Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Рожков, Максимальные локально конечные подгруппы в группе Григорчука, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 4, 617–624

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1322>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 09:32:55

УДК 512.54

МАКСИМАЛЬНЫЕ ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫЕ ПОДГРУППЫ В ГРУППЕ ГРИГОРЧУКА

А. В. Рожков

Явно строятся примеры максимальных локально конечных подгрупп в 3-порожденной 2-группе Григорчука, изучаются их свойства.

Библиография: 5 названий.

Речь идет о 3-порожденной 2-группе Григорчука Γ [1], активно изучаемой в последнее время. Р. И. Григорчук доказал, что она имеет промежуточный рост, И. Г. Лысёнок описал ее определяющие соотношения. К настоящему моменту описаны также ее конечные, абелевы, нормальные подгруппы, найдены ряды коммутантов, нижний центральный ряд, описаны централизаторы и повторные централизаторы элементов [2] и т.д.

Поскольку эта группа нелокально конечна, представляет несомненный интерес изучение ее максимальных локально конечных подгрупп. Их существование следует из абстрактной теории групп, однако построение конкретных примеров сопряжено с большими трудностями. Отметим также, что всякая максимальная локально конечная подгруппа в группе Григорчука, очевидно, совпадает со своим нормализатором, что дает еще один пример подобных подгрупп в группе Γ . Ранее было известно, что самонормализующимися являются централизаторы инволюций [2] и стабилизаторы бесконечных путей [3].

Основным результатом статьи является явное построение максимальных локально конечных подгрупп F, G, H и выяснение ряда их интересных свойств. Оказывается, что в них вкладывается любая конечная 2-группа, что их централизаторы во всей группе автоморфизмов $\text{Aut } T$ дерева T тривиальны и т.д.

В работе используются некоторые результаты статьи [2].

1. Основные соотношения. Группа Григорчука $\Gamma = \text{gr}(c, f, g, h)$ задается четырьмя, фактически тремя, автоморфизмами бесконечного однородного 2-дерева T :

где $\pi = (0, 1)$ – подстановка ребер, последовательности

$\pi, \pi, 1, \dots, \pi, 1, \pi, \dots, 1, \pi, \pi, \dots$

циклически повторяются, а во всех неотмеченных вершинах стоят тождественные подстановки. Из определения следует, что $c^2 = f^2 = g^2 = h^2 = 1$, $fg = h$, $gh = f$, $hf = g$. Мы будем использовать следующие обозначения. Если v – вершина, то $T_{(v)}$ – поддерево с начальной вершиной v . Деревья T и $T_{(v)}$ естественным образом изоморфны. Пусть $\text{id}^{(v)} : T \rightarrow T_{(v)}$ – указанный изоморфизм, который мы будем обозначать через $\text{id}^{(n)}$, если важна только длина n вершины v . Указанный изоморфизм естественным образом задает изоморфизм $\text{Aut } T \rightarrow \text{Aut } T_{(v)}$ групп автоморфизмов деревьев, который мы будем обозначать теми же символами $\text{id}^{(v)}$ и $\text{id}^{(n)}$.

Если $X \leq \text{Aut } T$, V – некоторое подмножество вершин дерева T , то по определению

$$\text{st}_X(V) = \bigcap_{v \in V} \text{st}_X(v), \quad \text{cost}_X(V) = \text{gr} \left(\bigcup_{v \in V} \text{st}_X(T \setminus T_{(v)}) \right)$$

– стабилизатор и костабиллизатор множества V соответственно. Нетрудно видеть, что $\text{cost}_X(v) \triangleleft \text{st}_X(v)$ и при $u \leq v$

$$\text{st}_X(v) \leq \text{st}_X(u), \quad \text{cost}_X(v) \leq \text{cost}_X(u).$$

Кроме того, при несравнимых u и v костабиллизаторы $\text{cost}_X(u)$ и $\text{cost}_X(v)$ поэлементно перестановочны.

Пусть $|v|$ – длина вершины v . Тогда по определению

$$\text{st}_X(n) = \bigcap_{|v|=n} \text{st}_X(v), \quad \text{cost}_X(n) = \text{gr} \left(\bigcup_{|v|=n} \text{cost}_X(v) \right).$$

Если $x \in \text{st}_X(v)$, то сужение автоморфизма x на поддерево $T_{(v)}$ будем обозначать $x_{(v)}$ и называть v -срезкой. Если $x \in \text{st}_X(n)$, то автоморфизм x однозначно определяется своими v -срезками, $|v| = n$, и естественно отождествление $x = (\dots, x_{(v)}, \dots) \circ \text{id}^{(n)}$. Чаще всего мы будем пользоваться им при $n = 1$, опуская в обозначении $\text{id}^{(1)}$ верхний индекс.

