m_1 + m_2 = r + 1, m_1, m_2 \geq 0\}, \quad r \geq 2.$$

Таким образом, если в наборе чисел $\Pi^{r+1}(\lambda_1, \lambda_2)$ отсутствуют нули, то $D_{\hat{z}}^{r+1}$, а значит и $\hat{z}: H^1(\mathcal{H}, S^r\mathcal{G}) \rightarrow H^1(\mathcal{H}, S^r\mathcal{G})$, является изоморфизмом.

Заметим, что образ $\text{Im } \Phi$ совпадает с множеством всех бивекторов, обращающихся в 0 в точке $(x, y) = (0, 0)$, т.е. $\text{Im } \Phi = S^*\mathcal{H}/\mathbb{R} \otimes \Lambda^2\mathcal{H}$, где $\mathbb{R}$ – свободные члены. Кроме того, $\hat{z}$ сохраняет градуировку, и $(S^*\mathcal{H} \otimes \Lambda^2\mathcal{H})/\text{Im } \Phi = \mathbb{R}$ отвечает нулевому уровню градуировки.

Итак, в случае отсутствия нулей в $\Pi^{r+1}(\lambda_1, \lambda_2)$ имеем

$$E_2^{0,1} = \text{Ker } \mathcal{D}\hat{z} = 0, \quad E_2^{1,1} = H^1(\mathcal{G}/\mathcal{H}, H^1(\mathcal{H}, A)) = \frac{\text{Im } \Phi}{\hat{z}(\text{Im } \Phi)} = \frac{\text{Im } \Phi}{\text{Im } \Phi} = 0.$$

Если же в $\Pi^{r+1}(\lambda_1, \lambda_2)$ имеются нули, то члены $E_2^{0,1}(r)$ и $E_2^{1,1}(r)$ ненулевые.

Наконец, вычислим верхнюю строчку спектральной последовательности:

$$E_2^{0,2} = H^0(\mathcal{G}/\mathcal{H}, H^2(\mathcal{H}, A)) = H^0(\mathcal{G}/\mathcal{H}, \mathbb{R}[z]\partial_x \wedge \partial_y) = (\mathbb{R}[z]\partial_x \wedge \partial_y)^{\mathcal{G}/\mathcal{H}},$$

$$E_2^{1,2} = H^1(\mathcal{G}/\mathcal{H}, H^2(\mathcal{H}, A)) = \frac{H^2(\mathcal{H}, A)}{\hat{z}(H^2(\mathcal{H}, A))}.$$

Найдем действие $\hat{z}$ в $H^2(\mathcal{H}, A)$:

$$\hat{z}(p(z)\partial_x \wedge \partial_y) = p(z)([\hat{z}, \partial_x] \wedge \partial_y + \partial_x \wedge [\hat{z}, \partial_y]) = -(\text{div } \hat{z})p(z)\partial_x \wedge \partial_y = -d \cdot p(z)\partial_x \wedge \partial_y.$$

Таким образом, если $d = \text{div } \hat{z} = \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, то дифференциал следующего комплекса является изоморфизмом:

$$0 \longrightarrow H^2(\mathcal{H}, A) \xrightarrow{\text{iso}} H^2(\mathcal{H}, A) \otimes (\mathcal{G}/\mathcal{H})^* \longrightarrow 0,$$

и мы имеем $E_2^{1,2} = E_2^{0,2} = 0$.

Итак, спектральная последовательность $E_2^{p,q}$ имеет вид

$$\begin{array}{c|c|c} q \uparrow & & \\ \hline q=2 & 0 & 0 \\ \hline q=1 & 0 & 0 \\ \hline q=0 & I & I \\ \hline & p=0 & p=1 \end{array} \xrightarrow{\overrightarrow{p}} E_2^{p,q} = E_{\infty}^{p,q},$$

если $d \neq 0$ и $\Pi^{r+1}(\lambda_1, \lambda_2)$ не содержит нулей.

В качестве следствия мы получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если собственные числа λ_1, λ_2 оператора $\hat{z}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ таковы, что $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ и $\{0\} \notin \Pi^{r+1}(\lambda_1, \lambda_2)$, то $H^2(\mathcal{G}, S^r \mathcal{G}) = 0$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть ∇ – вырожденная пуассонова структура в $\mathbb{R}^3$ с линейной частью типа C и λ_1, λ_2 – собственные значения матрицы (a_{ij}) .

Тогда ∇ формально эквивалентна линейной пуассоновой структуре

$$(a_{11}x + a_{12}y)\partial_z \wedge \partial_x + (a_{21}x + a_{22}y)\partial_z \wedge \partial_y,$$

если выполнено одно из следующих условий:

- 1) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ и $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{N} \setminus \{1\}$;
- 2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ и $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}$;
- 3) $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} \notin \mathbb{R}$, $\text{Re } \lambda_1 \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Две матрицы (a_{ij}) и (b_{ij}) в классификации Бьянки определяют изоморфные алгебры Ли тогда и только тогда, когда существуют обратимая матрица (c_{ij}) и число $l \neq 0$ такие, что $l \cdot (a_{ij}) = (c_{ij})(b_{ij})(c_{ij})^{-1}$.

В силу этого замечания мы можем упростить формулировку теоремы 3. Рассмотрим матрицу (a_{ij}) . Пусть матрица (c_{ij}) такова, что $(c_{ij})(a_{ij})(c_{ij})^{-1}$ имеет каноническую форму, т.е. является матрицей одного из следующих типов.

1. *Диагональная матрица:* $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Умножением на скалярные матрицы может быть приведена к виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$.
2. *Жорданова клетка:* $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Умножением на скалярные матрицы и линейными преобразованиями может быть приведена к виду $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $\beta \neq 0$.
3. *Комплексная матрица с ненулевой действительной частью* приводится к виду $\begin{pmatrix} 1 & \varkappa \\ -\varkappa & 1 \end{pmatrix}$, где $\varkappa \in \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 4. В условиях теоремы 3 пуассонова структура ∇ формально эквивалентна одной из следующих линейных структур:

- 1) $\partial_z \wedge (x\partial_x + \nu y\partial_y)$, где $\nu \notin \mathbb{Q}_- \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\} \cup (\mathbb{N} \setminus \{1\})$;
- 2) $\partial_z \wedge ((x + \beta y)\partial_x + y\partial_y)$;
- 3) $\partial_z \wedge ((x + \varkappa y)\partial_x + (y - \varkappa x)\partial_y)$.

Автор благодарен рецензенту за указание ссылки [3] и другие полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Weinstein A. The local structure of Poisson manifolds // J. Differential Geom. 1983. V. 18. P. 523–557.
- [2] Conn J. F. Normal forms for smooth Poisson structures // Ann. of Math. (2). 1985. V. 121. P. 565–593.
- [3] Dufour J.-P. Linéarisation de certaines structures de Poisson // J. Differential Geom. 1990. V. 32. P. 415–428.
- [4] Лычагина О. В. Классификация пуассоновых структур // Докл. РАН. 1996. Т. 350. № 3. С. 304–307.
- [5] Лычагина О. В. Нормальные формы вырожденных пуассоновых структур // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 2. С. 220–235.
- [6] Карасёв М. В., Маслов В. П. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991.
- [7] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
- [8] Hochschild G., Serre J.-P. Cohomology of Lie Algebras // Ann. of Math. 1953. V. 57. P. 591–603.
- [9] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1984.

Научно-исследовательское предприятие “ОСТ”, г. Москва
E-mail: lychagin@glasnet.ru

Поступило
18.09.96
Исправленный вариант
10.11.97