Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Рыбаков, Банаховы пространства со свойством РС,
Матем. заметки, 2004, том 76, выпуск 4, 568–577

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm132>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 17:04:18

УДК 517.98

БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА СО СВОЙСТВОМ РС

В. И. Рыбаков

Банахово пространство X имеет свойство РС (point of continuity), если для всякого w -замкнутого ограниченного множества $A \subset X$ тождественное отображение $(A, w) \rightarrow (A, \|\cdot\|)$ имеет точку непрерывности (w – слабая топология в X). Приведены некоторые критерии наличия у банахова пространства свойства РС. Указаны (для сопряженных банаховых пространств) связи пространств, имеющих свойство РС, с пространствами, имеющими свойство RN или WRN.

Библиография: 18 названий.

В работе приведены некоторые критерии наличия у банаховых пространств свойства РС (определение ниже). Также указаны связи (в случае сопряженного пространства) таких пространств с пространствами, обладающими свойством RN либо свойством WRN.

Условимся в дальнейшем (не оговаривая особо) через X обозначать банахово пространство, а через X^* – его сопряженное (линейные пространства рассматриваем над $\mathbb{R}$). Результат действия элемента $x^* \in X^*$ на $x \in X$ обозначаем $\langle x^*, x \rangle$ либо $x^*(x)$. Рассматриваемые топологические пространства предполагаем отдельными. Для компактного пространства K через $C(K)$ обозначаем банахово пространство вещественных непрерывных функций на K с $\sup$ -нормой. Если S – какое-либо множество, а F – какое-либо семейство вещественных функций на S , то $\sigma(S, F)$ – слабая топология на S , при которых все функции из F непрерывны.

Также обозначаем:

- топологию $\sigma(X, X^*)$ на X или на его подмножестве через w (эту топологию w называют *слабой*);
- единичный шар в X , т.е. $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ – через $B(X)$;
- тождественное отображение какого-либо множества на себя – через i ;
- замыкание множества A (в топологическом пространстве) – через $\bar{A}$.

Напомним некоторые понятия, используемые в работе (понятие фрагментируемости будет приведено для частного случая, рассматриваемого нами).

Пусть в X определена топология τ более слабая, чем нормированная, и $A \subset X$. Множество A называют τ -срезаемым (τ -huskable, см. [1, с. 327]), если для всякого τ -открытого U в X с $U \cap A \neq \emptyset$ и для всякого $\varepsilon > 0$ существует τ -открытое $V \subset U$ с $V \cap A \neq \emptyset$ и

$$\text{diam}(V \cap A) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in V \cap A\} < \varepsilon.$$

Если A w -срезаемо, то будем также говорить: A *срезаемо*. Для $A \subset X$ пространство (A, τ) называют *фрагментируемым нормой*, если для каждого непустого $B \subset A$ и всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое τ -открытое в X множество U , что $U \cap B \neq \emptyset$ и $\text{diam}(U \cap B) < \varepsilon$ (см. [2, п. 8.8] либо [3]). Если (A, w) фрагментируемо нормой $(A \subset X)$, то также говорим: A *фрагментируемо*.

Топологическое пространство E называют *пространством Намиоки*, если для всякого компактного пространства K и для всякой раздельно непрерывной функции $f: E \times K \rightarrow \mathbb{R}$ существует плотное в E G_δ -подмножество G такое, что f (как функция двух переменных) непрерывна в каждой точке из $G \times K$ [4]. Тихоновское пространство T *почти полно по Чеху* (см. [1, с. 322]), если T имеет плотное G_δ -подмножество, являющееся полным по Чеху (определение полного по Чеху пространства см. в [5, п. 3.9.1]).

Игра G_p на топологическом пространстве T определяется следующим образом [6, п. 2.3]: имеются два игрока α и β , они поочередно выбирают открытые в T непустые множества. Первым начинает игрок β , выбирая открытое множество U_1 , далее, игрок α выбирает открытое $V_1 \subset U_1$ и точку $x_1 \in T$. После того, как каждый произвел n выборов ($n \geq 1$), игрок β выбирает открытое $U_{n+1} \subset V_n$, а затем игрок α выбирает открытое $V_{n+1} \subset U_{n+1}$ и точку $x_{n+1} \in T$ и т.д. Выигрывает игрок α , если

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \right) \cap \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} \neq \emptyset;$$

в противном случае выигрывает β . Говорят, что пространство T *α -благоприятно* для игры G_p , если игрок α имеет выигрышную стратегию в этой игре, в противном случае T *α -неблагоприятно* для игры G_p . Аналогично определяются β -благоприятные и β -неблагоприятные для игры G_p пространства.

