Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. С. Ананичев, М. В. Волков, Многообразия разрешимых колец Ли конечной ширины, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 5, 643–650

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1329>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 04:23:55

УДК 512.554.33

МНОГООБРАЗИЯ РАЗРЕШИМЫХ КОЛЕЦ ЛИ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ

Д. С. Ананичев, М. В. Волков

Получено полное описание многообразий колец Ли, решетка подмногообразий которых имеет конечную ширину.

Библиография: 10 названий.

Одним из наиболее важных объектов, ассоциированных с каждым многообразием $\mathcal{V}$, является решетка его подмногообразий $L(\mathcal{V})$. (Напомним, что операции в решетке $L(\mathcal{V})$ определяются так: объединение $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$ подмногообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — это наименьшее многообразие, содержащее $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, а пересечение $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ совпадает с пересечением данных подмногообразий как классов.) В силу этого весьма естественно выглядит идея классификации многообразий по свойствам их решеток подмногообразий. Применительно к многообразиям колец Ли исследования в указанном направлении были инициированы В. А. Артамоновым (см. [1], а также его обзор [2]), исследовавшим такие многообразия $\mathcal{V}$, что решетка $L(\mathcal{V})$ является цепью. В дальнейшем в литературе рассматривались многообразия колец Ли, решетки подмногообразий которых удовлетворяли таким обобщениям свойства “быть цепью”, как дистрибутивность и другие решеточные тождества (см., например, [3]). В настоящей заметке мы изучаем многообразия колец Ли с другим естественным ограничением на решетку подмногообразий, обобщающим свойство “быть цепью” в другом направлении.

Напомним, что *шириной* упорядоченного множества $\langle P; \leq \rangle$ называется точная верхняя грань мощностей антицепей в $\langle P; \leq \rangle$. Классическая теорема Дилуорса [4] характеризует упорядоченные множества конечной ширины n как теоретико-множественные объединения в точности n цепей. Будем для краткости именовать многообразия, решетки подмногообразий которых имеют конечную ширину, *многообразиями конечной ширины*. Целью работы является описание многообразий разрешимых лиевых колец конечной ширины.

Сформулируем основной результат работы. Для каждого простого p обозначим через $\mathcal{M}_p$ многообразие колец Ли, задаваемое тождествами

$$px = 0, \quad xy(zx) = 0, \quad xyz^p = 0, \quad xy^p x^{p-1} = 0. \quad (1)$$

Здесь и ниже используется левонормированная запись, а выражение типа yx^n служит сокращением для

$$\underbrace{yx \cdot x \cdots x}_{n \text{ раз}}.$$

Наименьшее многообразие, содержащее данное кольцо R , назовем *многообразием, порожденным R* .

ТЕОРЕМА. *Многообразие разрешимых колец Ли является многообразием конечной ширины тогда и только тогда, когда оно либо порождается некоторым конечным кольцом, либо представимо в виде объединения многообразия $\mathcal{M}_p$ и некоторого многообразия, порожденного конечным кольцом.*

Необходимость условия теоремы будет доказана в п. 1, достаточность – в п. 2.

1. Напомним, что многообразие, в котором каждое конечнопорожденное кольцо конечно, называется *локально конечным*. Нашей ближайшей целью будет доказательство того, что всякое многообразие разрешимых колец Ли конечной ширины локально конечно. Для этого мы воспользуемся известной характеристикой локально конечных многообразий разрешимых колец Ли на языке “запрещенных объектов”. (Эта характеристика легко вытекает, например, из предложения 1 работы [5], точнее – из эквивалентности условий б) и и) этого предложения). Пусть p – простое число, A_p – абелева алгебра Ли над полем $\text{GF}(p)$ с базисом $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots, s$ – дифференцирование алгебры A_p , определенное правилом $a_n s = a_{n+1}$ для всех $n = 0, 1, \dots$. Через S_p мы обозначим полупрямое произведение $A_p \ltimes \text{GF}(p)s$, а через $\mathcal{A}_0$ – многообразие всех абелевых колец Ли. Многообразие, порожденное кольцом R , будем обозначать через $\text{var } R$.

