Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Кановей, И. Заплетал, Пирамидальная структура степеней конструктивности, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 4, 632–635

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1325>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:17:54

В. Г. Кановей, И. Заплетал

Введение. Рассматривается модель, структура степеней конструктивности которой включает

- 1) степени $0 < a_0 < a_1 < \dots$, где 0 – конструктивная степень;
- 2) степень $b > 0$, несравнимую ни с одной из a_n ;
- 3) “конкатенации” $a_0b < a_1b < a_2b < \dots$;
- 4) наибольшую степень $a_\omega b$.

Степени $a_0, a_1, \dots$ и b можно было бы получить при помощи форсинга $\text{Sacks}^\omega \times \text{Sacks}$. (Здесь Sacks^ω есть итерация форсинга Сакса Sacks длины ω со счетной “поддержкой”, см. [1]. Соответственно Sacks^m есть итерация Sacks длины m .) Однако, при этом возникает еще одна степень a_ω – верхняя грань степеней a_n , $n \in \omega$, которая несравнима с b и поэтому отлична от $a_\omega b$. Следовательно, необходима иная форма итерации.

Рис. 1. Структура L -степеней в рассматриваемой модели

Рис. 2. Структура L -степеней в обычной итерированной модели Сакса с той же системой образующих a_n и b

(Вещественными) *числами* мы называем элементы множества ω^ω .

Работа первого автора выполнена при поддержке Калтеха и НИОКР МПС России. Работа второго автора выполнена при поддержке фонда GA CR, грант № 201/97/0216.

ТЕОРЕМА. Пусть ω_1^L счетно. Тогда существует генерическое расширение $\mathbf{M} = \mathbf{L}[\langle a_n : n \in \omega \rangle, b]$, порожденное числами a_n и b , такое, что

- i) для любого n $\langle \langle a_0, \dots, a_n \rangle, b \rangle$ является $(\text{Sacks}^{n+1} \times \text{Sacks})$ -генерической над $\mathbf{L}$ по следовательности;
- ii) каждое число $x \in \mathbf{M}$ или принадлежит $\mathbf{L}[a_0, \dots, a_n, b]$ для некоторого n , или удовлетворяет свойству $\mathbf{L}[x] = \mathbf{L}[\langle a_n : n \in \omega \rangle, b]$.

Согласно известным свойствам обычных итерированных моделей Сакса (см. [1], [2]) такая модель $\mathbf{M}$ имеет структуру степеней конструктивности чисел, описанную в 1)–4).

1. Форсинг. Следующие рассуждения проводим в модели $\mathbf{L}$.

Пусть $\mathbf{S} = \text{Sacks}$ – форсинг Сакса. Для любого n обозначим через $\mathbf{S}^n$ итерацию форсинга Сакса длины n с соответствующим отношением форсинга $\Vdash_n$. Каждое $\tau \in \mathbf{S}^n$ есть функция, заданная на множестве $n = \{0, \dots, n-1\}$, так что $\tau \restriction k \Vdash_k \langle \tau(k) \in \check{\mathbf{S}} \rangle$ для всех $k < n$.

Если $u \in 2^n$ и f – функция такая, что каждое ограничение вида $u \restriction k$, $k < n$, принадлежит $\text{dom } p$, то через $f|_u$ обозначим функцию, определенную на n по правилу $(f|_u)(k) = f(u \restriction k)$ для всех $k < n$.

Определим форсинг $\mathbf{P}$ как семейство всех $p = \langle T_p, f_p \rangle$ таких, что

- a) $T_p \subseteq 2^{<\omega}$ – совершенное дерево;
- б) f_p – функция, определенная на T_p так, что $f_p|_u \in \mathbf{S}^n$ для всех $u \in T_p \cap 2^n$.

Скажем, что q сильнее p (или $q \leq p$), если $T_q \subseteq T_p$ и $f_q|_u \leq f_p|_u$ в $\mathbf{S}^n$ для каждого $u \in T_q \cap 2^n$. Символом $\Vdash$ обозначим отношение $\mathbf{P}$ -форсинга.