В указанных обозначениях имеем $f = (g \circ \text{id}, c \circ \text{id})$ или $f = (g, c) \circ \text{id}$. Таким образом, $h = (f, 1) \circ \text{id}$, $chc = (1, f) \circ \text{id}$.

Прямые вычисления показывают, что

$$(ch)^4 = (cg)^8 = (cf)^{16} = 1, \quad \text{gr}(c, h) \cong D_4, \quad \text{gr}(c, g) \cong D_8, \quad \text{gr}(c, f) \cong D_{16}.$$

Очевидно, $\text{st}(1) = \text{gr}(f, g, cfc, cgc)$, значит $\text{st}(1)_{(v)} \cong \Gamma \circ \text{id}$ при $v = 0, 1$. Следовательно, $\text{st}(v)_{(v)} \cong \Gamma \circ \text{id}^{(v)}$ для любой вершины v дерева T .

Условимся, что в обозначениях стабилизаторов и костабиллизаторов, если они рассматриваются во всей группе Γ или во всей группе $\Gamma \circ \text{id}^{(n)}$, мы будем опускать для краткости такие индексы.

Если X – подмножество группы Γ , то $\overline{X}^\Gamma$ – нормальное замыкание множества X в группе Γ .

ЛЕММА 1 [2]. Пусть $K = \overline{(cf)^2}^\Gamma$, $L = \overline{f}^\Gamma$ – нормальные подгруппы. Тогда имеют место соотношения:

- 1) $K = \text{gr}((cf)^2, (1, (cf)^2) \circ \text{id}, ((cf)^2, 1) \circ \text{id})$, $L = \text{gr}(f, K)$;
- 2) $\Gamma/L \cong D_4 \cong \text{gr}(c, h)$, $\Gamma/K \cong D_4 \times \mathbb{Z}_2$, $L/K \cong \text{gr}(f) \cong \mathbb{Z}_2$;
- 3) $\text{cost}(v)_{(v)} = L \circ \text{id}$ при $|v| = 1$;
- 4) $\text{cost}(v)_{(v)} = \text{cost}_K(v)_{(v)} = K \circ \text{id}^{(n)}$ при $|v| = n > 1$;
- 5) $(cg)^4 \in K$, $K/\text{cost}_K(1) \cong D_4$,

и всякий элемент этой факторгруппы имеет вид $(\psi(c, g), \psi(g, c)) \text{cost}_K(1)$, где ψ – некоторое слово от двух переменных.

Введем основной объект нашего изучения – подгруппы F, G, H :

$$\begin{aligned} F &= \text{gr}(c, f, a_u, b_v \mid |u| = 3n, |v| = 3n + 1, n \in \mathbb{N}), \\ G &= \text{gr}(c, g, a_u, b_v \mid |u| = 3n + 2, |v| = 3n, n \in \mathbb{N}), \\ H &= \text{gr}(c, h, a_u, b_v \mid |u| = 3n + 1, |v| = 3n + 2, n \in \mathbb{N}), \end{aligned}$$

где $a_u, b_u \in \text{cost}(u)$ и $(a_u)_{(u)} = (cf)^2 \circ \text{id}^{(n)}$, $(b_u)_{(u)} = (cg)^4 \circ \text{id}^{(n)}$, $n = |u|$. Ниже будет доказано, что подгруппы F, G, H максимальные локально конечные.

Отметим, что в силу утверждений 4), 1), 5) леммы 1 элементы a_u, b_v действительно существуют в группе Γ . Кроме того, при разных u, v эти элементы различны, что влечет бесконечность подгрупп F, G, H .

2. Основные леммы.

ЛЕММА 2. Пусть u – вершина длины 1. Тогда имеют место равенства

$$\text{st}_F(1)_{(u)} = G \circ \text{id}, \quad \text{st}_G(1)_{(u)} = H \circ \text{id}, \quad \text{st}_H(1)_{(u)} = \text{st}_{F \circ \text{id}}(1).$$

Доказательство очевидно.

