Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Немировский, Голоморфные функции и вложенные вещественные поверхности, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 4, 599–606

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1320>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 03:24:27

УДК 517.55+515.17

ГОЛОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ И ВЛОЖЕННЫЕ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

С. Ю. Немировский

Работа посвящена изучению топологических условий, необходимых и достаточных для того, чтобы вложенная вещественная поверхность лежала в строго псевдовыпуклой области на комплексной поверхности. Полученные результаты применяются к построению штейновых областей на алгебраических многообразиях и описанию оболочек голоморфности вещественных поверхностей в $\mathbb{C}P^2$ и других комплексных поверхностях.

Библиография: 15 названий.

Введение. Известно, что если индекс самопересечения комплексной кривой $S \subset X$ на комплексной поверхности положителен, то любая голоморфная в окрестности этой кривой функция постоянна. В частности, такая кривая не может лежать в некомпактной голоморфно выпуклой области.

В работе [1] было показано, что если неособая комплексная кривая $S \subset X$ такова, что $c_1(X) \cdot [S] \leq 0$, то существует вложенная вещественная поверхность S' , получающаяся деформацией S и имеющая базис штейновых окрестностей. Это утверждение использовалось для построения штейновых строго псевдовыпуклых областей на комплексных алгебраических поверхностях с неположительным первым классом Черна, пересекающихся с любой комплексной кривой и потому не лежащих ни в какой аффинной части поверхности.

Эту работу мы начинаем с построения штейновых областей с подобными свойствами на *любом* комплексном алгебраическом многообразии. Впрочем, в силу теоремы Сью [2] о штейновых окрестностях штейновых подмногообразий ключевым оказывается именно случай комплексной поверхности.

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – комплексное алгебраическое многообразие размерности не меньше 2. Тогда на X существует штейнова строго псевдовыпуклая область U такая, что для любой комплексной гиперповерхности $S \subset X$ класс когомологий $[S] \in H^2(U, \mathbb{R})$ отличен от нуля.

На комплексных поверхностях с *положительным* первым классом Черна $c_1(X)$ построенные в теореме 1 штейновы области уже не являются окрестностями вещественных деформаций комплексных кривых. Оказывается, что содержащиеся в этих областях и используемые для их построения вложенные вещественные поверхности не удовле-

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01002, и Международного научного фонда, грант а97-1850.

творяют формуле для рода комплексной кривой. Точнее говоря, для строго псевдовыпуклых областей на комплексных поверхностях (штейновы области допускают исчерпание такими областями) справедлив вариант *обобщенной гипотезы Тома*.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $S \subset X$ – вложенная компактная вещественная ориентированная поверхность в строго псевдовыпуклой области X на двумерном комплексном многообразии, причем индекс самопересечения $S^2 = [S] \cdot [S] \geq 0$. Тогда имеет место неравенство

$$|c_1(X) \cdot [S]| + S^2 \leq \max\{0, 2g(S) - 2\}, \quad (1)$$

где $g(S)$ – род поверхности S .

Доказательство этой теоремы использует недавно открытые инварианты Зайберга–Виттена и теорему об “алгебраизации” Стаута и Лемперта [3]. В частном случае, когда $S \subset \partial X$, подобное неравенство было получено Элиашбергом и др. (см. обзор [4]).

Для областей на некоторых комплексных поверхностях мы можем уточнить наши результаты, используя описание псевдовыпуклых областей над произведениями комплексных проективных пространств, данное Фуджита [5], [6]. Так, например, в случае $\mathbb{CP}^2$ имеет место

ТЕОРЕМА 3. Пусть $S \subset \mathbb{CP}^2$ – вложенная ориентированная вещественная поверхность степени $d > 0$ и рода $g = g(S)$. Тогда изотопная S вложенная поверхность S' , в окрестности которой есть непостоянные голоморфные функции, существует в том и только том случае, когда $g \geq \frac{1}{2}(d^2 + 3d + 2)$.

В частности, мы получаем положительное решение следующей известной проблемы А.Г. Витушкина: доказать, что в окрестности негомологичной нулю вложенной двумерной сферы в $\mathbb{CP}^2$ нет непостоянных голоморфных функций. Заметим, что такое утверждение справедливо для тора и кренделя, а также для любой вложенной вещественной поверхности, гомологичной комплексной кривой того же рода.