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – банахово пространство и A – его какое-либо замкнутое ограниченное подмножество. Следующие условия эквивалентны:

- 1) A *срезаемо*;
- 2) *точки непрерывности тождественного отображения* $i: (A, w) \rightarrow (A, \|\cdot\|)$ образуют плотное G_δ -подмножество пространства (A, w) ;
- 3) w -топология в A совпадает с нормированной на плотном G_δ -подмножестве в (A, w) ;
- 4) (A, w) *почти полно по Чеху*;
- 5) (A, w) *содержит плотное подпространство, являющееся полным по Чеху*;
- 6) (A, w) *является α -благоприятным для игры G_p* ;
- 7) (A, w) *является β -неблагоприятным для игры G_p* ;
- 8) (A, w) *является пространством Намиоки*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\implies$ 2) Пусть O_ε – объединение всех таких открытых в (A, w) множеств U , что $\text{diam}(U) < \varepsilon$. Множество O_ε открыто в (A, w) ; из определения срезаемости следует, что O_ε плотно в (A, w) . Пусть $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_{1/n}$; очевидно G – множество точек непрерывности отображения i , являющееся G_δ -множеством в (A, w) . Докажем плотность G в (A, w) . Возьмем произвольное непустое открытое в (A, w) множество V . Так как (A, w) *срезаемо*, то можно построить вложенную последовательность непустых открытых в (A, w) множеств $\{U_n, n \in \mathbb{N}\}$, содержащихся в V , таких, что замыкание

U_{n+1} в (A, w) содержится в U_n и $\text{diam}(U_n) \leq 1/n, n \in \mathbb{N}$. Вследствие полноты $(A, \|\cdot\|)$ существует

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \subset V.$$

Очевидно, $x \in G$. Это доказывает плотность G в (A, w) и, тем самым, утверждение 2).

2) $\Rightarrow$ 3) Пусть G – множество точек непрерывности тождественного отображения $(A, w) \rightarrow (A, \|\cdot\|)$. Тогда на G совпадают слабая и нормированная топологии. По условию G плотно в (A, w) и является в нем G_δ -подмножеством.

3) $\Rightarrow$ 4) Пусть G – такое плотное в (A, w) G_δ -подмножество, на котором совпадают слабая и нормированная топологии. Тогда G является G_δ -подмножеством и в $(A, \|\cdot\|)$, и в силу полноты последнего $(G, \|\cdot\|)$ полно по Чеху [5, шп. 4.3.23 и 4.3.26], а значит, и (G, w) полно по Чеху, что доказывает 4).

4) $\Rightarrow$ 5) Очевидно.

5) $\Rightarrow$ 6) Пусть G – плотное в (A, w) полное по Чеху подмножество. Тогда существует такая последовательность $\{\mathcal{A}_n, n \in \mathbb{N}\}$ открытых покрытий пространства (G, w) , что для всякой центрированной системы (F_α) замкнутых в (G, w) множеств, для которой при любом $n \in \mathbb{N}$ имеются такие F_α и $A_n \in \mathcal{A}_n$, что $F_\alpha \subset A_n$ выполняется: $\bigcap_\alpha F_\alpha \neq \emptyset$ [5, п. 3.9.2].

Определим стратегию t для игрока α в игре G_p на пространстве (A, w) следующим образом: $t(U_1, (V_1, x_n), \dots, U_n) = (V_n, x_n)$, где V_n – такое открытое в (A, w) множество, что $\overline{V}_n \subset U_n$, и имеется $A_n \in \mathcal{A}_n$, для которого $\overline{V}_n \cap G \subset A_n$ (здесь и ниже при доказательстве этой теоремы черта сверху означает замыкание в (A, w)), а точка $x_n \in V_n \cap G$. Пусть $F_n = \{x_k : k \geq n\} \cap G$; $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ – центрированная последовательность замкнутых множеств в (G, w) такая, что $F_n \subset A_n \in \mathcal{A}_n, n \in \mathbb{N}$. В таком случае существует $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Очевидно,

$$y \in \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \right) \cap \overline{\{x_n, n \in \mathbb{N}\}}.$$

Это доказывает, что пространство (A, w) α -благоприятно для игры G_p .

6) $\Rightarrow$ 7) Очевидно.

7) $\Rightarrow$ 8) Доказано в [4, теорема 5].

8) $\Rightarrow$ 1) Пусть (A, w) – пространство Намиоки. Положив $K = (B(X^*), w^*)$, где $w^* = \sigma(X^*, X)$, имеем: K компактно и отображение $f: (A, w) \times K \rightarrow \mathbb{R}$ такое, что $f(x, x^*) = x^*(x), x \in A, x^* \in K$, является раздельно непрерывным. Тогда (так как (A, w) – пространство Намиоки) существует такое плотное в (A, w) G_δ -подмножество G , что f непрерывна (как функция двух переменных) в каждой точке из $G \times K$, что равносильно (в силу компактности K) непрерывности отображения $i: (A, w) \rightarrow (A, \|\cdot\|)$ в каждой точке, принадлежащей G . Если теперь U – произвольное непустое открытое в (A, w) множество и $\varepsilon > 0$, то найдется $x_0 \in U \cap G$ и, значит, имеется окрестность V в (A, w) точки x_0 , так что $V \subset U$ и $\text{diam}(V) < \varepsilon$. Это доказывает, что A срезаемо.

