Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Глушко, Н. А. Ярцева, Об одной эллиптической периодической задаче с вырождением в L_p , *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 4, 628–632

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1324>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 03:58:51

ОБ ОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С ВЫРОЖДЕНИЕМ В L_p

В. П. Глушко, Н. А. Ярцева

В работе рассматривается эллиптическое уравнение с существенно переменным коэффициентом по одной переменной $t \in (0, \infty)$, стоящим при производных по этой переменной. Предполагается, что этот коэффициент положителен при всех $t \in (0, \infty)$, слабо вырождается при $t \rightarrow +0$ и достаточно быстро стремится к ∞ при $t \rightarrow +\infty$. По остальным переменным $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ предполагается периодичность с периодом 2π .

Доказывается теорема существования и единственности для соответствующей задачи в $L_p(\mathbb{R}^n)$ ($1 < p < \infty$). При построении решения используется специальное весовое преобразование и метод “отражения”, позволяющие свести рассматриваемую задачу к периодической по всем переменным. Аналогичный метод использован в работе [1] (см. также [2]).

1. Постановка задачи. В области $G_n = T_0^{n-1} \otimes \mathbb{R}_+$, где

$$T_0^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |y_j| < \pi, j = \overline{1, n-1}\}, \quad \mathbb{R}_+ = (0, \infty),$$

рассматривается линейный дифференциальный оператор

$$L\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{n-1}}, \alpha(t) \frac{\partial}{\partial t}\right) \equiv L\left(\frac{\partial}{\partial y}, \alpha(t) \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

с однородным степени m эллиптическим символом $L(\xi, \eta)$, $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\eta \in \mathbb{R}$. Весовая функция $\alpha(t)$ непрерывно дифференцируема $m-1$ раз и положительна при $t \in \mathbb{R}_+$. Точки $t = +0$ и $t = +\infty$ являются в определенном смысле “особыми” для функции $\alpha(t)$, причем эта функция может стремиться к 0 или ∞ в указанных точках, однако при этом функция $1/\alpha(t)$ интегрируема в нуле и существует конечный предел

$$J(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} J(t), \quad J(t) = \int_0^t \frac{ds}{\alpha(s)}. \quad (1)$$

В работе изучается уравнение с комплексным параметром $\lambda \in \mathbb{C}$ в классе периодических (с периодом 2π) по $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ решений:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial y}, \alpha(t) \frac{\partial}{\partial t}\right) u - \lambda u = f(y, t), \quad (y, t) \in G_n, \quad (2)$$

при условиях

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(y, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(y, t) = 0, \quad y \in T_0^{n-1}. \quad (3)$$

Учли, что при $j = 0, 1, \dots$

$$\left(\alpha(t) \frac{\partial}{\partial t}\right)^j u = \alpha^{1/p}(t) D_{\alpha, t, p} u_\alpha,$$

где $D_{\alpha, t, p} = \alpha^{1/p'} \frac{\partial}{\partial t} \alpha^{1/p}(t)$ ($1 \leq p \leq \infty, 1/p + 1/p' = 1$), $u_\alpha = \alpha^{-1/p}(t) u$. Мы можем записать задачу (2), (3) в следующем (эквивалентном) виде:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial y}, D_{\alpha, t, p}\right) u_\alpha - \lambda u_\alpha = f_\alpha(y, t), \quad (y, t) \in G_n, \quad (4)$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \alpha^{1/p}(t) u_\alpha(y, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha^{1/p}(t) u_\alpha(y, t) = 0, \quad y \in T^{n-1}, \quad (5)$$

где $f_\alpha(y, t) = \alpha^{-1/p}(t) f(y, t)$. Решение задачи (4), (5) будем рассматривать в классе L_p^* 2π -периодических по $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ функций $u_\alpha(y, t)$, интегрируемых по модулю в степени p ($1 < p < \infty$) на любом множестве $T^{n-1} \otimes \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^n$, где

$$T^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |y_j - a_j| \leq \pi, \quad j = \overline{1, n-1}\}.$$