Отметим, что в случае, когда вложенная сфера симплектична относительно формы Фубини–Штуди, решение проблемы Витушкина было получено в работе Ивашковича и Шевчишина [7], как частный случай теоремы об оболочках мероморфности симплектических сфер.

Работа построена следующим образом. В п. 1 мы завершаем начатое в [1] доказательство теоремы 1, п. 2 посвящен свойствам инвариантов Зайберга–Виттена, в п. 3 мы доказываем теоремы 2 и 3 и получаем другие приложения (теоремы 4 и 5) в духе [7] и [8].

1. Построение штейновых окрестностей. Доказательство теоремы 1 основано на следующем утверждении.

ЛЕММА 1. Пусть $S \subset X$ – компактная гладкая комплексная кривая на комплексной поверхности. Тогда существует гомологичная S вложенная вещественная поверхность $S' \subset X$, имеющая базис штейновых окрестностей.

Если $c_1(X) \cdot [S] \leq 0$, то в качестве S' можно взять вещественную деформацию S .

Если $c_1(X) \cdot [S] > 0$, то можно выбрать поверхность S' любого рода

$$g(S') \geq g(S) + c_1(X) \cdot [S]. \quad (2)$$

Прежде чем доказывать эту лемму, отметим, что условие (2) является необходимым. Действительно, род неособой кривой на комплексной поверхности задается формулой

$$g(S) = \frac{S^2 - c_1(X) \cdot [S]}{2} + 1, \quad (3)$$

поэтому из теоремы 2 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Если $S^2 \geq 0$, $c_1(X) \cdot [S] > 0$ и S' содержится в штейновой области, то имеет место (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Учитывая результаты из [1], остается показать, что если $c_1(X) \cdot [S] > 0$, то найдется гомологичная S вложенная вещественная поверхность рода (2), имеющая только гиперболические комплексные точки.

Рассмотрим сначала гомологичную S вложенную поверхность S_0 рода

$$g' \geq g(S) + c_1(X) \cdot [S] = \frac{S^2 + c_1(X) \cdot [S]}{2} + 1.$$

Такая поверхность существует, поскольку в наших предположениях $g' > g(S)$. Приводя S_0 в общее положение, по формулам Лая получаем

$$I_+ = 2 - 2g' + S^2 \leq 0, \quad I_- = I_+ - c_1(X) \cdot [S] < 0,$$

где мы используем стандартное обозначение $I_{\pm} = e_{\pm} - h_{\pm}$, а $e_{\pm}, h_{\pm}$ суть числа эллиптических и гиперболических комплексных точек с комплексной и антикомплексной ориентацией.

Применяя результаты Харламова и Элиашберга точно так же, как в [1], получаем изотопную S_0 вложенную вещественную поверхность S' с $e_+ = e_- = 0$. Такая поверхность имеет базис штейновых окрестностей, что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ. Фактически, использованное здесь рассуждение доказывает следующее: если S – ориентированная вложенная вещественная поверхность такая, что справедливы оба неравенства $2 - 2g(S) + S^2 \pm c_1(X) \cdot [S] \leq 0$, то существует изотопная S поверхность, имеющая базис штейновых окрестностей. Действительно, приведенное условие означает в точности, что $I_{\pm} \leq 0$. Из этого утверждения следует, что неравенство (1) неулучшаемо, по крайней мере, если $g(S) \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим алгебраическое многообразие X размерности $n \geq 2$. Пусть $H_j, j = 1, \dots, n-1$, – трансверсально пересекающиеся гиперплоские сечения X . Тогда $Y = \bigcap_{j=1}^{n-2} H_j$ – вложенная в X комплексная поверхность и $S = Y \cap H_{n-1}$ – неособая кривая на $Y \subset X$ такая, что для любой комплексной гиперповерхности $C \subset X$ индекс пересечения $[C] \cdot [S] > 0$.

Пусть теперь $U \subset Y$ – штейнова область, построенная в лемме 1 по Y и S . По теореме Сюю [2] существует штейнова область $V \subset X$ такая, что $V \cap Y = U$. Взяв строго псевдовыпуклую подобласть в V , по-прежнему содержащую S' , мы получаем искомую область в X .