Именно ввиду леммы 2 возникает необходимость рассматривать все три подгруппы одновременно.

ЛЕММА 3. Подгруппа F локально конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если вершины u и v несравнимы, то элементы a_u и a_v , b_u и b_v , a_u и b_v перестановочны. Если же x – произвольный порождающий группы F , то имеют место равенства $a_u^x = a_v^{\pm 1}$, $b_u^x = b_w$, где u и w – некоторые вершины длины $|u|$. Отсюда следует, что подгруппа $\text{gr}(c, f, a_u, b_v \mid |u|, |v| < n)$ конечна для любого натурального числа n . Лемма доказана.

Аналогично доказывается локальная конечность подгрупп G и H .

ЛЕММА 4. Пусть $x = (x_1, x_2)$ – элемент группы Γ . Тогда имеют место соотношения:

- 1) если $x_1, x_2 \in G \circ \text{id}$, то $x \in F$,
- 2) если $x_1, x_2 \in H \circ \text{id}$, то $x \in G$,
- 3) если $x_1, x_2 \in F \circ \text{id}$, то $x \in H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем 1). Если $x_1, x_2 \in \text{gr}(a_u, b_v \mid |u| = 3n + 2, |v| = 3n, n \in \mathbb{N})$, то $x \in \text{cost}_F(1) < F$. Поэтому с точностью до умножения на элементы из $\text{cost}_F(1)$ можно считать, что $x_1, x_2 \in \text{gr}(c, g) \circ \text{id}$.

Пусть $x_i = \psi_i(c, g) \circ \text{id}$, где ψ_i – некоторое слово от переменных c и g , $i = 1, 2$. Тогда

$$x \cdot \psi_1^{-1}(f^c, f) = (1, \psi_2(c, g) \cdot \psi_1^{-1}(c, g)) \circ \text{id} = (1, \psi(c, g)) \circ \text{id}.$$

Следовательно, $\psi(c, g) \in L$ и в силу леммы 1 $\psi(c, g) \in \{1, (cg)^4\}$. В любом случае $(1, \psi) \in \text{cost}_F(1)$, и значит, $x \in F$.

Докажем 2). Как и выше, можно считать, что по модулю подгруппы $\text{cost}_G(1)$ имеет место включение $x_1, x_2 \in \text{gr}(c, h) \circ \text{id}$, где $x_i = \psi_i(c, h) \circ \text{id}$, $i = 1, 2$. Тогда $x \cdot \psi_1^{-1}(g^c, g) = (1, \psi(c, h)) \circ \text{id}$. Так как $\text{gr}(c, h) \cap L = 1$, имеем $\psi(c, h) = 1$. Значит, $x \in G$.

Перейдем к доказательству 3). С точностью до умножения на элементы из $\text{cost}_H(1)$ можно считать, что $x_1, x_2 \in \text{gr}(c, f)$.

Так как $(f, 1)$ и $(f^c, 1)$ лежат в $\text{cost}_H(1)$, по модулю подгруппы $\text{cost}_H(1)$ элемент x равен $(c^\varepsilon, c^\delta) \circ \text{id}$, где $\varepsilon, \delta \in \{0, 1\}$. Поскольку единственным элементом такого вида в группе Γ является $(1, 1)$, лемма доказана.

Если x – элемент группы Γ , то он может быть записан в виде $*c* \cdots *c*$, $*$ $\in \{f, g, h\}$, где крайние звездочки могут отсутствовать. Длиной такой записи мы назовем число входящих в нее символов c, f, g, h . Длину самой короткой записи назовем длиной элемента x и обозначим через $\partial(x)$.

Отметим для дальнейшего, что если $x \in \text{st}(1)$, то число вхождений символа c в любую запись элемента x должно быть четным. Поэтому любая запись элемента из стабилизатора $\text{st}(1)$ имеет один из следующих типов:

$$\underbrace{c* \cdots c*}_{4k}, \quad \underbrace{*c \cdots *c}_{4k}, \quad \underbrace{*c \cdots c*}_{4k+1}, \quad \underbrace{c* \cdots *c}_{4k+3}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Таким образом, длина $\partial(x) = n = 4k + 2$ для элемента $x \in \text{st}(1)$ невозможна.