ЗАМЕЧАНИЕ. В [1, п. 3.10] отмечается, что в случае сепарабельности (A, w) срезаемость множества A (A w -замкнуто и ограничено в X) эквивалентна условию, что (A, w) является бэровским пространством (счетное пересечение открытых плотных множеств плотно). Этот факт можно вывести из доказанной теоремы 1. Действительно, если (A, w) – сепарабельное бэровское пространство, то оно является пространством

Намиоки [4, теорема 6], а тогда (как выше установлено в теореме 1) множество A срезаемо. Обратно, если A срезаемо, то пространство (A, w) имеет (см. теорему 1, 5)) плотное подпространство, являющееся полным по Чеху, следовательно, бэровским. Значит, и (A, w) – бэровское пространство.

Норму на X называют *нормой Кадеца*, если на единичной сфере $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ совпадают слабая и нормированная топологии (в частности, если X имеет LUR-норму, то норма в X является нормой Кадеца [7, п. II.1.4]). Так как S плотно в $(B(X), w)$ и является в нем G_δ -подмножеством, то из теоремы 1 заключаем: *в случае, когда X имеет норму Кадеца, $B(X)$ срезаемо.*

Замкнутое подмножество Y в X имеет *свойство PC* (point of continuity, см. [1]), если для всякого w -замкнутого в Y ограниченного подмножества A тождественное отображение $(A, w) \rightarrow (A, \|\cdot\|)$ имеет точку непрерывности.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть Y – замкнутое подмножество банахова пространства X . Следующие условия эквивалентны:

- 1) для всякого w -замкнутого в Y ограниченного множества A тождественное отображение $(A, w) \rightarrow (A, \|\cdot\|)$ непрерывно на плотном G_δ -подмножестве в (A, w) ;
- 2) Y имеет свойство PC;
- 3) всякое ограниченное множество в Y является срезаемым;
- 4) для всякого ограниченного w -замкнутого в Y множества A пространство (A, w) является пространством Намиоки;
- 5) всякое ограниченное в Y множество является фрагментируемым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\implies$ 2) Очевидно.

2) $\implies$ 3) Пусть B – произвольное ограниченное в Y множество, U – какое-либо открытое в (X, w) множество, для которого $U \cap B \neq \emptyset$, и $\varepsilon > 0$. Если A – замыкание $U \cap B$ в (Y, w) , то A ограничено, и по условию имеется точка непрерывности отображения $i: (A, w) \rightarrow (A, \|\cdot\|)$. Тогда существует такое открытое в (X, w) множество V , что $V \cap A \neq \emptyset$ и $\text{diam}(V \cap A) < \varepsilon$. Положив $W = U \cap V$, имеем: $W \subset U$ – такое открытое в (X, w) множество, что $W \cap B \neq \emptyset$ и $\text{diam}(W \cap B) \leq \text{diam}(V \cap A) < \varepsilon$, что доказывает срезаемость B .

3) $\implies$ 4) Следует из теоремы 1.

4) $\implies$ 5) Пусть B – произвольное ограниченное множество в Y . Для доказательства фрагментируемости B возьмем произвольное (непустое) $C \subset B$ и обозначим через A замыкание C в (Y, w) ; пусть $\varepsilon > 0$. Из условия (применяя теорему 1) заключаем, что $i: (A, w) \rightarrow (A, \|\cdot\|)$ имеет точку непрерывности; следовательно, найдется w -открытое в X множество U , для которого $U \cap A \neq \emptyset$ и $\text{diam}(U \cap A) < \varepsilon$. В этом случае $U \cap C \neq \emptyset$ и $\text{diam}(U \cap C) < \varepsilon$, что доказывает фрагментируемость B .

5) $\implies$ 1) Пусть A – ограниченное w -замкнутое множество в Y . Докажем, что A срезаемо, тем самым будет установлена (согласно теореме 1) выполняемость условия 1). Пусть $\varepsilon > 0$, а U – w -открытое множество в X , для которого $U \cap A \neq \emptyset$; так как множество $U \cap A$ по условию фрагментируемо, то имеется w -открытое множество V , для которого $V \cap (U \cap A) \neq \emptyset$ и $\text{diam}[V \cap (U \cap A)] < \varepsilon$. Если $W = V \cap U$, то $W \subset U$, W открыто в (X, w) , $W \cap A \neq \emptyset$ и $\text{diam}(W \cap A) < \varepsilon$, что доказывает срезаемость множества A .