Напомним, что $u \in T$ называется *расщепляющейся вершиной* дерева $T \subseteq 2^{<\omega}$, если вершины $u \wedge 0$ и $u \wedge 1$ принадлежат T . Расщепляющаяся вершина *уровня* n имеет ровно n расщепляющихся вершин ниже себя. Совершенное дерево T содержит в точности 2^n расщепляющихся вершин на каждом уровне n .

Пусть S и T – совершенные деревья. Положим $S \leq_n T$, если $S \subseteq T$ и n -е расщепляющиеся уровни в S и T совпадают. Известно, что если T_n – совершенные деревья и $T_0 \geq_0 T_1 \geq_1 T_2 \geq_2 \dots$, то $T = \bigcap T_n$ – также совершенное дерево.

Эта конструкция принимает следующую форму для форсинга $\mathbf{P}$.

Пусть $p, q \in \mathbf{P}$. Положим $q \leq_n p$, если $q \leq p$, $T_q \leq_n T_p$ и каждое $u \in T_q \cap 2^m$, $m < n$, удовлетворяет свойству $f_q|_u \Vdash_m \langle f_q(u) \leq_n f_p(u) \rangle$. Тогда любая убывающая цепь $p_0 \geq_0 p_1 \geq_1 p_2 \geq_2 \dots$ вынуждающих условий $p_n \in \mathbf{P}$ имеет нижнюю грань в $\mathbf{P}$.

2. Расширение. Если множество $G \subseteq \mathbf{P}$ является $\mathbf{P}$ -генерическим над $\mathbf{L}$, то $T = \bigcap_{p \in G} T_p$ – генерическая цепь в $2^{<\omega}$, так что $b = \bigcup T \in 2^\omega$ есть число Сакса над $\mathbf{L}$.

Пусть $n \in \omega$. Положим $u = b \restriction n$, $u \in 2^n$. Тогда множество $G|_u = \{f_p|_u : p \in G\}$ является $\mathbf{S}^n$ -генерическим над $\mathbf{L}$, т.е. над $\mathbf{L}$ задана $\mathbf{S}^n$ -генерическая последовательность чисел $\langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle$, в которой каждое $a_k \in 2^\omega$ – число Сакса над $\mathbf{L}[a_0, \dots, a_{k-1}]$. (Разумеется, здесь a_k не зависит от выбора $n > k$.) Более того, последовательность $\langle \langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle, b \rangle$ является $(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S})$ -генерической над $\mathbf{L}$.

Теперь нам осталось доказать утверждение ii) теоремы. Оно вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 1. Предположим, что число $x \in \mathbf{L}[G]$ не принадлежит классу $\mathbf{L}[a_0, \dots, a_n, b]$ ни при каком n . Тогда $G \in \mathbf{L}[x]$.

Начнем доказательство с определения. *Ростером размера* l называется конечная последовательность вида $R = \langle u, w_0, \dots, w_{l-1} \rangle$, в которой все $u, w_0, \dots, w_{l-1}$ принадлежат 2^l . Ростер $R = \langle u, w_0, \dots, w_{l-1} \rangle$ можно понимать как условие в $\mathbf{P}$, вынуждающее $\check{b}$ продолжать u , а каждое $\check{a}_k$, $k < l$, продолжать w_k .

Ростер $R = \langle u, w_0, \dots, w_{l-1} \rangle$ согласуется с генерическим множеством G , если $u \in b$ и $w_k \in a_k$ для всех $k < l$. Ростер R согласуется с условием $p \in \mathbf{P}$, если существует более сильное условие $q \leq p$, вынуждающее R быть согласованным с G . В этом случае имеется наибольшее (т.е. слабейшее) условие q такого вида, обозначаемое как $q = p \restriction R$ (*ограничение p на R*): q получается присоединением к p информации о том, что $\check{b}$ продолжает u и каждое $\check{a}_k$, $k < l$, продолжает w_k .