ЛЕММА 5. Пусть x – элемент подгруппы K , $d \in \{h, ch, hc, chc\}$. Тогда подгруппа $X = \text{gr}(\text{st}_F(1), dx)$ нелокально конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по $n = \partial(x)$. Так как $K < \Gamma$ и подгруппа $\text{st}_F(1)$ выдерживает сопряжения элементом c , то, в силу того что h и chc , ch и hc сопряжены элементом c , мы можем ограничиться только рассмотрением случаев $d = h$ и $d = ch$.

Пусть $n < 7$. Так как $K < \text{st}(1)$, реально возможны только значения $n = 0, 1, 3, 4, 5$.

Если $n = 0$, то $x = 1$, и непосредственно проверяется (сужением на поддеревья), что подгруппа $X = \text{gr}(\text{st}_F(1), d)$ всегда нелокально конечна. Например, при $d = h$, сужая подгруппу X на поддерево $T_{(0)}$, согласно лемме 1 получаем подгруппу $X_{(0)} = \text{gr}(G \circ \text{id}, f \circ \text{id}) = \Gamma \circ \text{id}$.

Если $n = 1$ или $n = 3$, то элемент x не может принадлежать подгруппе K .

Если $n = 4$, то с точностью до умножения на элементы из $\text{st}_F(1)$ и взятия обратного $x = hcfcg = h(cf)^2h = (fch, gc) \circ \text{id}$. Непосредственно проверяется, что и в этом случае подгруппы $\text{gr}(\text{st}_F(1), dx)$ нелокально конечны.

Пусть $n = \partial(x) > 6$, и для слов длины меньшей n утверждение доказано.

Пусть $d = h$, $x = (x_1, x_2)$. Тогда в силу леммы 1

$$X_{(0)} = \text{gr}(G \circ \text{id}, f \circ \text{id} \cdot x_1), \quad \text{где } x_1 \equiv (cg)^i \pmod{K \circ \text{id}}, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Очевидно, что

$$\partial(x_1) \leq \begin{cases} \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor & \text{при } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor & \text{при } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor & \text{при } n \equiv 3 \pmod{4}, \end{cases} \quad (1)$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ – целая часть числа. Домножая элемент x_1 на подходящий элемент $t \in G \circ \text{id}$, получаем $y = x_1 t \in K \circ \text{id}$. При этом всегда можно добиться, чтобы выполнялось неравенство

$$\partial(y) \leq \partial(x_1) + 3 \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 3.$$

В самом деле, если x_1 имеет вид $\cdots * c$, то полагаем соответственно $t = gc, (cg)^2, cg$ при $i = 1, 2, 3$. Аналогично, если x_1 имеет вид $\cdots c*$, то полагаем соответственно $t = gc, (gc)^2, cg$ при $i = 1, 2, 3$.

Таким образом, $\partial(y) \leq [(n+1)/2] + 3$ при $n \equiv 1 \pmod{4}$ и $\partial(y) \leq [n/2] + 3$ в остальных случаях.

Теперь рассмотрим случай $d = ch$. Для проекции $X_{(0)}$ подгруппы X на поддереве $T_{(0)}$ имеет место включение

$$X_{(0)} = \text{gr}(G \circ \text{id}, G^{x_2} \circ \text{id}, f \circ \text{id} \cdot x_1 x_2) \geq \text{gr}(G \circ \text{id}, f \circ \text{id} \cdot x_1 x_2).$$

Так как $x_1 \equiv (cg)^i \pmod{K \circ \text{id}}$, $x_2 \equiv (gc)^i \pmod{K \circ \text{id}}$, $i = 0, 1, 2, 3$, выполнено $x_1 x_2 \in K \circ \text{id}$.

Оценим длину слова $y = x_1 x_2$. Полагая $n = 4k + 1$, имеем

$$x = (x_1, x_2) = (\underbrace{*c \cdots c*}_{2k+1}, \underbrace{c* \cdots *c}_{2k+1}).$$

Если в произведении y нет сокращений, то $\partial(y) = 4k + 2$, что невозможно для элемента из подгруппы K . Поэтому в записи хотя бы одного из элементов x_1, x_2 отсутствует хотя бы одна буква c . Но тогда соединяются две соседние звездочки и, тем самым, становится верным неравенство $\partial(y) \leq n - 1$.

Если

$$x = \underbrace{c* \cdots *c}_{4k+3} = (\underbrace{c* \cdots *c}_{2k+1}, \underbrace{*c \cdots *c}_{2k+1}),$$

то $\partial(y) \leq 4k + 2 = n - 1$.