ЗАМЕЧАНИЕ. Если (в вышеформулированном следствии) Y является замкнутым линейным подпространством в X , то условие 5) этого утверждения равносильно следующему:

5') $B(Y)$ фрагментируемо.

Наличие у множества $Z \subset X$ свойства РС является “сепарабельно определенным” [1, п. 3.11], т.е. Z имеет свойство РС тогда и только тогда, когда всякое его сепарабельное (замкнутое в X) подмножество имеет свойство РС. В таком случае возникает необходимость дать критерий наличия свойства РС именно у сепарабельных множеств (некоторые критерии наличия свойства РС у сепарабельного банахова пространства анонсированы в [8]).

Подмножество $\Gamma \subset B(X^*)$ назовем *нормирующим для множества $A \subset X$* , если

$$\|x - y\| = \sup\{|\langle x^*, x - y \rangle|, x^* \in \Gamma\}, \quad x, y \in A.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть A – ограниченное сепарабельное замкнутое в банаховом пространстве X множество. Для того чтобы A имело свойство РС, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое счетное множество $\Gamma \subset B(X^*)$, нормирующее A , что $(A, \sigma(A, \Gamma))$ метризуемо полной метрикой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть A имеет свойство РС. Семейство w -открытых множеств

$$U(x_0; F, \varepsilon) = \{x \in X : |x^*(x) - x^*(x_0)| < \varepsilon, x^* \in F\},$$

где $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ и F – какое-либо конечное множество в $B(X^*)$, образует базу $\mathcal{B}$ w -топологии в X . Так как (A, w) фрагментируемо (см. следствие), то для всякого $\varepsilon > 0$ (согласно [3, п. 1.1]) существуют вполне упорядоченные семейства $\{S_\alpha : \alpha < \Gamma_\varepsilon\}$ и $\{U_\alpha : \alpha < \Gamma_\varepsilon\}$ такие, что

- 1) $A = \bigcup \{S_\alpha : \alpha < \Gamma_\varepsilon\}$;
- 2) $U_\alpha \in \mathcal{B}$, $\emptyset \neq S_\alpha \subset U_\alpha$ и $\text{diam}(S_\alpha) < \varepsilon$ при любом $\alpha < \Gamma_\varepsilon$;
- 3) если $\alpha < \beta < \Gamma_\varepsilon$, то $U_\alpha \cap S_\beta = \emptyset$.

Пространство (A, w) линделёфово, поэтому Γ_ε – счетный ординал. Всякое U_α имеет вид

$$U(x_\alpha; F_\alpha, \varepsilon_\alpha), \quad \varepsilon_\alpha > 0, \quad F_\alpha \text{ – конечное множество в } B(X^*), \quad \alpha < \Gamma_\varepsilon.$$

Положим $F_\varepsilon = \bigcup \{F_\alpha : \alpha < \Gamma_\varepsilon\}$. Пусть $\Gamma = \bigcup_{n=1}^\infty F_{1/n}$. Тогда Γ – счетное множество в $B(X^*)$; если Γ не нормирует A , то можно добавить к Γ счетное подмножество из $B(X^*)$ так, чтобы их объединение стало нормирующим для A (для простоты считаем, что Γ нормирующее для A). Вновь используя [3, п. 1.1], заключаем, что $(A, \sigma(A, \Gamma))$ фрагментируемо нормой пространства X . Фрагментируемое пространство $(A, \sigma(A, \Gamma))$ метризуемо и, значит, метризуемо полной метрикой [3, леммы 4.1 и 2.4 (1)].

Достаточность. Пусть Γ – такое счетное подмножество в $B(X^*)$, нормирующее A , что топология $\tau = \sigma(A, \Gamma)$ метризуема полной метрикой. Докажем, что A имеет свойство РС. Покажем вначале, что для всякого (непустого) замкнутого в (A, τ) множества E тождественное отображение $(E, \tau) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ имеет хотя бы одну точку непрерывности. Для доказательства последнего достаточно установить, что для любого компактного в (A, τ) множества K отображение $i: (K, \tau) \rightarrow (K, \|\cdot\|)$ имеет точку непрерывности [9, теорема 4].

Предположим, что последнее не выполняется, и пусть (K, τ) – такое компактное множество в (A, τ) , что $i: (K, \tau) \rightarrow (K, \|\cdot\|)$ не имеет ни одной точки непрерывности.

