Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Малыхин, Максимальная разложимость вполне ограниченных и $\aleph_0$ -ограниченных групп, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 4, 593–598

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1319>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 18:14:02

УДК 512.546

МАКСИМАЛЬНАЯ РАЗЛОЖИМОСТЬ ВПОЛНЕ ОГРАНИЧЕННЫХ И $\aleph_0$ -ОГРАНИЧЕННЫХ ГРУПП

В. И. Малыхин

Доказана максимальная разложимость вполне ограниченных групп и в предположении обобщенной континуум-гипотезы $\aleph_0$ -ограниченных групп.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. В 1943 году Э. Хьюитт [1] назвал пространство *разложимым*, если в нем есть два дизъюнктивных плотных подмножества, и *неразложимым* в противном случае. Если найдется k дизъюнктивных плотных подмножеств, то пространство называется *k-разложимым*.

Не предполагается никаких аксиом отделимости, если только не оговорено обратное.

Первый пример неразложимой отделимой топологической группы (алгебраически это счетная бесконечная булева группа) был построен автором [2] в 1975 году. В настоящее время наблюдается активное исследование различных вопросов разложимости и неразложимости топологических групп и однородных пространств.

Напомним, что топологическая группа G называется *вполне ограниченной*, если для любого непустого открытого подмножества V найдется конечное подмножество $K \subset G$ такое, что $V \cdot K = G$.

В 1994 году И. В. Протасов [3] доказал наличие во всякой вполне ограниченной отделимой группе счетного дискретного незамкнутого подмножества. Отсюда вытекает $\aleph_0$ -разложимость всякой такой отделимой группы. В том же году В. Комфорт и Я. Ван Милл [4] доказали разложимость всякой отделимой абелевой группы с конечным числом идемпотентов. В работе [5] они в соавторстве с Х. Гладнесс доказали разложимость всякой вполне ограниченной отделимой абелевой группы.

Напомним, что *дисперсионным характером семейства* τ называется $\min\{|V| : V \in \tau, V \neq \emptyset\}$. *Дисперсионным характером пространства* (X, τ) естественно назвать дисперсионный характер его топологии τ . Пространство (X, τ) называется *максимально разложимым*, если оно $\Delta\tau$ -разложимо. Таким образом, пространство максимально разложимо, если оно имеет максимально возможное число дизъюнктивных плотных подмножеств.

Недавно Протасов [6] подтвердил разложимость всякой вполне ограниченной группы весьма оригинальным методом, отличающимся от известных методов доказательств

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94-01-01374.

разложимости. Однако Протасов не увидел всей силы своего метода и не доказал максимальную разложимость всякой вполне ограниченной группы, ограничившись только утверждением о простой разложимости таких групп. Специально подчеркнем, что главные результаты данной заметки – теоремы 1–3 – получены простым техническим усовершенствованием метода Протасова из [6].

ТЕОРЕМА 1. *В любой бесконечной группе G найдется дизъюнктное семейство подмножеств $\mathcal{A}$ мощности $|G|$ такое, что для любого $A \in \mathcal{A}$ выполнено $A \cdot K \neq G$ и $(G \setminus A) \cdot K \neq G$, каково бы ни было конечное подмножество $K \subset G$.*

ТЕОРЕМА 2. *В любой бесконечной группе G найдется дизъюнктное семейство подмножеств $\mathcal{A}$ мощности $|G|$, каждое из которых плотно в любой вполне ограниченной групповой топологии на G .*

Ясно, что теорема 2 влечет максимальную разложимость всякой вполне ограниченной группы.

ТЕОРЕМА 3. *Всякая вполне ограниченная группа максимально разложима.*

2. Доказательства теорем 1, 2. Представляет интерес следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Дисперсионный характер вполне ограниченной группы равен ее мощности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если V – непустое открытое подмножество такой группы (G, τ) , то по определению найдется некоторое конечное подмножество $K \subset G$ такое, что $V \cdot K = G$. Как легко видеть, это влечет $|V| = |G|$, т.е. $\Delta\tau = |G|$.