Если

$$x = \underbrace{c* \cdots c*}_{4k} = (\underbrace{c* \cdots c*}_{2k}, \underbrace{*c \cdots *c}_{2k}),$$

то $\partial(y) \leq 2k + 2k - 1 = n - 1$.

Если

$$x = \underbrace{*c \cdots *c}_{4k} = \left(\underbrace{*c \cdots *c}_{2k}, \underbrace{c* \cdots *c}_{2k} \right),$$

то $\partial(y) \leq 2k + 2k - 3 = n - 3$.

Таким образом, во всех случаях $\partial(y) \leq n - 1$.

Объединяя полученные результаты, находим, что для доказательства леммы достаточно показать нелокальную конечность подгруппы $Y = \text{gr}(G, fy)$, где $y \in K$ и

$$\partial(y) \leq \begin{cases} \max\left\{n-1, \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil + 3\right\} & \text{при } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ \max\left\{n-1, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3\right\} & \text{при } n \equiv 0, 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Поскольку $n > 6$, непосредственно проверяется, что в обоих случаях максимум равен $n - 1$, т.е. всегда $\partial(y) \leq n - 1$.

Пусть $y = (y_1, y_2)$. Тогда с точностью до изоморфизма id получаем

$$Y_{(0)} = \text{gr}(H, gy_1, cy_2) = \text{gr}(H, fy_1, y_2).$$

Пусть $y = (y_1, y_2) = ((cg)^i, (gc)^i) \pmod{\text{cost}_K(1)}$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Рассмотрим подгруппы, содержащиеся в группе $Y_{(0)}$:

$$\text{gr}(H, fy_1) = \text{gr}(H, fz) \quad \text{при } i = 0, 2, \quad \text{gr}(H, y_2) = \text{gr}(H, fz) \quad \text{при } i = 1, 3,$$

где $z = y_1, fy_2ch, y_1(ch)^2 = y_1(hc)^2, fy_2hc$ при $i = 0, 1, 2, 3$ соответственно.

Нетрудно видеть, что $z \in K$ и $\partial(z) \leq \partial(y_j) + 3$, $j = 1, 2$. Более того, в силу неравенств (1) и $\partial(y) \leq n - 1$ самое слабое неравенство $\partial(y_j) \leq [(n-1)+1]/2$ получаем только тогда, когда $n - 1 \equiv 1 \pmod{4}$. Однако, в этом случае $n \equiv 2 \pmod{4}$, что невозможно. Таким образом, всегда $\partial(z) \leq [(n-1)/2] + 3$.

Для завершения доказательства осталось показать, что подгруппа $Z = \text{gr}(H, fz)$ нелокально конечна для любого $z \in K$ такого, что $\partial(z) \leq [(n-1)/2] + 3$.

Пусть $z = (z_1, z_2)$. Тогда с точностью до изоморфизма id имеем $Z_{(0)} = \text{gr}(\text{st}_F(1), hz_1, cz_2)$. Пусть

$$z = (z_1, z_2) = ((cg)^i, (gc)^i) \pmod{\text{cost}_K(1)}, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Для каждого значения i в группе $Z_{(0)}$ выберем свою подгруппу и докажем ее нелокальную конечность.

При $i = 0$ это подгруппа $\text{gr}(\text{st}_F(1), ht)$, где $t = z_1$.

При $i = 1$ это подгруппа $\text{gr}(\text{st}_F(1), cz_2) = \text{gr}(\text{st}_F(1), chc \cdot t)$, где $t = chz_2f$.

В оставшихся случаях рассмотрим подгруппы $\text{gr}(\text{st}_F(1), cz_2) = \text{gr}(\text{st}_F(1), ht)$, где $t = gc z_2$ при $i = 2$, $t = hc z_2 f$ при $i = 3$.

Легко видеть, что во всех случаях $t \in K$ и выполнены неравенства

$$\partial(t) \leq \partial(z_2) + 3 \leq \left\lceil \frac{\partial(z) + 1}{2} \right\rceil + 3 \leq \left\lceil \frac{[(n-1)/2] + 4}{2} \right\rceil + 3 \leq \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 5.$$

Все четыре рассмотренные нами подгруппы являются подгруппами из формулировки леммы 5, а именно, имеют вид $\text{gr}(\text{st}_F(1), dt)$, где $d \in \{h, chc\}$ и $\partial(t) \leq [n/4] + 5$. Так как $n > 6$, нетрудно видеть, что $[n/4] + 5 < n$, и по предположению индукции каждая из этих подгрупп нелокально конечна. Лемма доказана.