Пусть $\omega: (K, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$ – колебание функции i и

$$F_n = \left\{ x \in K : \omega(x) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Функция ω полунепрерывна сверху [10, гл. 9, § 2, предложение 4]; поэтому F_n замкнуты и (вследствие отсутствия точек непрерывности у отображения i) $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Хотя бы одно из F_n содержит непустое открытое в (K, τ) множество W ; пусть таковым будет F_{n_0} . Положим $\varepsilon = 1/(3n_0)$, а F – замыкание W в (K, τ) . В этом случае во всяком непустом открытом в (F, τ) множестве найдутся точки x_1, x_2 , для которых имеется $x^* \in \Gamma$ так, что $|x^*(x_1) - x^*(x_2)| > 2\varepsilon$.

Возьмем непустое открытое в (F, τ) множество U . Найдутся $x_1, x_2 \in U$ и $x_0^* \in \Gamma$, для которых $|x_0^*(x_1) - x_0^*(x_2)| > 2\varepsilon$; пусть в этом случае U_0, U_1 – такие открытые окрестности соответственно x_1, x_2 , что для любых $x \in \overline{U_0}$ и $y \in \overline{U_1}$ (черта сверху означает замыкание в (F, τ)) выполнено $|x_0^*(x) - x_0^*(y)| \geq \varepsilon$.

Далее подобным образом индукцией по $|d|$ построим для каждой конечной последовательности $d \in D$ (где D – семейство всех конечных последовательностей из 0 и 1, а $|d|$ – длина d) такие открытые в (F, τ) множества $U_d \neq \emptyset$ и $x_d^* \in \Gamma$, что

$$\text{а) } \overline{U_{d0}} \cup \overline{U_{d1}} \subset U_d;$$

$$\text{б) } |x_d^*(x) - x_d^*(y)| \geq \varepsilon \text{ для любых } x \in \overline{U_{d0}}, y \in \overline{U_{d1}}.$$

Пусть $\Delta = \bigcap_{n=1}^{\infty} [\bigcup \{ \overline{U_d} : |d| = n \}]$, $\Delta \subset F$ и для всякого $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (если $\sigma|n = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$) в Δ имеется $x_{\sigma} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_{\sigma|n}}$. Так как для различных $\sigma', \sigma'' \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ очевидно $\|x_{\sigma'} - x_{\sigma''}\| \geq \varepsilon$, то Δ несепарабельно в X , что противоречит сепарабельности $A \supset \Delta$.

Полученное противоречие показывает, что отображение $i: (E, \tau) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ имеет точку непрерывности.

Если же B – произвольное w -замкнутое множество в A , то пусть E – замыкание B в (A, τ) . Как отмечено в предыдущем абзаце, $i: (E, \tau) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ имеет точку непрерывности, которую обозначим x_0 . Отсюда (вследствие полноты $(B, \|\cdot\|)$) заключаем, что $x_0 \in B$. Этим устанавливается существование точки непрерывности у отображения $i: (B, \tau) \rightarrow (B, \|\cdot\|)$. Тогда отображение $i: (B, w) \rightarrow (B, \|\cdot\|)$ также имеет точку непрерывности, что доказывает наличие у множества A свойства PC.

Среди банаховых пространств, являющихся сопряженными, интенсивному исследованию подверглись классы пространств со свойством RN и со свойством WRN. Определение пространств со свойством RN будет дано ниже; определение пространств со свойством WRN (и RN) см., например, в [11], где они обозначаются соответственно WRNP (и RNP). Возникает вопрос: как связаны (для сопряженных пространств) с этими классами пространства, обладающие свойством PC?

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если X таково, что X^* имеет свойство PC, то X не содержит подпространства, изоморфного ℓ_1 , и, следовательно, X^* имеет свойство WRN.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим X содержит подпространство, изоморфное ℓ_1 . Тогда X^* содержит подпространство Z , изоморфное $L_1 (= L_1[0, 1])$ [12, с. 146]. Пусть f – изоморфизм L_1 на Z ; из условия заключаем, что $f(B(L_1))$ срезает (см. следствие). В

множестве $B(L_1)$ существуют w -замкнутые нигде не плотные в $(B(L_1), w)$ подмножества A_k такие, что $B(L_1) = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ [1, с. 347, пример 10]. Тогда

$$(f(B(L_1)), w) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (f(A_k), w),$$

т.е. множество $f(B(L_1))$ замкнуто в X^* , а $(f(B(L_1)), w)$ является множеством первой категории; следовательно, последнее пространство не является бэровским и, значит, не является α -благоприятным для игры G_p (см. [6, п. 2.3, рис. 1]). Согласно теореме 1 $f(B(L_1))$ не является срезаемым, что противоречит установленной выше срезаемости этого множества. Полученное противоречие доказывает, что X не имеет подпространства, изоморфного ℓ_1 ; следовательно, X^* имеет свойство WRN [13, теорема 12.1].

Существует пространство X , которое не содержит подпространств, изоморфных ℓ_1 (и, значит, X^* обладает свойством WRN), но X^* не имеет свойства PC.

