Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Х. Арансон, Е. В. Жужома, И. А. Тельных, Транзитивные и сверхтранзитивные потоки на замкнутых неориентируемых поверхностях, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 4, 625–628

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1323>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 12:56:58

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТРАНЗИТИВНЫЕ И СВЕРХТРАНЗИТИВНЫЕ ПОТОКИ НА ЗАМКНУТЫХ НЕОРИЕНТИРУЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

С. Х. Арансон, Е. В. Жужома, И. А. Тельных

В статье получен полный топологический инвариант для класса транзитивных потоков (т.е. динамических систем с непрерывным временем) без фальшивых седел на замкнутой неориентируемой поверхности N_3^2 рода $g = 3$ и для класса сверхтранзитивных потоков без фальшивых седел на замкнутой неориентируемой поверхности N_g^2 рода $g \geq 4$. Для указанных выше классов решена задача топологической классификации.

1. Основные понятия. Напомним, что положительная (отрицательная) полутраектория незамкнутой траектории называется *нетривиально рекуррентной в положительном (отрицательном) направлении*, если эта полутраектория лежит в своем $\omega(\alpha)$ -предельном множестве. Незамкнутая траектория называется *нетривиально рекуррентной*, если она нетривиально рекуррентна в обоих направлениях.

Потоки с нетривиально рекуррентными полутраекториями не существуют на проективной плоскости и бутылке Клейна (замкнутых неориентируемых поверхностях рода $g = 1$ и $g = 2$, см. [1], [2]), но существуют на любой замкнутой неориентируемой поверхности рода $g \geq 3$. Более того, на любой замкнутой неориентируемой поверхности рода $g \geq 3$ существуют транзитивные потоки (напомним, что поток называется *транзитивным*, если он имеет всюду плотную траекторию).

Поток, любая одномерная траектория которого всюду плотна на поверхности, называется *сверхтранзитивным*. Такие потоки не существуют на замкнутой неориентируемой поверхности N_3^2 рода $g = 3$ (см. [3, замечание А. Б. Катку]) и существуют на любой замкнутой неориентируемой поверхности рода $g \geq 4$ (см. [4], [5]).

Седло называется *фальшивым*, если оно имеет ровно два седловых сектора. Сверхтранзитивные потоки без фальшивых седел наиболее тесно связаны с топологией поверхности. Поэтому для таких потоков естественно рассмотреть проблему топологической классификации.

Напомним, что два потока называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм несущего многообразия, переводящий траектории одного потока в траектории другого.

На замкнутой ориентируемой поверхности рода $g = 0$ не существует потоков с нетривиально рекуррентными траекториями и, следовательно, не существует транзитивных и сверхтранзитивных потоков. Для транзитивных потоков на замкнутой ориентируемой поверхности рода $g = 1$ задача топологической классификации решалась многими авторами (см. библиографию и подробное изложение в [6]) с помощью числа вращения Пуанкаре. Для сверхтранзитивных потоков на замкнутой ориентируемой поверхности рода $g \geq 2$ задача топологической эквивалентности решена в работе [7] с помощью гомотопического класса вращения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00236, и объединенного проекта фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-00418.

2. Основные результаты для неориентируемой поверхности рода $g = 3$. Поверхность N_3^2 можно представить как двумерный тор T^2 с вклеенным листом Мёбиуса Mb . Это позволяет рассмотреть в качестве накрывающей для N_3^2 двумерную плоскость, в которую вклеено счетное семейство листов Мёбиуса, переходящих друг в друга с помощью целочисленных сдвигов. Обозначим эту накрывающую через N_∞^2 .

Любой транзитивный поток без фальшивых седел на замкнутой неориентируемой поверхности N_3^2 рода $g = 3$ имеет ровно одно седло с четырьмя сепаратрисами, две из которых “сливаются”, образуя петлю, при этом достаточно малая окрестность петли сепаратрисы гомеоморфна листу Мёбиуса Mb . Отсюда вытекает, что любая одномерная полутраектория накрывающего потока на N_∞^2 , отличная от сепаратрисы, имеет асимптотическое направление. Следовательно, для любого транзитивного потока без фальшивых седел на замкнутой неориентируемой поверхности N_3^2 можно ввести *число вращения*, как это делается для транзитивных потоков на торе. Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Два транзитивных потока без фальшивых седел на замкнутой неориентируемой поверхности рода $g = 3$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их числа вращения пересчитываются с помощью целочисленной унимодулярной матрицы.*

Ввиду наличия нетривиально рекуррентной полутраектории любой транзитивный поток на N_3^2 имеет иррациональное число вращения. Следующая теорема решает задачу топологической классификации для класса транзитивных потоков на N_3^2 .