ЗАМЕЧАНИЕ. В частном случае $X = \mathbb{CP}^n$ вопрос о существовании строго псевдотупой области, пересекающей все комплексные гиперповерхности, был поставлен Хираи [9]. Первые примеры таких областей были получены Фабром в [10], однако для построенных им областей $H^2(U, \mathbb{Z}) = 0$ и существуют гладкие вещественные $(2n-2)$ -мерные поверхности, гомологичные комплексным гиперповерхностям, но уже не пересекающие область.

2. Инварианты Зайберга–Виттена и оценки для вложенных вещественных поверхностей. Пусть X – компактное ориентированное гладкое четырехмерное многообразие. Пусть задано комплексное линейное расслоение L на X такое, что его первый класс Черна $c = c_1(L) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ удовлетворяет следующим условиям:

$$c \equiv w_2(X) \pmod{2}, \quad (4)$$

$$c^2 = 2\chi(X) + 3\sigma(X), \quad (5)$$

где $w_2(X)$ – второй класс Штифеля–Уитни многообразия X , а $\chi(X)$ и $\sigma(X)$ – соответственно эйлерова характеристика и сигнатура X .

Предположим, что $b^+(X) = b^{2+}(X)$ – число положительных квадратов в форме пересечения на $H^2(X, \mathbb{R})$ – строго больше 1. Тогда определен инвариант Зайберга–Виттена $SW(L) \in \mathbb{Z}_2$, зависящий только от расслоения L и ориентированной гладкой структуры многообразия X (см., например, [11]–[13]).

Нетривиальность инварианта Зайберга–Виттена означает существование решений уравнений Зайберга–Виттена, априорные оценки которых позволяют в свою очередь получать неравенства типа гипотезы Тома. Следующий результат есть в сущности лемма 9 из работы [11].

ЛЕММА 2. Пусть X – компактное четырехмерное многообразие с $b^+(X) \geq 2$ и L – линейное расслоение на X такое, что $SW(L) \neq 0$. Тогда для любой вложенной вещественной ориентированной поверхности $S \subset X$ с индексом самопересечения $S^2 = 0$ имеет место неравенство

$$|c_1(L) \cdot [S]| \leq \max\{0, 2g(S) - 2\},$$

где $g(S)$ – род поверхности S .

Нужный нам (и основной) пример расслоения L получается следующим образом. Пусть X – компактная кэлерава комплексная поверхность. Рассмотрим расслоение $L = \Lambda^{02}$ с первым классом Черна $c_1(L) = c_1(X)$.

Условие (4) следует из определения характеристических классов. Условие (5) есть в точности теорема Тома–Хирцебруха о сигнатуре. Таким образом, инвариант $SW(L)$ корректно определен. Кроме того, известно, что в этой ситуации имеет место

ЛЕММА 3 (см. [12], [13]). Пусть X – кэлерава поверхность с $b^+(X) \geq 2$. Тогда для линейного расслоения L с $c_1(L) = c_1(X)$ инвариант Зайберга–Виттена отличен от нуля.

Согласно результатам Таубса аналогичное утверждение справедливо и для симплектического многообразия X .

Теперь, следуя [11], мы покажем, что справедлива

ОСНОВНАЯ ОЦЕНКА. Пусть X – кэлерова поверхность с $b^+(X) \geq 2$. Тогда для вложенной ориентированной поверхности S с $S^2 \geq 0$ имеет место неравенство (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Раздуем поверхность X в $n = S^2$ точках; обозначим полученную поверхность через $\tilde{X}$, исключительные кривые раздутий через E_j , а соответствующее стягивание через $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$.

Хорошо известно, что поверхность $\tilde{X}$ также кэлерова, $b^+(\tilde{X}) = b^+(X) \geq 2$, и, наконец, $c_1(\tilde{X}) = \pi^*c_1(X) - \sum_j [E_j]$.

Заметим, что доказываемое неравенство не зависит от выбора ориентации на S , следовательно, сразу можно считать, что $c_1(X) \cdot [S] \leq 0$. Пусть Σ – внутренняя связная сумма S с $\overline{E_j}$ в $\tilde{X}$ (собственный прообраз S при π). Тогда $[\Sigma] = \pi^*[S] - \sum_j [E_j]$, и род поверхности Σ равен роду S .