ПРИМЕР. Используем пространство JT_{∞} , построенное в [14]. Пусть $T_{\infty} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathbb{N}^k$. Если $t = (n_1, \dots, n_k) \in T_{\infty}$, то $|t| = k$ и для $j \leq k$ $t|j = (n_1, \dots, n_j)$. В T_{∞} вводится частичное упорядочивание: для $s, t \in T_{\infty}$ полагаем $s \leq t$, если $|s| \leq |t|$ и (в случае $|s| = j$) $t|j = s$. Отрезком в T_{∞} называют подмножество S вида $S = \{s \in T_{\infty} : t \leq s \leq T\}$, $t, T \in T_{\infty}$. Максимальный отрезок называют *ветвью* (т.е. ветвь – множество вида $\gamma = \{\emptyset, (n_1), (n_1, n_2), \dots, (n_1, \dots, n_k), \dots\}$).

Если $x = x(t)$ – вещественнозначная функция, определенная на T_{∞} , с конечным носителем, то полагаем

$$\|x\|_{JT_{\infty}} = \sup \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{t \in S_j} (x(t)) \right)^2 \right)^{1/2},$$

где $\sup$ берется по всем семействам $(S_1, \dots, S_n)$ попарно непересекающихся отрезков в T_{∞} . Пространство JT_{∞} – пополнение этого нормированного пространства. Для $t \in T_{\infty}$ пусть e_t – такая функция на T_{∞} , что $e_t(s) = \delta_{ts}$, $s \in T_{\infty}$ (δ_{ts} – символ Кронекера), а $\{e_t^*, t \in T_{\infty}\}$ – биортогональные функционалы к $\{e_t, t \in T_{\infty}\}$ (т.е. $e_s^*(e_t) = \delta_{st}$).

Через B_{∞} авторы в [14] обозначают замкнутое линейное подпространство в JT_{∞}^* , порожденное семейством $\{e_t^*, t \in T_{\infty}\}$.

Докажем, что JT_{∞} не содержит подпространства, изоморфного ℓ_1 . Для этого достаточно установить, что всякая ограниченная последовательность в JT_{∞} содержит подпоследовательность, являющуюся слабой последовательностью Коши [15]. Доказательство последнего факта будем проводить подобно тому, как установлен этот результат для пространства JT в [16].

Пусть (x_n) – последовательность в JT_{∞} с $\|x_n\| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Выделим из нее подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке из T_{∞} (пусть эта подпоследовательность по-прежнему обозначается (x_n)). Если $x(t) = \lim_n x_n(t)$, $t \in T_{\infty}$, то, очевидно, $x \in JT_{\infty}$ (и $\|x\|_{JT_{\infty}} \leq 1$). Пусть $z_n = x_n - x$, $n \in \mathbb{N}$; $\lim_n x^*(z_n) = 0$ при любом $x^* \in B_{\infty}$.

Для произвольной ветви γ в T_{∞} рассмотрим линейный функционал x_{γ}^* на JT_{∞} , определенный равенством $x_{\gamma}^*(x) = \sum_{t \in \gamma} x(t)$, $x \in JT_{\infty}$; нетрудно установить, что $x_{\gamma}^* \in JT_{\infty}^*$.

Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_q$ – различные ветви в T_{∞} . Найдется такой номер m , что при $n > m$ множества $\gamma_1^n, \dots, \gamma_q^n$ попарно непересекающиеся (здесь для ветви $\gamma = \{\emptyset, (n_1, n_2), \dots\}$

через γ^k обозначаем подмножеств γ вида $\{(n_1, n_2, \dots, n_k), (n_1, \dots, n_{k+1}), \dots\}$. Тогда (если P_k – проектор в JT_∞ на замкнутое линейное подпространство в JT_∞ , порожденное $\{e_t : t \in T_\infty, |t| \geq k\}$) при $k > m$ имеем

$$\sum_{j=1}^q \langle x_{\gamma_j}^*, P_k z_n \rangle^2 = \sum_{j=1}^q \left[\sum_{t \in \gamma_j^k} z_n(t) \right]^2 \leq \|z_n\|^2 \leq 4, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Учитывая равенство $\lim_n z_n(t) = 0, t \in T_\infty$, и конечность множества $\gamma \setminus \gamma^k$ (для всякой ветви γ в T_∞) заключаем, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{j=1}^q \langle x_{\gamma_j}^*, z_n \rangle^2 \right] \leq 5. \quad (1)$$

Так как (1) выполняется для всяких ветвей $\gamma_1, \dots, \gamma_q$ и любого $q \in \mathbb{N}$, то имеются подпоследовательность (z_n^1) последовательности (z_n) и ветви γ_j числом не более 5 такие, что для этих ветвей существует $\lim_k \langle x_{\gamma_j}^*, z_{n_k}^1 \rangle \geq 1$, а для всех оставшихся ветвей γ в T_∞