ТЕОРЕМА 2. *Для любого иррационального числа α существует транзитивный поток без фальшивых седел на замкнутой неориентируемой поверхности рода $g = 3$ с числом вращения α .*

Прежде чем переходить к неориентируемой поверхности рода $g \geq 4$, рассмотрим универсальную накрывающую для такой поверхности.

3. Предварительные сведения для универсальной накрывающей. Везде далее N_g^2 – замкнутая неориентируемая поверхность рода $g \geq 4$. Пусть Δ – плоскость Лобачевского в виде модели Пуанкаре, т.е. Δ – единичный круг на комплексной z -плоскости, наделенный метрикой постоянной отрицательной кривизны. Окружность $S_\infty = \partial\Delta = \{|z| = 1\}$ называется *абсолютом*. Так как N_g^2 двулистно накрывается замкнутой ориентируемой поверхностью рода $g - 1 \geq 3$, в силу теоремы об униформизации существует группа Γ изометрий плоскости Δ такая, что $\Delta/\Gamma \cong N_g^2$. Обозначим через $\pi: \Delta \rightarrow \Delta/\Gamma \cong N_g^2$ естественную проекцию, которая является универсальным накрывающим отображением.

Рациональными точками абсолюта называются неподвижные точки элементов группы Γ , отличных от тождественного. Остальные точки на S_∞ называются *иррациональными*.

Пусть $\varphi: N_g^2 \rightarrow N_g^2$ – гомеоморфизм поверхности и $\bar{\varphi}: \Delta \rightarrow \Delta$ – накрывающий его гомеоморфизм плоскости Лобачевского. Тогда $\bar{\varphi}$ индуцирует автоморфизм группы Γ вида $\tau(\gamma) = \bar{\varphi} \circ \gamma \bar{\varphi}^{-1}$. Обратно, из [8]–[10] вытекает, что любой автоморфизм группы Γ индуцируется накрывающим для некоторого гомеоморфизма поверхности. Более того, накрывающий гомеоморфизм продолжается до гомеоморфизма абсолюта $\tau^*: S_\infty \rightarrow S_\infty$, который зависит только от автоморфизма $\tau: \Gamma \rightarrow \Gamma$.

4. Основные результаты для неориентируемой поверхности рода $g \geq 4$. Пусть f^t – поток на неориентируемой замкнутой поверхности N_g^2 рода $g \geq 4$. Для f^t имеется накрывающий поток $\bar{f}^t$ на Δ , соответствующий проекции π . Рассмотрим полутраекторию $\bar{l}$ потока $\bar{f}^t$, которая является накрывающей для нетривиально рекуррентной полутраектории l потока f^t .

ТЕОРЕМА 3. *Предельное множество полутраектории $\bar{l}$ состоит ровно из одной иррациональной точки $\sigma(\bar{l})$ абсолюта.*

Множество

$$\mu(l) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\sigma(\bar{l}))$$

называется *гомотопическим классом вращения полутраектории* l . Другими словами, гомотопический класс вращения есть объединение предельных точек всех поднятий полутраектории l .

Объединение

$$O(l) = \bigcup_{\tau^* \in H(\Gamma)} \tau^*(\mu(l))$$

называется *орбитой гомотопического класса вращения полутраектории* l , где $H(\Gamma)$ – множество гомеоморфизмов абсолюта, индуцированных всеми автоморфизмами группы Γ .

ТЕОРЕМА 4. *Два сверхтранзитивных потока без фальшивых седел на замкнутой неориентируемой поверхности рода $g \geq 4$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют две нетривиально рекуррентные сепаратрисы этих потоков с одинаковыми орбитами вращения.*

Гомотопические классы вращения траекторий потока можно представить в виде специальной геодезической ламинации (геодезического каркаса потока), что приводит к новой форме полного топологического инварианта.