Применяя к Σ и расслоению L с $c_1(L) = c_1(\tilde{X})$ леммы 2 и 3, мы получаем оценку

$$\begin{aligned} \max\{0, 2g(S) - 2\} &\geq \left| \left(\pi^*c_1(X) - \sum_j [E_j] \right) \cdot \left(\pi^*[S] - \sum_j [E_j] \right) \right| \\ &= |c_1(X) \cdot [S] - S^2| = |c_1(X) \cdot [S]| + S^2, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ. Так называемая *обобщенная гипотеза Тома* (полностью доказанная в [14]) утверждает, что для любой вложенной вещественной поверхности, гомологичной неособой комплексной кривой с положительным индексом самопересечения на комплексной алгебраической поверхности, справедливо неравенство $-c_1(X) \cdot [S] + S^2 \leq 2g(S) - 2$. Впрочем, наиболее интересный случай этой гипотезы относится к $\mathbb{CP}^2$, т.е. к комплексной поверхности с $b^+ = 1$ (см. [11]).

3. Доказательство основных теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. По теореме Стаута–Лемперта [3] любая строго псевдовыпуклая область биголоморфно эквивалентна такой области U в неособом проективном многообразии Y , что существует голоморфное отображение $f: Y \rightarrow \mathbb{CP}^N$, являющееся вложением вне U и отображающее $\overline{U}$ в $\mathbb{C}^N$.

Таким образом, некоторая окрестность данной вложенной поверхности S биголоморфно вкладывается в открытое множество на алгебраической поверхности Y , имеющее вид $Y \setminus H$, где $H = f^{-1}(\mathbb{CP}_{\infty}^{N-1})$ – прообраз “бесконечно удаленной” гиперплоскости.

Сразу будем предполагать, что $[S] \neq 0$, иначе искомая оценка тривиальна. Легко видеть, что $b^+(Y) \geq 2$. Действительно, в противном случае в силу невырожденности формы пересечений из $H^2 > 0$ и $[H] \cdot [S] = 0$ следовало бы $S^2 < 0$, что неверно.

Итак, теорема 2 следует из основной оценки (см. п. 2), примененной к $S \subset Y$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие понятия. Пусть X – комплексное многообразие. (*Неразветвленной*) *областью* над X называется комплексное многообразие U вместе с локально биголоморфным отображением (проекцией) $p: U \rightarrow X$. Область над X называется *псевдовыпуклой* (в смысле Картана), если для любой точки $x \in X$ найдется окрестность $V \ni x$ такая, что $p^{-1}(V)$ – штейново многообразие.

Говорят, что область (U_1, p_1) содержит область (U_2, p_2) , если существует отображение $j: U_2 \rightarrow U_1$ такое, что $p_1 \circ j = p_2$. *Оболочкой голоморфности* области (U, p) называется максимальная содержащая ее область $(\tilde{U}, \tilde{p})$, на которую продолжаются все голоморфные в U функции. По классической теореме Картана–Туллена оболочка голоморфности любой области псевдовыпукла.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Согласно теореме Фуджиты [5] (эта ситуация изучалась позднее А. Такеучи и А. Хиршовитцем) псевдовыпуклая область над комплексным проективным пространством либо совпадает с $\mathbb{CP}^n$, либо является многообразием Штейна. В первом случае, очевидно, $\theta(U) = \mathbb{C}$.

Итак, если в окрестности вложенной вещественной поверхности в $\mathbb{CP}^2$ есть непостоянные голоморфные функции, то окрестность этой поверхности лежит в двумерном штейновом многообразии, и применима теорема 2. Но для поверхности S степени d (т.е. имеющей индекс пересечения d с проекттивными прямыми), очевидно, $c_1(\mathbb{CP}^2) \cdot [S] = 3d$ и $S^2 = d^2$, что и дает требуемое неравенство.

Обратно, если неравенство из теоремы 3 выполнено, то построение п. 1 позволяет найти изотопную S поверхность, имеющую штейновы окрестности, в которых, разумеется, есть непостоянные голоморфные функции.