Будем говорить, что условие $p \in \mathbf{P}$ *вполне n -расщепляется ниже l* , если n -й уровень расщепления T_p целиком ниже l и для любого $u \in T_p \cap 2^m$, $m \leq n$, имеем

$$f_p|_u \Vdash_n \text{“} n\text{-й уровень расщепления } f_p(u) \text{ целиком ниже } l \text{”}.$$

ЛЕММА 2. *Предположим, что ростер $R = \langle u, w_0, \dots, w_{l-1} \rangle$ согласуется с условием $p \in \mathbf{P}$, которое вполне n -расщепляется ниже $l \geq n$, а условие $r \in \mathbf{P}$ сильнее чем $p \restriction R$. Тогда существует условие $q \leq_n p$ такое, что $q \restriction R$ совпадает с r .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим T_q как множество всех $v \in T_p$ таких, что либо $u \not\subseteq v$, либо $v \in T_r$. (Тогда каждое $v \in T_r \subseteq$ -сравнимо с u по выбору r .)

Для $v \in T_q$ определим $f_q(v)$. Положим $f_q(v) = f_r(v)$, если $u \subseteq v$, и $f_q(v) = f_p(v)$, если $u, v \subseteq$ -несравнимы. Остается рассмотреть случай строгого включения $v \subset u$. Положим $m = \text{dom } v$, $m < l$. Пусть $f_q(v)$ есть $\mathbf{S}_m$ -имя “если $\exists j < m (w_j \not\subseteq \check{a}_j)$, то я совпадаю с $f_p(v)$; иначе я совпадаю с $\{a \in f_p(v) : w_m \subset a \implies a \in f_r(v)\}$ ”. Из второй части определения следует, что $q \restriction R = r$. Пусть $m < n$ и $v \in T_q \cap 2^m$. Покажем, что $f_q|_v \Vdash_m \text{“} f_q(v) \leq_n f_p(v) \text{”}$. По определению нетривиальным является лишь случай $v = u \restriction m \subset u$. Будем рассуждать в $\mathbf{S}^m$ -генерическом расширении универсума. Все различия между $f_p(v)$ и $f_q(v)$ по определению сконцентрированы в области $D = \{a \in 2^\omega : w_m \subset a\}$, где $w_m \in 2^l$. С другой стороны, n -й уровень расщепления $f_p(v)$ определен *ниже* l , так что эти различия не нарушают свойства $f_q(v) \leq_n f_p(v)$. Следовательно, $q \leq_n p$.

3. Доказательство леммы 1. Пусть $\check{x}$ – имя нашего числа x . По условию леммы некоторое $p \in G$ вынуждает “ $\check{x} \notin \mathbf{L}[\check{a}_0, \dots, \check{a}_n, \check{b}]$ ” для любого n . Индукцией по n определим

- последовательность $p = p_0 \geq_0 p_1 \geq_1 p_2 \geq_2 \dots$ условий $p_n \in \mathbf{P}$;
- последовательность натуральных чисел $l_0 < l_1 < l_2 < \dots$;
- функцию g , отображающую ростеры размера l_n в $\Sigma \cup \{\perp\}$, где Σ – множество всех функций σ таких, что $\text{dom } \sigma \subseteq \omega$ конечно и $\text{ran } \sigma \subseteq \{0, 1\}$, а $\perp$ – формальный символ для отделения несущественных вариантов

так, что для каждого n и любого ростера R размера l_n

$$p_{n+1} \Vdash \text{“} R \text{ согласуется с } \check{G} \iff g(R) \neq \perp \text{ и } g(R) \subset \check{x} \text{”}. \quad (1)$$

Тогда любая нижняя грань $q \in \mathbf{P}$ последовательности условий p_n вынуждает $\check{G}$ быть единственным генерическим множеством, согласованным со всеми ростерами R , удовлетворяющими свойству $g(R) \subset \check{x}$. Следовательно, q вынуждает “ $\check{G} \in \mathbf{L}[\check{x}]$ ”, что и требовалось.

Допустим, что p_n уже определено. Покажем, как определить l_n , действие g на ростеры размера l_n и условие p_{n+1} .