ЛЕММА 1. *Многообразие разрешимых колец Ли локально конечно тогда и только тогда, когда оно не содержит ни одного из многообразий $\mathcal{A}_0$ и $\text{var } S_p$.*

В силу леммы 1, чтобы доказать, что всякое многообразие разрешимых колец Ли конечной ширины локально конечно, достаточно убедиться, что ни одно из многообразий $\mathcal{A}_0$ и $\text{var } S_p$ не является многообразием конечной ширины. Это очевидно для многообразия $\mathcal{A}_0$, ибо хорошо известно, что решетка $L(\mathcal{A}_0)$ изоморфна решетке неотрицательных целых чисел по делимости и, стало быть, содержит бесконечную антицепь. Зафиксируем теперь простое число p и займемся вычислением ширины решетки $L(\text{var } S_p)$. Заметим, что эта решетка обстоятельно изучалась в [3, § 2], где было показано, например, что среди ее факторов встречаются конечные простые решетки сколь угодно большой длины. Можно проверить, однако, что все эти простые решетки имеют ширину всего лишь 4 и, таким образом, построения из [3] не позволяют ответить на интересующий нас сейчас вопрос.

Для произвольного натурального k обозначим через I_k идеал кольца S_p , порожденный элементом $a_0 - a_{k(p-1)}$, а через T_k – соответствующее факторкольцо S_p/I_k .

ЛЕММА 2. *Кольцо T_k удовлетворяет тождеству $xyz = xyz^{1+k(p-1)}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что для любых элементов $x, y, z \in S_p$ разность $xyz - xyz^{1+k(p-1)}$ лежит в идеале I_k . Ясно, что произведение xy принадлежит коммутанту A_p кольца S_p . Представим его как линейную комбинацию элементов базиса пространства A_p :

$$xy = \alpha_1 a_{i_1} + \alpha_2 a_{i_2} + \dots + \alpha_m a_{i_m} = \alpha_1 a_0 s^{i_1} + \alpha_2 a_0 s^{i_2} + \dots + \alpha_m a_0 s^{i_m}, \quad (2)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \text{GF}(p)$. Запишем еще элемент z в виде суммы $z = a + \lambda s$, где $a \in A_p$, $\lambda \in \text{GF}(p)$. Тогда из (2) получаем

$$\begin{aligned} xyz &= \lambda(\alpha_1 a_0 s^{i_1+1} + \alpha_2 a_0 s^{i_2+1} + \dots + \alpha_m a_0 s^{i_m+1}), \\ xyz^{1+k(p-1)} &= \lambda^{1+k(p-1)}(\alpha_1 a_{k(p-1)} s^{i_1+1} + \alpha_2 a_{k(p-1)} s^{i_2+1} + \dots + \alpha_m a_{k(p-1)} s^{i_m+1}). \end{aligned}$$

Вычитая из первого равенства второе и учитывая, что $\lambda^{1+k(p-1)} = \lambda$ для любого $\lambda \in \text{GF}(p)$, приходим к равенству

$$xyz - xyz^{1+k(p-1)} = \lambda(\alpha_1(a_0 - a_{k(p-1)})s^{i_1+1} + \alpha_2(a_0 - a_{k(p-1)})s^{i_2+1} + \dots + \alpha_m(a_0 - a_{k(p-1)})s^{i_m+1}),$$

которое и показывает, что элемент $xyz - xyz^{1+k(p-1)}$ принадлежит идеалу I_k .

ЛЕММА 3. *Если k не делит n , то кольцо T_k не удовлетворяет тождеству $xyz = xyz^{1+n(p-1)}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно найти такие $x, y, z \in S_p$, что $xyz - xyz^{1+n(p-1)} \notin I_k$. Пусть $x = a_0, y = s, z = s$. Тогда $xyz = a_2$, а $xyz^{1+n(p-1)} = a_{2+n(p-1)}$. Покажем, что если k не делит n , то $a_2 - a_{2+n(p-1)}$ не принадлежит идеалу I_k . Предположим противное. Тогда для некоторых коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \text{GF}(p)$ и неотрицательных целых показателей $i_1, \dots, i_m$ выполнено равенство

$$a_2 - a_{2+n(p-1)} = \alpha_1(a_0 - a_{k(p-1)})s^{i_1} + \alpha_2(a_0 - a_{k(p-1)})s^{i_2} + \dots + \alpha_m(a_0 - a_{k(p-1)})s^{i_m}. \quad (3)$$