Результаты типа теоремы 3 справедливы и для других комплексных поверхностей. Например, согласно работе Фуджиты [6] псевдовыпуклая область над произведением проективных пространств либо является штейновым многообразием, либо содержит компактное аналитическое подмножество положительной размерности. Если теперь применить теорему 2, то получится следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $S \subset \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ – вложенная вещественная поверхность, гомотопическая комплексной кривой того же рода. Тогда оболочка голоморфности S содержит компактную комплексную кривую.

Действительно, S не может содержаться в штейновой поверхности в силу теоремы 2 и формулы (3) для рода неособой комплексной кривой.

Можно, конечно, и более точно сформулировать ограничения на род поверхности S . Для справедливости утверждения теоремы 4 достаточно (а в силу построений п. 1 и необходимо) потребовать, чтобы $g(S) < g(S_0) + 2(a + b) = ab + a + b + 1$, где S_0 – гомотопическая S комплексная кривая и $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ – ее индексы пересечения с вертикальными и горизонтальными прямыми в $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$.

Рассмотрим еще один случай, когда применим описанный выше метод.

Пусть $X = \mathbb{CP}^1 \times Y$ – прямое произведение $\mathbb{CP}^1$ на *некомпактную* связную риманову поверхность. Хорошо известно, что такая риманова поверхность Y является многообразием Штейна. В этой ситуации вновь можно получить удобное описание оболочек голоморфности.

ЛЕММА 4. Пусть Z – многообразие Штейна. Тогда оболочка голоморфности $\tilde{U}$ любой области $U \subset \mathbb{CP}^1 \times Z$ либо является многообразием Штейна, либо имеет вид $\mathbb{CP}^1 \times \tilde{V}$, где $V = \pi_Z(U)$, а π_Z – проекция на второй сомножитель.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если $\tilde{U}$ содержит компактное аналитическое подмножество положительной размерности, то обязательно имеет указанный в лемме вид. Действительно, в силу штейновости Z такое (связное) подмножество в оболочке должно проектироваться на некоторый слой $\mathbb{CP}^1 \times \{a\}$. Далее, в силу односвязности $\mathbb{CP}^1$ эта

проекция взаимно однозначна. Таким образом, любая функция $f \in \mathcal{O}(U)$ продолжается (как аналитическая) до голоморфной функции в окрестности $\mathbb{CP}^1 \times \{a\}$. По теореме единственности отсюда следует, что f постоянна вдоль слоев π_Z . Очевидно, любая такая функция продолжается в $\mathbb{CP}^1 \times \tilde{V}$, $V = \pi_Z(U)$, т.е. эта голоморфно выпуклая область и есть оболочка голоморфности U .

Идея завершения доказательства заимствована из работы [15]. Предположим, что $\tilde{U}$ не содержит нетривиальных компактных аналитических подмножеств. Рассмотрим вложение $Z \subset \mathbb{C}^n$ и голоморфную ретракцию $\xi: B \rightarrow Z$ штейновой окрестности $B \supset Z$ на Z . Пусть (W, π) – прообраз области $(\tilde{U}, \tilde{p})$ при отображении $\text{Id} \times \xi$, т.е. многообразии

$$W = \{(x, t, y) \in \tilde{U} \times \mathbb{CP}^1 \times B \mid \tilde{p}(x) = (t, \xi(y))\}$$

с естественной проекцией $\pi: W \rightarrow \mathbb{CP}^1 \times B \subset \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^n \subset \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^n$. В силу псевдовыпуклости $(\tilde{U}, \tilde{p})$ и штейновости B область (W, π) над $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^n$ псевдовыпукла. Кроме того, по построению W содержит $\tilde{U}$ в качестве подмногообразия и не содержит компактных аналитических подмножеств положительной размерности. Согласно упомянутому результату Фуджиты [6] многообразие W штейново, значит $\tilde{U}$ также штейново, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $S \subset X = \mathbb{CP}^1 \times Y$ – вложенная ориентированная вещественная поверхность рода $g = g(S)$ в произведении сферы Римана на некомпактную риманову поверхность. Пусть $m > 0$ – степень проекции S на слой $\mathbb{CP}^1$. Если $g < m + 1$, то любая функция, голоморфная в некоторой области $U \supset S$, голоморфно продолжается в область $\mathbb{CP}^1 \times \pi_Y(U)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что $[S] = m[\mathbb{CP}^1]$. Таким образом, $S^2 = 0$ и $c_1(X) \cdot [S] = 2m$. По теореме 2, если оболочка голоморфности U штейнова, то $g \geq m + 1$. Доказательство завершается применением леммы 4.