В качестве нормы в L_p^* можно взять

$$\|u_\alpha\|_p = \left(\int_0^\infty \int_{T_0^{n-1}} |u_\alpha(y, t)|^p dy dt \right)^{1/p}.$$

Мы используем также пространство $L_{p, \alpha}^*$ функций $u(y, t)$ таких, что $u_\alpha(y, t) = \alpha^{-1/p}(t) u(y, t)$ принадлежит L_p^* . Норму в $L_{p, \alpha}^*$ определим равенством

$$\|u\|_{p, \alpha} = \|\alpha^{-1/p}(t) u\|_p.$$

К уравнению (4) и условиям (5) применим оператор (см. [2])

$$G_{\alpha, p}[u(y, t)] = \alpha^{1/p}(t) u(y, t)|_{t=t(y_n)}, \quad (6)$$

где $t = t(y_n)$ – функция, обратная $y_n = y_n(t) = \gamma J(t)$, а постоянная $\gamma > 0$ определяется из условия $\gamma J(\infty) = \pi$.

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \|G_{\alpha, p}[u]\|_{L_p(T_0^{n-1} \otimes (0, \pi))} &= \|u\|_p, \\ G_{\alpha, p}[D_{\alpha, t, p}^j u_\alpha] &= \left(\gamma \frac{\partial}{\partial y_n}\right)^j G_{\alpha, p}[u_\alpha], \quad j = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

и полагая $v(y, y_n) = G_{\alpha, p}[u_\alpha(y, t)]$, можно записать задачу (4), (5) в виде

$$\begin{aligned} L\left(\frac{\partial}{\partial y}, \gamma \frac{\partial}{\partial y_n}\right) v - \lambda v &= g(y, y_n), \quad y \in T^{n-1}, \quad 0 < y_n < \pi, \\ \lim_{y_n \rightarrow +0} v &= \lim_{y_n \rightarrow \pi-0} v = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $g(y, y_n) = G_{\alpha, p}[f(y, t)]$.

Наконец, если обозначить через $\tilde{v}(y, y_n)$ нечетное продолжение по y_n функции $v(y, y_n)$ на $(-\pi, 0)$, то задача (8) может быть сведена к нахождению периодического (с периодом 2π) по переменным (y, y_n) решения уравнения

$$L\left(\frac{\partial}{\partial y}, \gamma \frac{\partial}{\partial y_n}\right) \tilde{v} - \lambda \tilde{v} = \tilde{g}(y, y_n), \quad (y, y_n) \in T^n, \quad (9)$$

где $\tilde{g}(y, y_n)$ – нечетное продолжение функции $g(y, y_n)$ на интервал $(-\pi, 0)$. При решении уравнения (9) в классе периодических функций $\tilde{v}(y, y_n)$ следует иметь в виду, что в силу определения (6) и равенств (7) для любого тора T^n имеем

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}\|_{L_p(T^n)} &= \|\tilde{v}\|_{L_p(T_0^n)} = \left(2 \int_0^\pi \int_{T_0^{n-1}} |v(y, y_n)|^p dy dy_n\right)^{1/p} \\ &= 2^{1/p} \|u_\alpha\|_p = 2^{1/p} \|u\|_{p, \alpha}. \end{aligned} \quad (10)$$

2. Решение периодической задачи. Решение задачи (9) будем искать в виде

$$\tilde{v}(y, y_n) = \sum_{(l, l_n)} \tilde{v}_{l, l_n} e^{i(l y + l_n y_n)}, \quad (11)$$

где $l y = l_1 y_1 + l_2 y_2 + \dots + l_{n-1} y_{n-1}$ и сумма распространяется на все целочисленные мультииндексы $(l, l_n) = (l_1, l_2, \dots, l_{n-1}, l_n)$.