Рассмотрим траекторию $\bar{l}$ потока $\bar{f}^t$, которая в обоих направлениях стремится к разным точкам абсолюта $\alpha(\bar{l}) \neq \omega(\bar{l})$, где $\alpha(\omega)(\bar{l})$ есть $\alpha(\omega)$ -предельное множество траектории $\bar{l}$. Обозначим через $\bar{L}(\bar{l})$ геодезическую, соединяющую точки $\alpha(\bar{l})$, $\omega(\bar{l})$ и ориентированную от $\alpha(\bar{l})$ к $\omega(\bar{l})$. Эта геодезическая $\bar{L}(\bar{l})$ называется *соответствующей* траектории $\bar{l}$. Аналогичное построение соответствующей геодезической проводится для обобщенной траектории потока $\bar{f}^t$ (т.е. объединения сепаратрисы и ее левостороннего или правостороннего продолжений по Бендиксону [6]). Отметим, что обобщенная траектория может состоять из счетного семейства сепаратрис и точек покоя потока $\bar{f}^t$. В этом случае обобщенная траектория является накрывающей для одностороннего негомотопного нулю контура потока f^t .

Обозначим через $\bar{G}(\bar{f}^t)$ семейство ориентированных геодезических, соответствующих всем траекториям и обобщенным траекториям потока $\bar{f}^t$. Тогда

$$\pi(\bar{G}(\bar{f}^t)) \stackrel{\text{def}}{=} G(f^t)$$

является геодезической ламинацией, которая называется *геодезическим каркасом* потока f^t . Аналогично орбите гомотопического класса вращения вводится понятие орбиты геодезического каркаса, которая представляет собой семейство геодезических ламинаций, порожденных действием всех автоморфизмов группы Γ на исходный геодезический каркас. Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. *Два сверхтранзитивных потока без фальшивых седел на замкнутой неориентируемой поверхности рода $g \geq 4$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые орбиты геодезических каркасов. В частности, два сверхтранзитивных потока без фальшивых седел на замкнутой неориентируемой поверхности рода $g \geq 4$ топологически эквивалентны с помощью гомеоморфизма гомотопного тождественному тогда и только тогда, когда их геодезические каркасы совпадают.*

Геодезическая ламинация называется *минимальной*, если она не содержит непустых собственных подламинаций. Ламинация называется *иррациональной*, если она состоит из нетривиально рекуррентных геодезических. Геодезическая ламинация G называется *ориентируемой*, если все ее геодезические можно ориентировать так, чтобы выполнялось следующее свойство: для любой геодезической $L \in G$ и любой точки $t \in L$ существует окрестность $U \ni t$ такая, что все геодезические из G , пересекающие U , “сонаправлены” L . Наконец, геодезическая ламинация G на поверхности называется *неприводимой*, если ее дополнение состоит только из областей, гомеоморфных диску, при этом достижимая изнутри граница каждой такой области состоит из четного числа геодезических.

Обозначим через $\text{MIOI}(N_g^2)$ множество минимальных, иррациональных, ориентируемых и неприводимых геодезических ламинаций на поверхности N_g^2 . Следующая теорема решает задачу топологической классификации для класса сверхтранзитивных потоков без фальшивых седел на замкнутой неориентируемой поверхности рода $g \geq 4$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть f^t – *сверхтранзитивный поток без фальшивых седел на замкнутой неориентируемой поверхности N_g^2 рода $g \geq 4$. Тогда $G(f^t) \in \text{MIOI}(N_g^2)$. Обратно, для любой геодезической ламинации $G \in \text{MIOI}(N_g^2)$ на поверхности N_g^2 существует сверхтранзитивный поток без фальшивых седел такой, что $G(f^t) = G$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арансон С. Х. // Матем. сб. 1969. Т. 80(122). №3. С. 314–333.
2. Markley N. // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. V. 25. №2. P. 413–416.
3. Блохин А. А. // Тр. ММО. 1972. Т. 27. С. 113–128.
4. Gutierrez C. // J. Differential Equations. 1978. V. 29. P. 388–395.
5. Nogueira A. // J. Differential Equations. 1987. V. 70. P. 153–166.
6. Aranson S. Kh., Belitsky G. R., Zhuzhoma E. V. Introduction to the Qualitative Theory of Dynamical Systems on Surfaces. Transl. Math. Monographs. Providence (R.I.): AMS, 1996.
7. Арансон С. Х., Гринес В. З. // Матем. сб. 1973. Т. 90(132). №3. С. 372–402.
8. Nielsen J. // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1924. V. 3. №1. P. 246–260.
9. Nielsen J. I // Acta Math. 1927. V. 50. P. 189–358; II // Acta Math. 1929. V. 53. P. 1–76; III // Acta Math. 1932. V. 58. P. 87–167.
10. Mangler W. // Math. Z. 1939. V. 44. P. 541–553.

Нижегородский государственный технический университет
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: zhuzhoma@focus.nnov.su

Поступило
12.01.98