Представим правую часть (3) в виде

$$\alpha_1(a_{i_1} - a_{i_1+k(p-1)}) + \alpha_2(a_{i_2} - a_{i_2+k(p-1)}) + \dots + \alpha_m(a_{i_m} - a_{i_m+k(p-1)})$$

и подсчитаем для этого выражения сумму всех коэффициентов при таких базисных элементах a_l , что индекс l дает остаток 2 при делении на $k(p-1)$. Ясно, что эта сумма равна 0, но для левой части (3) при условии, что k не делит n , соответствующая сумма равна 1. Таким образом, равенство (3) невозможно.

Из лемм 2 и 3 немедленно вытекает, что все многообразия вида $\text{var } T_q$, где q – простое число, попарно несравнимы. Таким образом, мы получаем

СЛЕДСТВИЕ. *Решетка $L(\text{var } S_p)$ имеет бесконечную ширину.*

Как уже обсуждалось, вместе с леммой 1 это дает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Многообразие разрешимых колец Ли конечной ширины локально конечно.*

Многообразие называется *крессовым*, если оно локально конечно, конечно базируемо и содержит лишь конечное число подмногообразий. (Такое определение крессовости равносильно стандартному, см., например, [6, § 1].) В силу основного результата работы Бахтурина и Ольшанского [7] (см. также главу 7 монографии [8]) многообразие колец Ли будет крессовым тогда и только тогда, когда оно порождается некоторым конечным кольцом.

Почти крессовым называется некрессово многообразие, все собственные подмногообразия которого крессовы. Легко понять, что каждое некрессово многообразие содержит некоторое почти крессово подмногообразие. Разрешимые почти крессовы многообразия колец Ли описаны Ю. А. Бахтуриным и А. Ю. Ольшанским в [9] (см. также [8, § 7.8]) – это многообразие $\mathcal{A}_0$ всех абелевых колец Ли и упоминавшаяся во введении серия многообразий $\mathcal{M}_p$ (p – простое число), задаваемых тождествами (1).

Приступим непосредственно к доказательству необходимости. Пусть $\mathcal{V}$ – произвольное многообразие разрешимых колец Ли конечной ширины. Если $\mathcal{V}$ кроссово, доказывать нечего. Поэтому считаем, что $\mathcal{V}$ некрассово, а тогда $\mathcal{V}$ должно содержать некоторое почти кроссово многообразие. Поскольку, как уже отмечалось, $\mathcal{A}_0$ не является многообразием конечной ширины, $\mathcal{V}$ содержит многообразие $\mathcal{M}_p$ для некоторого простого p . Если $\mathcal{V} = \mathcal{M}_p$, то снова доказывать нечего. Если же $\mathcal{V} \supset \mathcal{M}_p$, то поскольку $\mathcal{V}$ – локально конечное многообразие, а каждое локально конечное многообразие порождается своими конечными кольцами, найдется конечное кольцо $K_1 \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{M}_p$. Положим $\mathcal{K}_1 = \text{var } K_1$ и $\mathcal{V}_1 = \mathcal{M}_p \vee \mathcal{K}_1$. Если $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1$, то все доказано. В противном случае найдется конечное кольцо $K_2 \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_1$, и можно рассмотреть многообразие $\mathcal{K}_2 = \text{var}(K_1 \times K_2)$ и многообразие $\mathcal{V}_2 = \mathcal{M}_p \vee \mathcal{K}_2$. Продолжая описанный процесс, мы либо остановимся на некотором шаге, получив, что $\mathcal{V} = \mathcal{M}_p \vee \mathcal{K}_n$ для некоторого многообразия $\mathcal{K}_n$, порожденного конечным кольцом, и тем самым докажем необходимость условия теоремы, либо построим бесконечную строго возрастающую последовательность

$$\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \subset \dots \subset \mathcal{K}_n \subset \dots$$

крассовых подмногообразий многообразия $\mathcal{V}$. Докажем, что вторая возможность на самом деле не реализуется.

