Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, О фазовом переходе для классических фермионов, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 4, 635–637

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1326>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 12:50:15

О ФАЗОВОМ ПЕРЕХОДЕ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ ФЕРМИОНОВ

В. П. Маслов

Рассмотрим решетчатое распределение (наблюдаемой) случайной величины α на шестимерной кубической решетке M с шагом Δ в фазовом пространстве $\mathbb{R}^6$ функций от $q, p \in \mathbb{R}^3$. Будем считать, что число испытаний (или, что то же самое, число частиц) N распределено по геометрической прогрессии.

Пусть $\rho(q_m, p_m)$, $m \in M$, – решетчатое распределение. Мы будем рассматривать суммы случайных величин, зависящих определенным образом, а именно:

- 1) если один номер выпал (как в лотерее), то он выбывает из игры;
- 2) если группа из N человек (частиц) занимает очередь, то место, занятое одним, уже не может быть занято другим членом группы, причем не имеет значения, кто именно занял то или иное место.

Последний случай отвечает пределу $\hbar \rightarrow 0$ для фермионов в квантовой механике и назван автором *классическими фермионами*. Математическое ожидание (среднее) суммы N таких случайных величин, где N распределено по геометрической прогрессии, определяется следующим образом.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01544.

Распределение $\rho^N(q_m, p_m)$ рассматривается как оператор умножения на решетке M^N в пространстве функций от q_m^i, p_m^i ($i = 1, \dots, N, m \in M$), антисимметрических относительно перестановки q_m^i, p_m^i и q_m^j, p_m^j . Среднее суммы определяется как

$$A_N = \text{Sp} \left(\frac{1}{\Delta^6} \sum_{i=1}^N \alpha(q_m^i, p_m^i) \rho^N(q_m, p_m) \right)$$

на этих антисимметрических функциях. Отметим, что след по всем функциям решетки M^N совпадает с обычным определением среднего (математического ожидания) суммы *независимых* случайных величин. Геометрическое осреднение по N приводит к формуле

$$\langle \alpha \rangle = \frac{\sum z^N A_N}{\sum z^N \rho^N} = \frac{1}{\Delta^6} \sum_{m \in M} \frac{\alpha(q_m, p_m)}{1 + \rho(q_m, p_m) z^{-1}}.$$

Если решетка расположена в объеме Ω по q и R по p , то при $\Delta \rightarrow 0$ получаем

$$\langle \alpha \rangle = \int_{\Omega} dq \int_R dp \frac{\alpha(q, p)}{1 + \rho(q, p) z^{-1}}.$$

Рассмотрим теперь N -частичный гамильтониан

$$H_N(q_m^1, p_m^1, \dots, q_m^N, p_m^N) = \sum_{i=1}^N \frac{(p_m^i)^2}{2m} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N V(q_m^i - q_m^j)$$

на решетке M^N и распределение $\exp(-\beta H_N)$, где $\beta = 1/(kT)$, k – постоянная Больцмана, T – температура.

В “термодинамическом пределе”, т.е. когда $\Delta \rightarrow 0$ и среднее число частиц $\langle 1 \rangle$, деленное на объем Ω , имеет предел при $N \rightarrow \infty$, для среднего значения $\langle \alpha \rangle$ можно получить формулу

$$\langle \alpha \rangle = \int_{\Omega} dq \int_R dp \frac{\alpha(p, q)}{1 + \exp(\beta(p^2/(2m) + W(q) - \mu))}, \quad (1)$$

где $\mu = \ln z$ – химпотенциал, $W(q)$ – средний (“одетый”) потенциал,

$$W(q^i) = \frac{1}{\Delta^6} \left\langle \sum_{j=1}^N V(q^i - q^j) \right\rangle$$

по тому же распределению, т.е.

$$W(q) = \int_{\Omega} dq' V(q - q') \int_R dp \frac{1}{1 + \exp(\beta(p^2/(2m) + W(q') - \mu))}. \quad (2)$$