Теперь выведем теорему 2 из теоремы 1, обратив внимание на работу метода Протасова.

Покажем, что каждое $A \in \mathcal{A}$ и его дополнение $G \setminus A$ плотны в любой вполне ограниченной групповой топологии τ . Действительно, $\text{Int } A = \emptyset$. Иначе, должно найтись конечное подмножество K такое, что $A \cdot K = G$, а это прямо противоречит формулировке теоремы 1. Аналогично, $\text{Int}(G \setminus A) = \emptyset$. Итак, A и $G \setminus A$ – два взаимно дополнительных подмножества с пустой внутренностью каждое, значит оба они плотны в τ .

Итак, вполне ограниченная группа (G, τ) имеет $|G|$ дизъюнктивных плотных подмножеств, что и означает ее максимальную разложимость, ибо $\Delta\tau = |G|$ (см. предложение 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Построение указанного семейства $\mathcal{A}$.

Пусть $|G| = \theta$ и $\{K_\alpha : \alpha < \theta\}$ – пересчет всех конечных подмножеств G . В качестве $\mathcal{A}$ выберем $\{A_\alpha : \alpha < \theta\}$, каждое A_α имеет вид $\bigcup \{a_\alpha^\delta K_\delta : \delta < \theta\}$, где a_α^δ – некоторые элементы группы, определяемые в ходе трансфинитного процесса. Положим $A_0^0 = K_0$. Предположим, что для некоторого ε , $0 < \varepsilon < \theta$, уже определены A_α^β для всех $\alpha, \beta < \varepsilon$, причем каждое A_α^β имеет вид $\bigcup \{a_\alpha^\delta K_\delta : \delta \leq \beta\}$. Если обозначить $A'_\alpha = \bigcup \{A_\alpha^\beta : \beta < \varepsilon\}$, то семейство $\{A'_\alpha : \alpha < \varepsilon\}$ дизъюнктно.

Так как $|A'_\alpha| \leq |\varepsilon| < \theta$, имеем $|\bigcup \{A'_\alpha : \alpha < \varepsilon\}| \leq |\varepsilon|^2 < \theta = |G|$. Обозначим $\bigcup \{A'_\alpha : \alpha < \varepsilon\}$ через B . Для всякого конечного подмножества $K \subset G$ $|B \cdot K^{-1}| < |G|$, поэтому для всякого $\delta \leq \varepsilon$ найдется $a_\varepsilon^\delta \notin B \cdot K_\delta^{-1}$. Тогда $a_\varepsilon^\delta K_\delta \cap B = \emptyset$. Обозначая $A_\varepsilon^\varepsilon = \bigcup \{a_\varepsilon^\delta K_\delta : \delta \leq \varepsilon\}$, получим $A_\varepsilon^\varepsilon \cap B = \emptyset$. Так как $|A_\varepsilon^\varepsilon| \leq |\varepsilon|$, найдется $a_0^\varepsilon \notin (B \cup A_\varepsilon^\varepsilon) \cdot K_\varepsilon^{-1}$. Тогда $a_0^\varepsilon K_\varepsilon \cap (B \cup A_\varepsilon^\varepsilon) = \emptyset$. Положим $A_0^\varepsilon = A_0^0 \cup (a_0^\varepsilon K_\varepsilon)$. Действуя

таким образом, далее для каждого α , $0 < \alpha < \varepsilon$, найдем $a_\alpha^\varepsilon \notin (A_\varepsilon^\varepsilon \cup (\cup \{A_\beta^\varepsilon : \beta < \alpha\})) \cdot K_\varepsilon^{-1}$. Положим $A_\alpha^\varepsilon = A'_\alpha \cup (a_\alpha^\varepsilon K_\varepsilon)$.