Отметим, что по построению ни одно из многообразий $\mathcal{K}_n$ не содержится в $\mathcal{M}_p$ и

$$\mathcal{M}_p \vee \mathcal{K}_n \subset \mathcal{M}_p \vee \mathcal{K}_m$$

при $n < m$. Для каждого натурального s обозначим через $\mathcal{M}_p^c$ подмногообразие многообразия $\mathcal{M}_p$, заданное внутри $\mathcal{M}_p$ тождеством

$$x_1 \cdots x_c = 0. \quad (4)$$

Для натурального s , кратного p , обозначим через $\mathcal{N}_p^c$ подмногообразие многообразия $\mathcal{M}_p$, заданное внутри $\mathcal{M}_p$ тождеством

$$\sum_{i=2}^c x_1 x_i x_2 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_c = 0. \quad (5)$$

В. А. Артамоновым [1, теорема 3] показано, что решетка $L(\mathcal{M}_p)$ является цепью типа $\omega + 1$ и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_p^1 \subset \mathcal{M}_p^2 \subset \dots \subset \mathcal{M}_p^p \subseteq \mathcal{N}_p^p \subset \mathcal{M}_p^{p+1} \subset \mathcal{M}_p^{p+2} \subset \dots \\ \subset \mathcal{M}_p^{2p} \subset \mathcal{N}_p^{2p} \subset \mathcal{M}_p^{2p+1} \subset \mathcal{M}_p^{2p+2} \subset \dots \subset \mathcal{M}_p, \end{aligned}$$

где нестрогое включение $\mathcal{M}_p^p \subseteq \mathcal{N}_p^p$ обращается в равенство только при $p = 2$. Пусть w – ширина решетки $L(\mathcal{V})$. Зафиксируем $k > w$ и подберем индекс s так, чтобы многообразия $\mathcal{M}_p^{c+1}$ и $\mathcal{K}_k$ были несравнимы. Это возможно, поскольку многообразие $\mathcal{K}_k$ не содержится в $\mathcal{M}_p^c$ ни для какого s , а если бы для всех s многообразия $\mathcal{M}_p^c$ содержались бы в $\mathcal{K}_k$, то решетка $L(\mathcal{K}_k)$ была бы бесконечной в противоречие с кроссовостью $\mathcal{K}_k$. Ясно, что если $\mathcal{K}_k$ несравнимо с $\mathcal{M}_p^{c+1}$, то для всех $i, j = 1, \dots, k$ многообразия $\mathcal{K}_j$

Рис. 1

и M_p^{c+i} несравнимы. Положим $t = c + k + 1$ и для каждого $i = 1, \dots, k$ рассмотрим объединение $\mathcal{B}_i = M_p^{m-i} \vee \mathcal{K}_i$. Наши построения иллюстрирует рис. 1.

Так как ширина решетки $L(\mathcal{V})$ меньше k , найдутся такие индексы i и j , что $i < j$, но многообразия $\mathcal{B}_i$ и $\mathcal{B}_j$ сравнимы. Предположим сначала, что $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{B}_j$. Тогда в силу модулярности решетки многообразий и включения $M_p^{m-i} \supset M_p^{m-j}$ получаем

$$M_p^{m-i} = M_p^{m-i} \cap \mathcal{B}_i \subseteq M_p^{m-i} \cap \mathcal{B}_j = M_p^{m-i} \cap (M_p^{m-j} \vee \mathcal{K}_j) = M_p^{m-j} \vee (M_p^{m-i} \cap \mathcal{K}_j). \quad (6)$$

Поскольку $L(M_p)$ — цепь и $M_p^{m-i} \supset M_p^{m-j}$, из (6) следует, что $M_p^{m-i} = M_p^{m-i} \cap \mathcal{K}_j$. Это противоречит несравнимости многообразий M_p^{m-i} и $\mathcal{K}_j$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathcal{B}_j \subseteq \mathcal{B}_i$. В силу модулярности и включения $\mathcal{K}_i \subset \mathcal{K}_j$ имеем

$$\mathcal{K}_j = \mathcal{K}_j \cap \mathcal{B}_j \subseteq \mathcal{K}_j \cap \mathcal{B}_i = \mathcal{K}_j \cap (M_p^{m-i} \vee \mathcal{K}_i) = \mathcal{K}_i \vee (M_p^{m-i} \cap \mathcal{K}_j). \quad (7)$$