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |\langle x_\gamma^*, z_{n_k}^1 \rangle| < 1.$$

Вновь используя (1), выделим подпоследовательность $(z_{n_k}^2)$ из $(z_{n_k}^1)$ такую, что среди оставшихся выше ветвей в T_∞ имеется конечное число ветвей $\gamma_1, \dots, \gamma_{k_2}$, для каждой из которых существует $\lim_k \langle x_{\gamma_j}^*, z_{n_k}^2 \rangle \geq 1/2$, а для всех вновь оставшихся ветвей γ

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |\langle x_\gamma^*, z_{n_k}^2 \rangle| < \frac{1}{2}$$

и т.д. С помощью диагонального процесса образуем подпоследовательность (z_{n_k}) такую, что существует $\lim_k \langle x_\gamma^*, z_{n_k} \rangle$ для любой ветви γ в T_∞ .

Используя [17, п. 1.1], можно заключить, что линейное подпространство в JT_∞^* , порожденное пространством B_∞ и семейством $\{x_\gamma^* : \gamma - \text{ветвь в } T_\infty\}$, всюду плотно в JT_∞^* . Следовательно, существует $\lim_k \langle x^*, z_{n_k} \rangle$ при любом $x^* \in JT_\infty^*$, а значит, существует и $\lim_k \langle x^*, x_{n_k} \rangle, x^* \in JT_\infty^*$.

Это доказывает, что всякая ограниченная в JT_∞ последовательность содержит подпоследовательность, являющуюся слабой последовательностью Коши. Тем самым установлено, что JT_∞ не содержит подпространства, изоморфного ℓ_1 . В то же время JT_∞^* не имеет свойства PC, ибо (как доказано в [14, п. 4.2]) B_∞ не имеет свойства PC.

Из вышеприведенных предложения и примера, а также работы [1] (где отмечено, что выполнимость свойства RN влечет выполнимость свойства PC [1, п. 3.14] и приведен пример сопряженного пространства, которое имеет PC, но не имеет RN [1, с. 347, пример 8]) заключаем, что для сопряженных банаховых пространств имеют место следующие включения:

$$\begin{aligned} \{\text{пространства со свойством RN}\} &\subsetneq \{\text{пространства со свойством PC}\} \\ &\subsetneq \{\text{пространства со свойством WRN}\}. \end{aligned}$$

Укажем для пространств, являющихся сопряженными, условия, достаточные для наличия у них свойства РС. Более точно, будет установлен критерий наличия свойства RN, обладание которым влечет (как выше отмечалось) наличие свойства РС.

Банахово пространство X имеет *свойство* RN, если для всякого измеримого пространства (S, Σ, μ) с конечной мерой и для всякого линейного непрерывного оператора $T: L_1(\mu) \rightarrow X$ существует ограниченная μ -измеримая функция $g: S \rightarrow X$ такая, что

$$Tf = \int fg \, d\mu, \quad f \in L_1(\mu), \quad (2)$$

где интеграл понимается в смысле Бохнера [18, с. 61, определение 3, и с. 63, теорема 5]; в этом случае говорят, что оператор T *представим интегралом Бохнера*. Известно, что равенства в (2) будут выполняться, если они выполнены для характеристических функций множеств из Σ .

ТЕОРЕМА 3. Пусть банахово пространство X не содержит подпространства, изоморфного ℓ_1 . Для того чтобы X^* имело свойство RN, необходимо и достаточно, чтобы для всякого сепарабельного в X^* подпространства Y существовало такое сепарабельное в X^* подпространство Z , что $Y \subset Z$ и Z дополнительно в X^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть X^* имеет свойство RN. Тогда X является пространством Асплунда [12, с. 151, теорема А]. Если Y – сепарабельное пространство в X^* , то существование требуемого сепарабельного $Z \subset X^*$ устанавливается, например, применением [7, п. 6.3.4].

Достаточность. (Эта часть следует из результатов Мусяла, см. [13]; для замкнутости изложения приведем набросок доказательства.) Чтобы установить, что X^* имеет свойство RN, достаточно доказать, что (если $L_1 = L_1[0, 1]$) всякий линейный непрерывный оператор $T: L_1 \rightarrow X^*$ представим интегралом Бохнера [18, с. 138, следствие 8]. Пусть задан такой оператор $T: L_1 \rightarrow X^*$ и $Y = T(L_1)$. Пространство Y сепарабельно в X^* и по условию существует непрерывный проектор P , область значений которого сепарабельна и $P(X^*) \supset Y$. Так как X не содержит подпространства, изоморфного ℓ_1 , то существует такая ограниченная интегрируемая по Петтису функция $h: [0, 1] \rightarrow X^*$, что

$$\langle x^{**}, T1_E \rangle = \int \langle x^{**}, h(s) \rangle 1_E(s) \, d\lambda, \quad E \in \Sigma, \quad x^{**} \in X^{**},$$