Заметим теперь, что семейство $\{A_\alpha^\varepsilon : \alpha \leq \varepsilon\}$ дизъюнктно, и все необходимые индуктивные предположения выполнены.

По окончании трансфинитного индуктивного процесса положим для всякого $\alpha < \theta$ $A_\alpha = \cup \{A_\alpha^\varepsilon : \varepsilon < \theta\}$. Семейство $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \theta\}$ искомое.

Действительно, возьмем произвольное $A \in \mathcal{A}$. Оно имеет вид $\cup \{a_\varepsilon K_\varepsilon : \varepsilon < \theta\}$. Докажем, что $(G \setminus A) \cdot K \neq G$ для всякого конечного подмножества $K \subset G$. Предположим противное, т.е. $(G \setminus A) \cdot K' = G$ для некоторого конечного подмножества K' . Пусть K' в пересчете всех конечных подмножеств есть какое-то K_δ^{-1} . Итак, $(G \setminus A) \cdot K_\delta^{-1} = G$, в частности, $a_\delta \in (G \setminus A) \cdot K_\delta^{-1}$. Тогда $a_\delta K_\delta \cap (G \setminus A) \neq \emptyset$, это противоречит тому, что $a_\delta K_\delta \subset A$. Теперь предположим, что $A \cdot K_\delta^{-1} = G$. Однако $|\mathcal{A}| = |G|$, следовательно, имеется $B \in \mathcal{A}$, $B \neq A$. Пусть $B = \{b_\delta K_\delta : \delta < \theta\}$. Тогда $b_\delta \in A \cdot K_\delta^{-1}$ или $b_\delta K_\delta \cap A \neq \emptyset$, но $b_\delta K_\delta \subset B$ и $B \cap A = \emptyset$. Получили противоречие. Итак, семейство $\mathcal{A}$ удовлетворяет теореме 1.

Так как класс отделимых вполне ограниченных групп совпадает с классом подгрупп компактных групп, согласно теореме 3 имеем

СЛЕДСТВИЕ. *Всякая подгруппа компактной группы максимально разложима.*

Теорема 1 не использует всю мощь метода Протасова. Автор не нашел пока применения следующей теореме, обобщающей теорему 1, которую можно назвать групповым аналогом известной теоремы Бернштейна–Куратовского [7, с. 524].

ТЕОРЕМА 4. *В любой бесконечной группе G для любого семейства $\mathcal{B}$ мощности $|G|$ подмножеств, каждое из которых имеет мощность $|G|$, есть дизъюнктивное семейство подмножеств $\mathcal{A}$ мощности $|G|$ такое, что для любого $A \in \mathcal{A}$ выполнено $A \cdot K \neq B$ и $(G \setminus A) \cdot K \neq B$, каковы бы ни были $B \in \mathcal{B}$ и конечное подмножество $K \subset G$.*

3. Пример неразложимого плотного подпространства компактной группы. Этот пример показывает существенность групповой структуры в теоремах 2, 3.

Такое подпространство найдем в некотором канторовом дисконтинууме 2^m , где m окажется некоторым кардиналом не большим $\mathfrak{C}$. В 2^ω фиксируем какое-нибудь счетное плотное подмножество $S = \{s_n : n \in \omega\}$. Фиксируем также какой-нибудь пересчет всех пар дизъюнктивных разбиений $\{(S_\alpha^0, S_\alpha^1) : \alpha < \mathfrak{C}\}$ множества S . Далее будем определять точки из S на все больших и больших координатах. Достаточно описать первый шаг этого процесса – определение значений точек из S на ω . Найдем разбиение (S^0, S^1) наименьшего номера из тех разбиений, у которых обе компоненты плотны в S или, что то же самое, в 2^ω . Положим

$$s(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{для } s \in S^0, \\ 1 & \text{для } s \in S^1. \end{cases}$$

Очевидно, что не более чем за $\mathfrak{C}$ шагов описываемый трансфинитный процесс закончится, и мы получим счетное плотное неразложимое подпространство 2^m , где $m \leq \mathfrak{C}$.

