Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Шананин, Об особенностях решений линеаризованной системы уравнений Навье–Стокса, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 4, 638–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1327>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 15:15:18

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

Н. А. Шананин

Понятие волнового фронта обобщенной функции является развитием понятия сингулярного носителя. Для описания особенностей обобщенных функций оно было введено Хёрмандером [1], [2]. В работе Дюистермата и Хёрмандера [3] на его основе было получено описание структуры особенностей решений (псевдо)дифференциальных уравнений. Используемое ниже понятие анизотропного волнового фронта является модификацией изотропного на тот случай, когда при выделении старшей части дифференциального оператора дифференцированием по разным координатам удобно приписывать разные веса. Ранее взвешенный волновой фронт использовался в ряде работ для получения теорем типа теоремы о распространении особенностей [4]–[7].

Рассмотрим линеаризованную систему дифференциальных уравнений Навье–Стокса

$$\begin{aligned} v_t - \nu \Delta v + \operatorname{grad} p &= f, & (x, t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}, \\ \operatorname{div} v &= g, \end{aligned} \quad (1)$$

где $v(x, t)$, $f(x, t)$ – векторные обобщенные функции, $p(x, t)$, $g(x, t)$ – скалярные обобщенные функции, Δ – оператор Лапласа по координатам x , $\nu \neq 0$. При изучении особенностей решений системы (1) удобно приписывать дифференцированию по переменной $t \in \mathbb{R}$ вес 2, а дифференцированию по x вес 1. Положим $\Lambda(\xi, \tau) = |\xi| + |\tau|^{1/2}$, где $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\tau \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что обобщенная функция $u(x, t) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ бесконечно дифференцируема (принадлежит пространству H_w^s) в точке (x_0, t_0) , если существует функция $\varphi(x, t) \in \mathcal{D}(\Omega)$ такая, что $\varphi(x_0, t_0) \neq 0$ и $\varphi u(x, t) \in \mathcal{D}(\Omega)$ (преобразование Фурье $\widehat{\varphi u}(\xi, \tau)$ удовлетворяет включению $(1 + \Lambda)^s \widehat{\varphi u}(\xi, \tau) \in L_2(\mathbb{R}^{n+1})$). Сингулярным носителем $\operatorname{sing supp} u$ обобщенной функции $u(x, t) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ называется дополнение множества $\{(x, t) \mid u \in C^\infty \text{ в точке } (x, t)\}$. Положим $s_u(x, t) = \sup\{r \mid u \in H_w^r \text{ в точке } (x, t)\}$. Функция $s_u(x, t)$ принимает значения на множестве $(-\infty, \infty]$ и полунепрерывна снизу. Пусть $(x_0, t_0) \notin \operatorname{sing supp} u$. Обозначим через $F_{(x_0, t_0)}(u)$ связную компоненту множества $(\Omega \cap \{t = t_0\}) \setminus \operatorname{sing supp} u$, содержащую точку (x_0, t_0) .

ТЕОРЕМА 1. Пусть обобщенные функции $v(x, t)$, $p(x, t)$ удовлетворяют системе (1). Тогда

- 1) для любого $j = 1, 2, \dots, n$ справедливо равенство

$$\operatorname{sing supp} v_j = \operatorname{sing supp} \left(f_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} \right),$$

причем $s_{v_j}(x, t) = s_{f_j - \partial p / \partial x_j}(x, t) + 2$;

- 2) для любой точки (x_0, t_0) , не принадлежащей сингулярному носителю обобщенной функции $\mathcal{F}_{n+1} = \operatorname{div} f - (\partial_t - \nu \Delta)g$, пересечение

$$\operatorname{sing supp} p \cap F_{(x_0, t_0)}(\mathcal{F}_{n+1})$$

либо пусто, либо совпадает с $F_{(x_0, t_0)}(\mathcal{F}_{n+1})$.

Из теоремы следует, что бесконечная дифференцируемость в точке (x_0, t_0) обобщенных функций $f(x, t)$ и $p(x, t)$ влечет бесконечную дифференцируемость в этой точке обобщенных функций $v(x, t)$ и $g(x, t)$. Если векторные обобщенные функции $v(x, t)$ и $f(x, t)$ бесконечно дифференцируемы на произведении $U \times (t_1, t_2) = Q \subset \Omega$, где U – связная область в $\mathbb{R}^n$, то можно показать, что справедливо представление $p(x, t) = p_0(t) + p_1(x, t)$, где $p_0(t) \in \mathcal{D}'((t_1, t_2))$, $p_1(x, t) \in C^\infty(Q)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01130.

Пусть ξ, τ – двойственные переменные по отношению к переменным x, t . Множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ называется *квазиконическим*, если одновременно с каждой точкой (ξ, τ) этому множеству принадлежит любая точка вида $(\lambda\xi, \lambda^2\tau)$, где $\lambda > 0$. Будем говорить, что *точка* $(x_0, t_0, \xi_0, \tau_0) \in \Omega \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ не принадлежит волновому фронту $\text{WF}_w(u)$ ($\text{WF}_{w,s}(u)$, где $s \in \mathbb{R}$), если существуют функция $\varphi(x, t) \in \mathcal{D}(\Omega)$ и квазиконическое множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$, содержащее точку (ξ_0, τ_0) , такие, что $\varphi(x_0, t_0) \neq 0$ и для любого натурального числа N найдется константа C_N , с которой на множестве Γ выполняется оценка