Первая часть. Согласно известным свойствам форсинга Сакса и его конечных итераций существуют условие $q \leq_n p_n$ и натуральное число $l_n > l_{n-1}$ такие, что $T_q = T_{p_n}$ и q вполне n -расщепляется ниже l_n . Зафиксируем перечисление $\langle R_k^0, R_k^1 \rangle$, $k < K$, всех пар различных ростеров размера l_n . Индукцией по $k \leq K$ определим

- условия $q = q_0 \geq_n q_1 \geq_n q_2 \geq_n \dots \geq_n q_K$ в $\mathbf{P}$;
- натуральные числа $m_k \in \omega$ и $i_k \in \{0, 1\}$

так, что для каждого $k < K$ выполнено

$$q_{k+1} \Vdash \begin{cases} \text{“если } R_k^0 \text{ согласуется с } \check{G}, \text{ то } \check{x}(m_k) = i_k \text{”}, \\ \text{“если } R_k^1 \text{ согласуется с } \check{G}, \text{ то } \check{x}(m_k) \neq i_k \text{”}. \end{cases}$$

Затем положим $p_{n+1} = q_K$ и для любого ростера R размера l_n

$$g(R) = \begin{cases} \{\langle m_k, i_k \rangle : k < K, R = R_k^0\}, & \text{если } R \text{ согласуется с } q_K, \\ \perp & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Такой выбор, очевидно, влечет (1).

Вторая часть. Теперь, имея q_k , определим q_{k+1} , m_k и i_k . Построение включает два шага.

Шаг 1. Находим пару промежуточных условий q^0 и q^1 . Если ростер R_k^0 не согласуется с q_k , то положим $q^0 = q^1 = q_k$ и перейдем к шагу 2. Допустим, что R_k^0 согласуется с q_k . Напомним, что R_k^0 – ростер размера l_n , т.е. $R_k^0 = \langle u, w_0, \dots, w_{l_n-1} \rangle$, где u и w_j принадлежат 2^{l_n} .

Поскольку q_k вынуждает " $\check{x} \notin \mathbf{L}[\check{a}_0, \dots, \check{a}_{l_n}, \check{b}]$ ", найдутся условия $r^0, r^1 \in \mathbf{P}$, которые сильнее $q_k \restriction R_k^0$ и удовлетворяют свойствам $T_{r^0} = T_{r^1}$ (заметим, что тогда $u \in T_{r^0} = T_{r^1}$) и $f_{r^0}|_u = f_{r^1}|_u$, а также найдется число $m_k \in \omega$ такое, что $r^0 \Vdash "\check{x}(m_k) = 0"$ и $r^1 \Vdash "\check{x}(m_k) = 1"$.

Существование условий q^0 и q^1 в $\mathbf{P}$, для которых $q^i \leq_n q_k$ и $q^i \restriction R_k^0 = r^i$, $i = 0, 1$, обеспечивается леммой 2. Более того, как показывает анализ доказательства леммы 2, если условия r^i выбраны, то условия q^i можно выбрать так, чтобы $T_{q^0} = T_{q^1}$ и $f_{q^0}(v) = f_{q^1}(v)$ для всех $v \in T_{q^0} = T_{q^1}$, не удовлетворяющих включению $u \subseteq v$. В частности, выполнено $q^0 \restriction R = q^1 \restriction R$ для любого ростера размера l_n .

Шаг 2. Если R_k^1 не согласуется с q^0 (значит, и с q^1 согласно сказанному выше), то положим $q_{k+1} = q^0$ и $i_k = 0$. Допустим, что R_k^1 согласуется с r .

Условие $r \leq q^0 \restriction R_k^1$ определяет значение $\check{x}(m_k)$ равным, скажем, 0. Положим $i_k = 1$. Согласно сказанному выше $r \leq q^1 \restriction R_k^1$. С помощью леммы 2 получаем условие $q \leq_n q^1$ такое, что $q \restriction R_k^1 = r$. Итак, $q \leq_n q_k$, $q \restriction R_k^1 = r \Vdash "\check{x}(m_k) = 0"$, и если q согласуется с R_k^0 , то $q \restriction R_k^0 \leq q^1 \restriction R_k^0$. Следовательно, $q \restriction R_k^0 \Vdash "\check{x}(m_k) = i_k = 1"$.

Таким образом, условие $q_{k+1} = q$ имеет требуемые свойства.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baumgartner J. E., Laver R. // Ann. Math. Logic. 1979. V. 17. P. 271–288.
2. Kanovei V. On non-wellfounded iterations of perfect set forcing // J. Symbolic Logic (to appear).