Построенное подпространство дает пример равномерного предкомпактного неразложимого пространства. Вопрос об условиях разложимости равномерного пространства (т.е. с топологией, порожденной равномерностью) еще не исследован.

4. Максимальная разложимость $\aleph_0$ -ограниченных групп. Топологическая группа G называется $\aleph_0$ -ограниченной, если для всякого непустого открытого подмножества V найдется счетное подмножество $K \subset G$ такое, что $V \cdot K = G$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Дисперсионный характер $\aleph_0$ -ограниченной группы равен ее мощности.*

Доказательство дословно совпадает с доказательством предложения 1.

Понятие $\aleph_0$ -ограниченной группы принадлежит И.И. Гурану [8]. Он же ввел общее понятие τ -ограниченной группы (естественно заменив кардинал $\aleph_0$ на произвольный кардинал τ).

В работе [6] Протасов доказал несколько утверждений о разложимости τ -ограниченных групп (но у Протасова τ -ограниченность есть ($< \tau$)-ограниченность по Гурану). Эти утверждения получены им не в самой сильной форме, но мы не будем исследовать разложимость τ -ограниченных групп в общем, а сосредоточимся только на разложимости $\aleph_0$ -ограниченных групп, так как это важный класс топологических групп. В самом деле, Гуран доказал, что $\aleph_0$ -ограниченной является любая финально компактная группа или группа со счетным числом Суслина. Кроме того, класс $\aleph_0$ -ограниченных групп замкнут относительно прямых произведений и перехода к подгруппам, расширениям, гомоморфным непрерывным образам. Теперь отметим, что Гуран охарактеризовал $\aleph_0$ -ограниченные группы как подгруппы произведений групп со счетной базой.

Рассмотрим аналог теоремы 1 для $\aleph_0$ -ограниченных групп.

Если проанализировать доказательство теоремы 1, то можно заметить, что в перечне $\{K_\alpha : \alpha < \theta\}$ всех конечных подмножеств можно оставить только элементы какой-нибудь накрывающей базы этого семейства и их обратные в смысле групповой операции.

Для семейства $\mathcal{E}$ его подсемейство $\mathcal{D}$ называется *накрывающей базой*, если для всякого $E \in \mathcal{E}$ найдется $D \in \mathcal{D}$, $E \subset D$.

Минимум мощностей накрывающих баз семейства всех счетных подмножеств кардинала m обозначим через $\text{Cov}_{\aleph_0}(m)$. Ясно, что $\text{Cov}_{\aleph_0}$ определяется только мощностью множества, т.е. является функцией на кардиналах (введена автором в [9]).

ТЕОРЕМА 5. *Пусть G – несчетная группа и $\text{Cov}_{\aleph_0}(|G|) \leq |G|$. Тогда существует дизъюнктное семейство $\mathcal{A}$ мощности $|G|$ такое, что для любого $A \in \mathcal{A}$ выполнено $A \cdot K \neq G$ и $(G \setminus A) \cdot K \neq G$, каково бы ни было счетное подмножество $K \subset G$.*

Эта теорема доказывается в точности так же, как и теорема 1. Аналогом теоремы 2 и следствием теоремы 5 является

ТЕОРЕМА 6. *Пусть G – несчетная $\aleph_0$ -ограниченная группа и $\text{Cov}_{\aleph_0}(|G|) \leq |G|$. Тогда группа G максимально разложима.*