$$|\widetilde{\varphi}u(\xi, \tau)| \leq C_N (1 + \Lambda(\xi, \tau))^{-N}$$

$((1 + \Lambda)^s \widetilde{\varphi}u(\xi, \tau) \in L_2(\Gamma)$ соответственно). Пусть $\pi: \Omega \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \Omega$ – естественная проекция. Тогда $\pi(\text{WF}_w(u)) = \text{sing supp } u$. Обобщенная функция u принадлежит пространству H_w^s в точке (x_0, t_0) тогда и только тогда, когда пересечение множеств $(\pi^{-1}(x_0, t_0) \setminus \{0\}) \cap \text{WF}_{w,s}(u)$ пусто. Если $s_1 < s_2$, то $\text{WF}_{w,s_1}(u) \subseteq \text{WF}_{w,s_2}(u)$ для любой обобщенной функции u . Для любого дифференциального оператора P с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами взвешенного порядка m , обобщенной функции u и вещественного числа s справедливо включение $\text{WF}_{w,s}(Pu) \subseteq \text{WF}_{w,s+m}(u)$. Положим

$$\text{Char} = \{(x, t, \xi, \tau) \mid (x, t) \in \Omega, \xi = 0, \tau \neq 0\}.$$

Из теоремы 5 работы [8] и квазиэллиптичности оператора $\partial_t - \nu\Delta$ следует теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть обобщенные функции $v(x, t)$, $p(x, t)$ удовлетворяют системе (1). Тогда для любого числа $s \in \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$\text{WF}_{w,s}(v_j) = \text{WF}_{w,s-2}\left(f_j - \frac{\partial p}{\partial x_j}\right), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

и включения

$$\text{WF}_{w,s-2}(\mathcal{F}_{n+1}) \subseteq \text{WF}_{w,s}(p) \subseteq \text{WF}_{w,s-2}(\mathcal{F}_{n+1}) \cup \text{Char},$$

$$\text{WF}_{w,s-4}(\mathcal{F}_j) \subseteq \text{WF}_{w,s}(v_j) \subseteq \text{WF}_{w,s-4}(\mathcal{F}_j) \cup \text{Char},$$

где $\mathcal{F}_j = -\Delta f_j + \partial_{x_j}(\text{div } \mathbf{f} - (\partial_t - \nu\Delta)g)$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Пусть точка $(x_0, t_0, 0, \tau_0) \in \Omega \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ не принадлежит волновому фронту $\text{WF}_w(u)$ обобщенной функции $u(x, t)$. Обозначим через $F_{(x_0, t_0, 0, \tau_0)}(u)$ связанную компоненту множества

$$((\Omega \times \mathbb{R}^{n+1}) \cap \{t = t_0, \xi = 0, \tau = \tau_0\}) \setminus \text{WF}_w(u),$$

содержащую точку $(x_0, t_0, 0, \tau_0)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть обобщенные функции $v(x, t)$, $p(x, t)$ удовлетворяют системе (1). Тогда

- 1) для любого числа $s \in \mathbb{R}$ справедливы равенства (2) и включения

$$\text{WF}_w(\mathcal{F}_{n+1}) \subseteq \text{WF}_w(p) \subseteq \text{WF}_w(\mathcal{F}_{n+1}) \cup \text{Char},$$

$$\text{WF}_w(\mathcal{F}_j) \subseteq \text{WF}_w(v_j) \subseteq \text{WF}_w(\mathcal{F}_j) \cup \text{Char}, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

- 2) для любой точки $(x_0, t_0, 0, \tau_0) \in \Omega \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$, не принадлежащей волновому фронту $\text{WF}_w(\mathcal{F}_{n+1})$, пересечение

$$\text{WF}_w(p) \cap F_{(x_0, t_0, 0, \tau_0)}(\mathcal{F}_{n+1})$$

либо пусто, либо совпадает с $F_{(x_0, t_0, 0, \tau_0)}(\mathcal{F}_{n+1})$.

Пусть $\Omega = U \times (0, T)$. Для однородной системы (1) несложно построить решения, имеющие микролокальные особенности, указанного в теореме 3 типа. Пусть $\psi(x)$ – произвольная ненулевая гармоническая функция в области U , $\omega(t)$ – произвольная обобщенная функция из пространства $\mathcal{D}'((0, T))$. Тогда обобщенные функции $p = -\psi(x)\partial_t\omega(t)$ и $v = \text{grad}_x \psi(x)\omega(t)$ удовлетворяют однородной системе (1) и

$$\text{WF}_w(p) = \bigcup_{(t, \tau) \in \text{WF}(\omega(t))} \{(x, t, 0, \tau) \mid x \in U\}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hörmander L. // Act. Congr. Int. Math. Nice. 1970. V. 1. P. 121–133. 2. Hörmander L. // Acta Math. 1971. V. 127. P. 79–183. 3. Duistermaat J. J., Hörmander L. // Acta Math. 1972. V. 128. P. 183–269. 4. Lascar R. // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1977. V. 27. № 2. P. 79–123. 5. Грушин В. В., Шананин Н. А. // Матем. сб. 1977. Т. 103. № 1. С. 37–51. 6. Parenti C., Segala F. // Comm. Partial Differential Equations. 1981. V. 6. P. 741–782. 7. Sakurai T. // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA. Math. 1981. V. 33. P. 347–378. 8. Шананин Н. А. // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 5. С. 791–796.

Российский университет Дружбы народов

Поступило

28.10.97

Исправленный вариант

18.11.97