3. Максимальные локально конечные подгруппы.

ТЕОРЕМА 1. *Подгруппа, строго содержащая любую из подгрупп F, G, H , нелокально конечна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – одна из подгрупп F, G, H , $x \notin X$. Тогда индукцией по длине $\partial(x)$ слова x докажем, что подгруппа $\text{gr}(x, X)$ нелокально конечна. База индукции $\partial(x) = 1$. В этом случае, очевидно, $\text{gr}(x, X) = \Gamma$.

Пусть $x \notin F$. Так как $c \in F$, можно считать, что $x = (x_1, x_2)$. Согласно лемме 2 хотя бы один из элементов x_1 или x_2 не лежит в подгруппе $G \circ \text{id}$. Поскольку $\partial(x_i) < \partial(x)$, $i = 1, 2$, по предположению индукции хотя бы одна из подгрупп $\text{gr}(G \circ \text{id}, x_i)$, $i = 1, 2$, нелокально конечна. Следовательно, нелокально конечна и исходная группа $\text{gr}(x, F)$, так как подгруппы $\text{gr}(G \circ \text{id}, x_i)$ являются ее факторами.

Если $x \notin G$, то нелокальная конечность подгруппы $\text{gr}(x, G)$ доказывается аналогично.

Пусть $x = (x_1, x_2) \notin H$. Если $x_i \in \text{st}(1) \setminus F \circ \text{id}$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$, то $x_i = (x_{i1}, x_{i2})$, и по лемме 2 $x_{ij} \notin G \circ \text{id}^{(2)}$ для некоторого $j \in \{1, 2\}$. Так как $\partial(x_{ij}) < \partial(x)$, по предположению индукции подгруппа $\text{gr}(x_{ij}, G \circ \text{id}^{(2)})$ нелокально конечна.

Если же, например, $x_1 \in \text{st}_{F \circ \text{id}}(1)$, а $x_2 \notin \text{st}(1) \cup F \circ \text{id}$, то $(x_1^{-1}, 1) \in H$, и значит, в группе Γ существует элемент $(x_1^{-1}, 1) \cdot (x_1, x_2) = (1, x_2)$ такой, что $x_2 \notin \text{st}(1)$. Однако, в группе Γ таких элементов нет, поскольку $\text{cost}(1) < \text{st}(1)$.

Последний из возможных случаев имеет место при $x_1, x_2 \notin \text{st}(1) \cup F \circ \text{id}$. Согласно лемме 1 имеем $x = (x_1, x_2) = ((ch)^j y, (hc)^j z)$, где $y, z \in L \circ \text{id}$, $j = 1, 3$. Отметим, что $(ch)^4 = 1$, поэтому $(ch)^3 = hc$. Так как $L/K \cong \text{gr}(f)$ по лемме 1, домножая, если необходимо, элемент x на элементы из группы H , можно считать, что $x_1 = chy$ или $x_1 = hcy$, где $y \in K \circ \text{id}$. Теперь с учетом леммы 5 заключаем, что подгруппа $\text{gr}(x_1, \text{st}_{F \circ \text{id}}(1))$ нелокально конечна, значит такова и подгруппа $\text{gr}(x, H)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Имеют место соотношения:*

- 1) $F \cap G = G \cap H = F \cap H = \text{gr}(c)$;
- 2) $\overline{F}^\Gamma = \text{gr}(c, f, gcf)$, $\overline{G}^\Gamma = \text{gr}(c, g, hch)$, $\overline{H} = \text{gr}(c, h, fcf)$ – подгруппы индекса 2;
- 3) *центрлизаторы подгрупп F, G, H в группе $\text{Aut } T$ автоморфизмов дерева T тривиальны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in F \cap G$. Доказательство проведем индукцией по $\partial(x)$. Если $\partial(x) = 1$, то утверждение 1) очевидно.