Из (7) вытекает, что $\mathcal{K}_j \subseteq \mathcal{K}_i \vee M_p$, а следовательно, и $\mathcal{K}_j \vee M_p \subseteq \mathcal{K}_i \vee M_p$. Это снова приводит к противоречию, ибо по построению последовательности $\{\mathcal{K}_n\}$ для всех $i < j$ выполняется строгое включение $M_p \vee \mathcal{K}_i \subset M_p \vee \mathcal{K}_j$.

Итак, описанный выше процесс должен оборваться, и необходимость условия теоремы доказана.

2. Выше уже отмечалось, что многообразие, порожденное конечным кольцом Ли, крессово, в частности, содержит лишь конечное число подмногообразий и потому является многообразием конечной ширины. Остается проверить, что многообразием конечной ширины будет и объединение произвольного многообразия $\mathcal{K}$, порожденного конечным кольцом Ли, с любым многообразием вида M_p .

Итак, пусть $\mathcal{V} = \mathcal{K} \vee M_p$. Поскольку оба многообразия $\mathcal{K}$ и M_p локально конечны, локально конечным, очевидно, будет и их объединение $\mathcal{V}$. Нам потребуется одно полезное свойство энгелевых колец локально конечных разрешимых многообразий, подмеченное в [5] (см. там предложения 1 и 3). Напомним, что элемент e решетки L называется *нейтральным*, если для любых $a, b \in L$ подрешетка, порожденная a, b и e , дистрибутивна.

ЛЕММА 4. В любом локально конечном многообразии $\mathcal{U}$ разрешимых колец Ли совокупность всех энгелевых колец образует подмногообразие, являющееся нейтральным элементом решетки $L(\mathcal{U})$.

Пусть $\mathcal{E}$ – многообразие, состоящее из всех энгелевых колец нашего многообразия $\mathcal{V}$. Следующая лемма сводит стоящую перед нами задачу к доказательству конечности ширины многообразия $\mathcal{E}$.

ЛЕММА 5. Если $\mathcal{E}$ – многообразие конечной ширины, то таково и многообразие $\mathcal{V}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, заметим, что многообразие $\mathcal{M}_p$ энгелево (это видно из тождества $xyz^p = 0$ в (1)). Поэтому $\mathcal{M}_p \subseteq \mathcal{E}$. Отсюда следует, что $\mathcal{V} = \mathcal{E} \vee \mathcal{H}$.

Если $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ – подмногообразия в $\mathcal{V}$ такие, что $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, будем обозначать через $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ интервал решетки $L(\mathcal{V})$ с концами $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. По известному свойству модулярных решеток интервалы $[\mathcal{E}, \mathcal{V}] = [\mathcal{E}, \mathcal{E} \vee \mathcal{H}]$ и $[\mathcal{E} \cap \mathcal{H}, \mathcal{H}]$ изоморфны. Так как решетка $L(\mathcal{H})$ конечна, отсюда, в частности, вытекает, что интервал $[\mathcal{E}, \mathcal{V}]$ конечен. Пусть m – число элементов в этом интервале, а w – ширина решетки $L(\mathcal{E})$. Покажем, что ширина решетки $L(\mathcal{V})$ не превосходит mw .