ТЕОРЕМА 7. *Пусть пространство (X, τ) есть растущая сумма своих подпространств $X = \bigcup \{X_n : n \in \omega\}$, причем $|X_n| < |X_{n+1}|$ для всякого $n \in \omega$ и всякое X_n является $|X_n|$ -разложимым. Если $\Delta\tau = |X|$, то X является $|X|$ -разложимым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{A}_n$ – дизъюнктное семейство мощности $|X_n|$ плотных в X_n подмножеств. Для $n > 0$ рассмотрим семейство $\mathcal{B}_n = \{A \in \mathcal{A}_n : A \cap X_{n-1} \neq \emptyset\}$. Тогда $|\mathcal{B}_n| \leq |X_{n-1}|$, значит $|\mathcal{A}_n \setminus \mathcal{B}_n| = |X_n|$. Это позволяет построить следующие

взаимно однозначные отображения $\varphi_n, n \in \omega$: φ_0 отображает $\mathcal{A}_0$ в $\mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{B}_1$, φ_1 отображает $\mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{B}_1$ в $\mathcal{A}_2 \setminus \mathcal{B}_2$ и т.д. Теперь образуем следующие семейства $\mathcal{P}_n, n \in \omega$: для всякого $A \in \mathcal{A}_0$ положим $P(A) = A \cup \varphi_0(A) \cup \varphi_1(\varphi_0(A)) \cup \dots$, и пусть $\mathcal{P}_0$ – множество всех таких $P(A)$; для всякого $A \in \mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{B}_1 \setminus \text{rug } \varphi_0$ положим $P(A) = A \cup \varphi_1(A) \cup \varphi_2(\varphi_1(A)) \cup \dots$, и пусть $\mathcal{P}_1$ – множество всех таких $P(A)$; для всякого $A \in \mathcal{A}_2 \setminus \mathcal{B}_2 \setminus \text{rug } \varphi_1$ положим $P(A) = A \cup \varphi_2(A) \cup \varphi_3(\varphi_2(A)) \cup \dots$, и пусть $\mathcal{P}_2$ – множество всех таких $P(A)$ и т.д. Семейство $\mathcal{P} = \bigcup \{\mathcal{P}_n : n \in \omega\}$, очевидно, дизъюнктно. Докажем, что каждый его элемент плотен в (X, τ) . Пусть V – непустое открытое подмножество в X . Тогда $V \cap X_n \neq \emptyset$ для бесконечного числа $n \in \omega$. Пусть $P \in \mathcal{P}$. Тогда $P \in \mathcal{P}_n$ для некоторого $n \in \omega$. Найдём $k > n$ такое, что $V \cap X_k \neq \emptyset$. Теперь заметим, что $P \cap V \cap X_k \neq \emptyset$. Плотность каждого элемента семейства $\mathcal{P}$ доказана. Далее, заметим, что $|\mathcal{P}| = \sum \{|\mathcal{P}_n| : n \in \omega\} = |X|$. Итак, X является $|X|$ -разложимым.

Теперь приведем некоторую информацию из [9] о функции $\text{Cov}_{\aleph_0}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. 1) Если $m^{\aleph_0} > \mathfrak{c}$, то $\text{Cov}_{\aleph_0}(m) = m^{\aleph_0}$.

2) Если $\text{cf}(m) = \omega$, то $\text{Cov}_{\aleph_0}(m) > m$.

3) Если $\text{cf}(m) > \omega$, то $\text{Cov}_{\aleph_0}(m) = \text{cf}(m) \cdot \sup\{\text{Cov}_{\aleph_0}(n) : n < m\}$.

Из этого предложения вытекает, в частности, что $\text{Cov}_{\aleph_0}(\aleph_n) = \aleph_n$ для всех $n \in \omega$, $n > 0$. Отсюда с учетом теоремы 6 получается

ТЕОРЕМА 8. *Всякая несчетная $\aleph_0$ -ограниченная группа мощности не больше $\aleph_\omega$ максимально разложима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для групп мощности меньше $\aleph_\omega$ утверждение следует из теоремы 6 и предложения 3, а для групп мощности $\aleph_\omega$ необходима еще ссылка на теорему 7.