где λ – мера Лебега на Σ – совокупности измеримых по Лебегу подмножеств из $[0, 1]$, а 1_E – характеристическая функция множества E [12, с. 152, теорема В]. Из свойств интеграла Петтиса выводим, что функция $Ph: [0, 1] \rightarrow P(X^*)$ интегрируема по Петтису и

$$\langle x^{**}, P(T1_E) \rangle = \int \langle x^{**}, P(h(s)) \rangle 1_E(s) \, d\lambda, \quad E \in \Sigma, \quad x^{**} \in X^{**}. \quad (3)$$

Положим $g(s) = P(h(s))$, $s \in [0, 1]$. Так как функция $g: [0, 1] \rightarrow X^*$ ограничена и ее значения образуют сепарабельное множество, то g интегрируема по Бохнеру. В таком случае из (3) (вследствие интегрируемости по Бохнеру функции g и равенства $P(T1_E) = T1_E$, $E \in \Sigma$) имеем

$$T1_E = \int g(s) 1_E \, d\lambda, \quad E \in \Sigma, \quad (4)$$

(в (4) рассматриваемый интеграл – интеграл Бохнера). Это доказывает представимость оператора T интегралом Бохнера, следовательно, X^* – пространство со свойством RN.

ЗАМЕЧАНИЕ. В теореме 3 нельзя отбросить условия, что X не содержит подпространства, изоморфного ℓ_1 .

Действительно, если $X = C[0, 1]$, то X^* обладает тем свойством, что для всякого сепарабельного $Y \subset X^*$ существует такое сепарабельное в X^* подпространство $Z \supset Y$, которое дополнительно в X^* . Однако указанное X^* не имеет свойства RN. Это следует хотя бы из того, что X^* содержит подпространство $L_1[0, 1]$, которое не имеет (как выше отмечалось в доказательстве предложения) даже более слабого свойства PC.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Edgar G. A., Wheeler R. F. Topological properties of Banach spaces // Pacific J. Math. 1984. V. 115. № 2. P. 317–350.
- [2] Архангельский А. А. Компактность // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 50. М.: ВИНТИ, 1989. С. 5–128.
- [3] Namioka I., Pol R. σ -fragmentability and analyticity // Mathematika. 1996. V. 43. P. 172–181.
- [4] Saint-Raymond J. Jeux topologiques et espaces de Namioka // Proc. Amer. Math. Soc. 1983. V. 87. № 3. P. 499–504.
- [5] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
- [6] Mercourakis S., Negreponis S. Banach spaces and topology. II // Recent Progress in General Topology (Prague, 1991). Amsterdam: North-Holland, 1992. P. 493–536.
- [7] Deville R., Godefroy G., Zizler V. Smoothness and Renormings in Banach Spaces. New York: Pitman, 1993.
- [8] Фонф В. П. Об банаховых пространствах, обладающих свойством (PC) // Докл. Болгарской АН. 1990. Т. 43. № 5. С. 15–16.
- [9] Stegall C. Functions of the first Baire class with values in Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1991. V. 111. № 4. P. 481–491.
- [10] Бурбаки Н. Общая топология. М.: Наука, 1975.
- [11] Bourgin R. D. Geometric Aspects of Convex Sets with Radon–Nikodým property. Lecture Notes in Math. V. 993. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [12] Ridde L., Uhl J. J. Martingales and the fine line between Asplund spaces and spaces not containing a copy of ℓ_1 // Lecture Notes in Math. V. 939. New York: Springer-Verlag, 1981. P. 145–156.
- [13] Musial K. Topics in the theory of Pettis integration // Rend. Inst. Mat. Univ. Trieste. 1991. V. 23. P. 177–262.
- [14] Ghoussoub N., Maurey B. G_δ -embeddings in Hilbert space // J. Funct. Anal. 1985. V. 61. P. 72–97.
- [15] Rosenthal H. A characterization of Banach spaces containing ℓ_1 // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1971. V. 71. P. 2411–2413.
- [16] Lindenstrauss Y., Stegall C. Examples of separable spaces which do not contain ℓ_1 and whose duals are not separable // Studia Math. 1975. V. 54. P. 81–105.
- [17] Ghoussoub N., Maurey B., Schachermayer W. A counterexample to a problem on points of continuity in Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1987. V. 92. P. 278–282.
- [18] Diestel J., Uhl J. J. Vector Measures. Math. Surveys. V. 15. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1977.

Тульский государственный педагогический университет

Поступило
20.01.2003