Если $\tilde{g}(y, y_n) \in L_p(T^n)$ представить в виде

$$\tilde{g}(y, y_n) = \sum_{(l, l_n)} \tilde{g}_{l, l_n} e^{i(l y + l_n y_n)}, \quad (12)$$

то для выполнения (9) достаточно потребовать, чтобы

$$(L(il, i\gamma l_n) - \lambda) \tilde{v}_{l, l_n} = \tilde{g}_{l, l_n}, \quad |l_n| > 0, \quad \tilde{v}_{l, 0} = \tilde{g}_{l, 0} = 0. \quad (13)$$

Разрешимость (13) основана на выполнении следующего требования.

УСЛОВИЕ А. При любых $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda = \rho e^{i(\theta + m\pi/2)}$, $\rho \geq 0$, $|\theta| \leq \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, многочлен $L(\xi, \eta) - \lambda$ не обращается в 0 при $|\xi|^2 + \eta^2 + \rho^{2/m} > 0$.

При выполнении условия А система (13) разрешима, поскольку для $\Phi(l, l_n, \lambda) = L(il, i\gamma l_n) - \lambda = i^m (L(l, \gamma l_n) - \rho e^{i\theta})$ при $|l|^2 + l_n^2 + \rho^{2/m} > 0$ справедлива оценка

$$|\Phi(l, l_n, \lambda)|^2 = |L(l, \gamma l_n) - \rho e^{i\theta}|^2 \geq C_1^2 (|l|^2 + \gamma^2 l_n^2 + \rho^{2/m})^m, \quad (14)$$

где

$$C_1^2 = C_1^2(\theta) = \inf_{\substack{|\xi|^2 + \eta^2 + \rho^{2/m} = 1 \\ \rho \geq 0}} |L(\xi, \eta) - \rho e^{i\theta}|^2 > 0.$$

Таким образом, из (11) и (13) находим

$$\tilde{v}(y, y_n) = \sum_{(l, l_n)} \frac{\tilde{g}_{l, l_n}}{\Phi(l, l_n, \lambda)} e^{i(l y + l_n y_n)}. \quad (15)$$

Кроме того, из (15) следует

$$\rho^{(m-|\sigma|-\sigma_n)/m} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\sigma \left(\gamma \frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{\sigma_n} \tilde{v}(y, y_n) = \sum_{\substack{(l, l_n) \\ |l_n| > 0}} \Psi_{\sigma, \sigma_n}(l, l_n, \lambda) \tilde{g}_{l, l_n} e^{i(l y + l_n y_n)},$$

где

$$\Psi_{\sigma, \sigma_n}(l, l_n, \lambda) = \frac{\rho^{(m-|\sigma|-\sigma_n)/m} l^\sigma(\gamma, l_n)^{\sigma_n}}{\Phi(l, l_n, \lambda)}.$$

Функцию Ψ_{σ, σ_n} можно рассматривать как мультипликатор в пространстве L_p^* ($1 < p < \infty$) ряда (12) и воспользоваться достаточным условием его ограниченности в L_p^* (условием Марцинкевича–Михлина, см. [3]), которое в данном случае можно записать в виде: для любых $\alpha_j = 0$ или 1, $j = \overline{1, n}$,

$$\left| \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \eta^{\alpha_n} \frac{\partial^{|\alpha|} \Psi_{\sigma, \sigma_n}(\xi, \eta, \lambda)}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \partial \xi_2^{\alpha_2} \dots \partial \xi_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \partial \eta^{\alpha_n}} \right| \leq C_{\sigma, \sigma_n}(\theta) \quad (16)$$

при всех $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих условию А.

Проверка условия (16) легко проводится с помощью оценки (14). Таким образом, для любого тора T^n при $|\sigma| + \sigma_n \leq m$ из (16) вытекает

$$\rho^{(m-|\sigma|-\sigma_n)/m} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\sigma \left(\gamma \frac{\partial}{\partial y_n} \right)^{\sigma_n} \tilde{v} \right\|_{L_p(T^n)} \leq K_p C_{\sigma, \sigma_n} \|\tilde{g}\|_{L_p(T_0^n)}, \quad (17)$$

где постоянная $K_p > 0$ зависит от p .