ТЕОРЕМА 9 (обобщенная континуум-гипотеза). *Всякая несчетная $\aleph_0$ -ограниченная группа максимально разложима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В предположении обобщенной континуум-гипотезы, как следует из предложения 3, $\text{Cov}_{\aleph_0}(m) = m$, если $\text{cf}(m) > \omega$. Следовательно, если $\text{cf}(|G|) > \omega$, то воспользуемся теоремой 6. Если же $\text{cf}(m) = \omega$, то применим теорему 7.

Рассмотрим теперь другую популярную аксиому, используемую в общей топологии, – аксиому Мартина.

ТЕОРЕМА 10. *С аксиомой Мартина совместно утверждение о максимальной разложимости всякой несчетной $\aleph_0$ -ограниченной группы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем еще необходимую информацию о функции $\text{Cov}_{\aleph_0}$ из [9].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *В любом генерическом расширении посредством частичного упорядочения множества, удовлетворяющего условию Суслина, функция $\text{Cov}_{\aleph_0}$ такая же, как и в исходной модели.*

Возьмем теперь в качестве исходной какую-нибудь модель $\mathfrak{M}$, в которой выполняется обобщенная континуум-гипотеза. В $\mathfrak{M}$

$$\text{Cov}_{\aleph_0}(m) = \begin{cases} m, & \text{если } \text{cf}(m) > \omega, \\ m^+, & \text{если } \text{cf}(m) = \omega. \end{cases}$$

Расширим эту модель посредством частичного упорядочения множества, удовлетворяющего условию Суслина, так чтобы в генерическом расширении $\mathfrak{M}$ выполнялась необходимая форма аксиомы Мартина. Согласно предложению 4 в $\mathfrak{M}$ функция $\text{Cov}_{\aleph_0}$ такая же, как в $\mathfrak{M}$. Тогда в $\mathfrak{M}$ согласно теоремам 5 и 6 любая несчетная $\aleph_0$ -ограниченная группа максимально разложима.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теоремы 6, 8, 9, подобно теоремам 2, 3, можно уточнить: в исследуемых группах существует семейство подмножеств, каждое из которых плотно в любой $\aleph_0$ -ограниченной групповой топологии на заданной группе.

ВОПРОС 1. Доказуема ли в ZFC максимальная разложимость всякой $\aleph_0$ -ограниченной группы?

ВОПРОС 2. Разложимость всякого тихоновского псевдокомпактного пространства неизвестна. Эту проблему поставил С. Гарсиа-Феррейра. Но что будет, если к тихоновости добавить однородность или наличие на пространстве операции Мальцева (сохранив, конечно, псевдокомпактность)?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hewitt E. A problem of set-theoretic topology // Duke Math. J. 1943. V. 10. P. 309–333.
- [2] Малахин В. И. Экстремально-несвязные и близкие к ним группы // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220. № 1. С. 27–30.
- [3] Протасов И. В. Дискретные подмножества топологических групп // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 1. С. 150–151.
- [4] Comfort W. W., van Mill J. Groups with only resolvable topologies // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 120. P. 687–696.
- [5] Comfort W. W., Gladdiness H., van Mill J. Proper pseudocompact subgroups of pseudocompact Abelian groups // Ann. New York Acad. Sci. 1994. V. 728. P. 237–247.
- [6] Протасов И. В. Разложимость τ -ограниченных групп // Матем. студії. Праці Львівського матем. т-ва. 1995. Т. 5. С. 17–20.
- [7] Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.
- [8] Гуран И. И. О топологических группах, близких к финально компактним // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256. № 6. С. 1305–1307.
- [9] Malykhin V. I. Nowhere dense subsets and Booth's lemma // Comment. Math. Univ. Carolin. 1996. V. 37. № 2. P. 391–395.

Государственная академия управления им. С. Орджоникидзе
E-mail: matem@acman.msk.su

Поступило
13.03.95
Исправленный вариант
22.02.96