Отметим, что в силу результатов п. 1 условие на род в теореме 5 является точным.

ЗАМЕЧАНИЕ. Впервые теорема 5 была получена другим методом Е. М. Чиркой [8] в частном случае, когда $S = \Gamma_f$ – график гладкого отображения $f: \mathbb{CP}^1 \rightarrow Y$ (отсюда следует, что $m = 1$ и $g = 0$).

Результаты этого пункта нетрудно обобщить на некоторые погруженные поверхности. А именно, пусть S – погруженная ориентированная вещественная поверхность в ориентированном четырехмерном многообразии и пусть все особые точки S – это простые двойные точки с локальным индексом самопересечения $+1$. Заменяя каждую такую точку вложенной приклеенной ручкой, мы получаем гомологичную S вложенную поверхность большего рода. Таким образом, для погруженной поверхности с положительными индексами самопересечения теоремы 2–5 справедливы с заменой g на $g + \kappa$, где κ – число двойных точек S .

Отметим, что, рассматривая оболочки мероморфности вместо оболочек голоморфности, можно получить аналоги теорем 3–5 для мероморфных функций. Например, если для вложенной вещественной поверхности $S \subset \mathbb{CP}^2$ выполнено неравенство из теоремы 3, то любая мероморфная в окрестности S функция рациональна.

Автор благодарен академику РАН А. Г. Витушкину за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Немировский С. Ю. Штейновы области на алгебраических многообразиях // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 2. С. 295–298.
- [2] Siu Y.-T. Every Stein subvariety admits a Stein neighborhood // Invent. Math. 1976. V. 38. № 1. P. 89–100.
- [3] Lempert L. Algebraic approximations in analytic geometry // Invent. Math. 1995. V. 121. № 2. P. 335–354.
- [4] Bennequin D. Topologie symplectique, convexité holomorphe et structures de contact (d'après Y. Eliashberg, D. McDuff et al.) // Astérisque. 1990. № 189–190. P. 285–323.
- [5] Fujita R. Domaines sans point critique intérieur sur l'espace projectif complexe // J. Math. Soc. Japan. 1963. V. 15. № 4. P. 443–473.
- [6] Fujita R. Domaines sans point critique intérieur sur l'espace produit // J. Math. Kyoto Univ. 1965. V. 4. № 3. P. 493–514.
- [7] Ivashkovich S., Shevchishin V. Pseudoholomorphic curves and envelopes of meromorphy of two-spheres in $\mathbb{CP}^2$. Preprint, 1995.
- [8] Чирка Е. М. Обобщенная лемма Гартогса и нелинейное $\bar{\partial}$ -уравнение // Сб. “Комплексный анализ в современной математике”, посвящ. Б. В. Шабату. М.: Фазис, 1997. С. 19–30.
- [9] Hirai E. Domaine d'holomorphic sur un espace projectif complexe // J. Math. Kyoto Univ. 1970. V. 10. № 1. P. 83–102.
- [10] Fabre B. Sur l'intersection d'une surface de Riemann avec des hypersurfaces algebriques // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. 1996. V. 322. № 4. P. 371–376.
- [11] Kronheimer P. B., Mrowka T. S. The genus of embedded surfaces in the projective plane // Math. Res. Lett. 1994. V. 1. № 6. P. 797–808.
- [12] Morgan J. W. The Seiberg–Witten Equations and Applications to the Topology of Smooth Four-Manifolds. Math. Notes. V. 44. Princeton (N.J.): Univ. Press, 1996.
- [13] Witten E. Monopoles and four-manifolds // Math. Res. Lett. 1994. V. 1. № 6. P. 769–796.
- [14] Morgan J. W., Szabó Z., Taubes C. H. A product formula for Seiberg–Witten invariants and the generalized Thom conjecture // J. Differential Geom. 1996. V. 44. № 4. P. 706–788.
- [15] Matsugu Y. The Levi problem for a product manifold // Pacific J. Math. 1973. V. 46. № 1. P. 231–233.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: stefan@mcsmc.ru

Поступило
03.11.97
Исправленный вариант
09.12.97