Если $x \notin \text{st}(1)$, то вместо элемента x возьмем элемент $y = xc \in F \cap G \cap \text{st}(1)$. Поэтому пусть $y = (y_1, y_2)$. Тогда в силу леммы 2 $y_1, y_2 \in (G \cap H) \circ \text{id}$. Так как $\partial(y_i) < \partial(x)$, $i = 1, 2$, по предположению индукции $y_1, y_2 \in \text{gr}(c \circ \text{id})$. Поскольку в группе Γ нет элементов вида $(1, c) \circ \text{id}$, $(c, 1) \circ \text{id}$, $(c, c) \circ \text{id}$, имеем $y_1 = y_2 = 1$. Следовательно, $x = 1$ или $x = c$.

Аналогично доказываются утверждения для остальных пересечений из 1).

Докажем утверждение 2). Очевидно, что все интересующие нас нормальные замыкания содержат подгруппу $\overline{c}^\Gamma \geq \{[c, f], [c, g], [c, h]\}^\Gamma$, а значит, и коммутант группы Γ . Столь же очевидно, что, факторизуя рассматриваемые нормальные замыкания по коммутанту, мы получаем группы порядка 4. Так как индекс коммутанта равен 8 [2], все

рассматриваемые нами нормальные замыкания имеют в группе Γ индекс 2. Теперь из списка семи подгрупп индекса 2, приведенного в [2], достаточно выбрать необходимые.

Пусть X — одна из подгрупп F, G, H . Докажем чуть более сильное утверждение, чем сформулированное в 3). А именно:

4) централизатор подгруппы $\text{st}_X(1)$ тривиален в $\text{Aut } T$.

Пусть элемент $x = c(x_1, x_2)$ централизует подгруппу $\text{st}_X(1)$. Тогда получаем противоречие

$$(x_1^{-1}, x_2^{-1})c \cdot (g, c) \circ \text{id} \cdot c(x_1, x_2) = (c^{x_1}, c^{x_2}) \circ \text{id} \neq (g, c) \circ \text{id},$$

так как порождающие c и g несопряжены. Следовательно, централизатор подгруппы $\text{st}_F(1)$ лежит в подгруппе $\text{st}(1)$. Аналогично доказывается, что централизаторы подгрупп $\text{st}_G(1)$ и $\text{st}_H(1)$ лежат в $\text{st}(1)$.

Однако, если $x = (x_1, x_2)$ централизует, например, подгруппу $\text{st}_F(1)$, то x_1 и x_2 централизуют подгруппу $G \circ \text{id}$, и значит, $x_1, x_2 \in \text{st}_{G \circ \text{id}}(1)$. Следовательно, $x \in \text{st}(2)$ и т.д. Таким образом, $x = 1$.

Так как для любой вершины u костаблизатор $\text{cost}_X(u) \neq 1$, используя метод доказательства теоремы об описании конечных подгрупп AT_ω -групп, изложенный в [4], можно доказать утверждение 4). Теорема доказана.

Отметим, что в произвольной финитно аппроксимируемой 2-группе централизатор любой конечной подгруппы бесконечен. Поэтому утверждение 3 из анонса [5] ошибочно.

В первом варианте статьи доказывалась теорема о том, что централизатор любой конечной подгруппы 2-группы Григорчука содержит подгруппу, изоморфную некоторому костаблизатору группы Григорчука (в частности, подгруппу, изоморфную всей группе Григорчука). Это более сильное утверждение, чем просто бесконечность централизатора. Однако, аналогичная теорема справедлива для многих AT -групп, а не только для централизаторов конечных подгрупп 2-группы Григорчука. Мы докажем эту теорему в одной из следующих статей.

Автор благодарит рецензента за замечания, позволившие сократить объем статьи и избежать дублирования известных фактов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Григорчук Р. И. К проблеме Бернсайда о периодических группах // Функцион. анализ и его прилож. 1980. Т. 14. № 1. С. 53–54.
- [2] Рожков А. В. Централизаторы элементов в одной группе автоморфизмов деревьев // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 6. С. 82–105.
- [3] Рожков А. В. О стабилизаторах кортежей в группах алешинского типа // Матем. заметки. 1990. Т. 47. № 3. С. 121–128.
- [4] Рожков А. В. О подгруппах некоторых групп алешинского типа // Алгебра и логика. 1986. Т. 25. № 6. С. 643–671.
- [5] Рожков А. В. Централизаторы и самонормализующиеся подгруппы в группе Григорчука // Международная конференция по алгебре. Тезисы докл. по теории групп. Новосибирск, 1991. С. 86.