Из (17) следует, что функция $\tilde{v}(y, y_n)$, определенная формулой (15), принадлежит пространству Соболева W_p^m в любом торе T^n и, следовательно, в любой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Учитывая, что по построению $\tilde{v}(y, y_n)$ является нечетной функцией y_n , на основании известных теорем вложения Соболева можно утверждать, что

$$\lim_{y_n \rightarrow +0} \|\tilde{v}(\cdot, y_n)\|_{L_p(T^{n-1})} = \lim_{y_n \rightarrow \pi-0} \|\tilde{v}(\cdot, y_n)\|_{L_p(T^{n-1})} = 0. \quad (18)$$

Тот факт, что $\tilde{v}(y, y_n)$ является решением уравнения (9), вытекает непосредственно из (13).

3. Существование решения задачи (2), (3). Справедлива следующая

ТЕОРЕМА. Пусть $1 < p < \infty$ и $\alpha(t)$ удовлетворяет (1). Тогда при выполнении условия А для любой $f(y, t) \in L_{p, \alpha}^*(G_n)$ существует единственное решение $u(y, t)$ задачи (2), (3), причем справедлива оценка

$$\sum_{|\sigma| + \sigma_n \leq m} \rho^{(m-|\sigma|-\sigma_n)/m} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\sigma \left(\alpha(t) \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\sigma_n} u \right\|_{p, \alpha} \leq C \left\| L \left(\frac{\partial}{\partial y}, \alpha(t) \frac{\partial}{\partial t} \right) u - \lambda u \right\|_{p, \alpha}, \quad (19)$$

где $\lambda = \rho e^{i(\theta + m\pi/2)}$, $\rho \geq 0$, $|\theta| < \pi - \varepsilon$. Постоянная $C > 0$ зависит лишь от m, n, p и θ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $v(y, y_n)$ сужение функции $\tilde{v}(y, y_n)$, определенной формулой (15) на $T_0^{n-1} \otimes (0, \pi)$. Очевидно, что из (17) немедленно вытекает оценка

$$\rho^{(m-|\sigma|-\sigma_n)/m} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\sigma \left(\gamma \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\sigma_n} v \right\|_{L_p(T_0^{n-1} \otimes (0, \pi))} \leq 2^{1/p} K_p C_{\sigma, \sigma_n} \|g\|_{L_p(T_0^{n-1} \otimes (0, \pi))}. \quad (20)$$

Кроме того, из (18) вытекает

$$\lim_{y_n \rightarrow +0} \|v(\cdot, y_n)\|_{L_p(T_0^{n-1})} = \lim_{y_n \rightarrow \pi-0} \|v(\cdot, y_n)\|_{L_p(T_0^{n-1})} = 0. \quad (21)$$

Далее положим $u_\alpha(y, t) = G_{\alpha, p}^{-1}[v(y, y_n)] = \alpha^{-1/p}(t)v(y, y_n(t))$. С помощью (7) легко устанавливается, что u_α является решением уравнения (4) при $f_\alpha = G_{\alpha, p}^{-1}[g]$, а из (21) вытекает справедливость (5). Учитывая (10), из (20) выводим

$$\rho^{(m-|\sigma|-\sigma_n)/m} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\sigma D_{\alpha, p}^{\sigma_n} u_\alpha \right\|_{L_p(T_0^{n-1} \otimes \mathbb{R}_+)} \leq 2^{1/p} K_p C_{\sigma, \sigma_n} \|f_\alpha\|_{L_p(T_0^{n-1} \otimes \mathbb{R}_+)}. \quad (22)$$

Поскольку задача (4), (5) эквивалентна задаче (2), (3) для $u(y, t) = \alpha^{1/p} u_\alpha(y, t)$, разрешимость задачи (2), (3) следует из разрешимости задачи (4), (5), а оценка (19) – из оценки (22).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глушко В. П., Малютина О. П. // Тр. матем. фак-та. № 1. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1997. С. 29–34. 2. Глушко В. П., Савченко Ю. Б. // Итоги науки и техн. Матем. анализ. Т. 23. М.: ВИНТИ, 1985. С. 125–218. 3. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

Воронежский государственный университет

Поступило
15.01.98