Заметим, что формулы (1), (2) могут быть непосредственно получены предельным переходом $\hbar \rightarrow 0$ из температурных уравнений Хартри. При $\beta \rightarrow \infty$ ($T = 0$) мы приходим к уравнению типа Тома-са–Ферми:

$$W(q) = \int_{\Omega} V(q - q') (\mu - W(q'))_+^{3/2} dq'. \quad (3)$$

Уравнения (1) и (3) имеют тривиальное решение $W(q) = \text{const}$, которое является “нормальным” решением. Однако, можно убедиться, что при малых температурах (в частности, при нулевой температуре) исходной задаче отвечает нетривиальное решение этих уравнений. Если $V(y) \geq 0$, а $V''(0)$ достаточно велико, $V \in C_0^\infty$, то при $T = 0$ задаче отвечает решение, соответствующее всевозможным парам фермионов

$$\{(q^1, p^1), (q^2, p^2)\}, \quad \{(q^1, p^1), (q^3, p^3)\}, \quad \dots, \quad \{(q^1, p^1), (q^N, p^N)\}, \quad \{(q^2, p^2), (q^3, p^3)\}, \quad \dots \quad (4)$$

(в отличие от куперовских пар $(q_1, q_2), (q_3, q_4), (q_5, q_6), \dots$, см. [1]–[3]). В частности, это выполнено для модельного потенциала взаимодействия вида $V(y) = \alpha y^2$ при $|y| \leq A$, где A достаточно велико, и

$$\alpha^{2/3} \mu^{1/3} > \frac{(a_0 + a_1)^{1/3}}{a_1}, \quad a_0 = \int (1 - t^2)_+^{3/2} t^2 dt, \quad a_1 = \int (1 - t^2)_+^{3/2} dt.$$

При $|x| \leq C(A)$, где $C(A)$ – некоторая константа, удовлетворяющая условию $C(\infty) = \infty$, решение имеет вид

$$W(x) = \frac{\mu a_0}{a_0 + 1} + \alpha^{2/3} \mu^{4/3} \frac{a_1^2}{(a_0 + a_2)^{4/3}} x^2.$$

В общем случае (при достаточно большом $V''(0)$) существуют интервал $0 \leq T \leq T_0$, Ω , R и μ такие, что уравнение (2) имеет нетривиальное решение, которое отвечает исходной задаче и параметрам (4).

С другой стороны, при достаточно малом β производная по W второго интеграла в (2) меньше 1, что приводит к теореме единственности решения уравнения (2) в пространстве непрерывных функций. Иными словами, при достаточно больших температурах “нормальное” решение уравнения (2) является константой.

Следовательно, существует температура T_0 такая, что нетривиальное решение переходит в “нормальное” и испытывает слабый скачок (скачок некоторой производной), а значит, и свободная энергия испытывает слабый скачок, т.е. происходит фазовый переход. Точка T_0 принадлежит дискретному множеству точек бифункций.

Рассмотрим уравнение в вариациях для (2) вблизи тривиального (“нормального”) решения. Пусть $\overline{W}(\beta)$ – константа, удовлетворяющая уравнению (2). Уравнение в вариациях вблизи $\overline{W}(\beta)$ имеет вид

$$\varphi(q) = -\beta \int_R dp \frac{\exp(\beta(p^2/(2m) + \overline{W}(\beta) - \mu))}{(1 + \exp(\beta(p^2/(2m) + \overline{W}(\beta) - \mu)))^2} \int_\Omega V(q - q') \varphi(q') dq'.$$

Пусть $\lambda_n > 0$ – собственное значение задачи

$$\varphi(q) = -\lambda_n \int_\Omega V(q - q') \varphi(q') dq'.$$

Тогда $\beta^0 = 1/(kT_0)$ принадлежит одному из невязных решений $\{\beta_n\}$ уравнений

$$\beta_n \int_R dp \frac{\exp(\beta_n(p^2/(2m) + \overline{W}(\beta) - \mu))}{(1 + \exp(\beta_n(p^2/(2m) + \overline{W}(\beta) - \mu)))^2} = \lambda_n.$$

Таким образом, мы можем указать оценку снизу для точки T_0 . При достаточно большом R точка T_0 , как правило, оказывается достаточно высокой. Возможно, этот фазовый переход для указанной модели может быть интерпретирован как переход из сверхпроводящего состояния в нормальное.

В заключение автор выражает глубокую благодарность С. И. Похожаеву и Г. В. Ковалю за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Maslov V. P. // Russian J. Math. Phys. 1997. V. 5. №3. P. 405–410.
2. Маслов В. П. // Матем. заметки. 1997. Т. 62. №4. С. 633–634.
3. Маслов В. П. // Матем. заметки. 1998. Т. 63. №1. С. 145–146.