В самом деле, пусть $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_{mw+1}$ – произвольные подмногообразия в $\mathcal{V}$. Среди объединений $\mathcal{X}_1 \vee \mathcal{E}, \dots, \mathcal{X}_{mw+1} \vee \mathcal{E}$ не более m различных; поэтому, перенумеровав многообразия, можно считать, что $\mathcal{X}_1 \vee \mathcal{E} = \mathcal{X}_2 \vee \mathcal{E} = \dots = \mathcal{X}_{w+1} \vee \mathcal{E}$. Далее, среди пересечений $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{E}, \dots, \mathcal{X}_{w+1} \cap \mathcal{E}$ не более w несравнимых; поэтому $\mathcal{X}_i \cap \mathcal{E} \subseteq \mathcal{X}_j \cap \mathcal{E}$ для некоторых различных $i, j \in \{1, \dots, w+1\}$. В силу леммы 4 многообразия $\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j$ и $\mathcal{E}$ порождают дистрибутивную подрешетку решетки $L(\mathcal{V})$. Вычисляя в этой подрешетке, получаем

$$\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_i \cap (\mathcal{X}_i \vee \mathcal{E}) = \mathcal{X}_i \cap (\mathcal{X}_j \vee \mathcal{E}) = (\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j) \vee (\mathcal{X}_i \cap \mathcal{E}) \subseteq (\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j) \vee (\mathcal{X}_j \cap \mathcal{E}) \subseteq \mathcal{X}_j.$$

Таким образом, среди произвольных $mw + 1$ элементов решетки $L(\mathcal{V})$ нашлась пара сравнимых, что и означает, что ширина $L(\mathcal{V})$ не превосходит mw .

В соответствии с доказанной редукцией займемся теперь оценкой ширины решетки $L(\mathcal{E})$. Заметим прежде всего, что

$$\mathcal{E} = \mathcal{E} \cap \mathcal{V} = \mathcal{E} \cap (\mathcal{H} \vee \mathcal{M}_p) = (\mathcal{E} \cap \mathcal{H}) \vee \mathcal{M}_p \quad (8)$$

(мы воспользовались здесь включением $\mathcal{M}_p \subseteq \mathcal{E}$ и модулярностью решетки многообразий). Подмногообразие крossoво многообразия само крossoво, поэтому пересечение $\mathcal{E} \cap \mathcal{H}$ также порождается конечным кольцом, причем это кольцо должно быть энгелевым. Конечное энгелево кольцо нильпотентно, стало быть, $\mathcal{E} \cap \mathcal{H}$ – нильпотентное многообразие. Обозначим через c его индекс нильпотентности, т.е. наименьшее число s тем свойством, что в $\mathcal{E} \cap \mathcal{H}$ выполнено тождество $x_1 \cdots x_c = 0$, а через $\mathcal{E}_c$ – многообразие всех нильпотентных индекса $\leq c$ колец из $\mathcal{E}$. Тогда $\mathcal{E} \cap \mathcal{H} \subseteq \mathcal{E}_c$ и в силу (8) мы имеем $\mathcal{E} = \mathcal{E}_c \vee \mathcal{M}_p$. Отметим еще, что $\mathcal{E}_c$ – крossoво многообразие (как локально конечное нильпотентное многообразие).

Нам потребуется еще одно свойство многообразия $\mathcal{M}_p$, легко извлекаемое из результатов работы [1] (см. там доказательство теоремы 3).

ЛЕММА 6. *Произвольное полилинейное тождество $f(x_1, \dots, x_d) = 0$, не выполняющееся в $\mathcal{M}_p$, влечет внутри $\mathcal{M}_p$ тождество $x_1 \cdots x_{d+1} = 0$.*

ЛЕММА 7. *Пусть $\mathcal{X}$ – произвольное подмногообразие в $\mathcal{E}$, не содержащееся в $\mathcal{E}_c$. Если пересечение $\mathcal{X} \cap \mathcal{M}_p$ удовлетворяет некоторому полилинейному тождеству $f(x_1, \dots, x_d) = 0$, не выполняющемуся в $\mathcal{M}_p$, то этому тождеству удовлетворяет и все многообразие $\mathcal{X}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях леммы многообразие $\mathcal{X}$ должно удовлетворять некоторому тождеству вида

$$f(x_1, \dots, x_d) = g(x_1, \dots, x_d), \quad (9)$$

где $g(x_1, \dots, x_d) = 0$ – тождество многообразия $\mathcal{M}_p$. Можно считать, что многочлен $g(x_1, \dots, x_d)$ в (9) действительно зависит от всех фигурирующих в его записи переменных, а тогда его нижняя степень больше либо равна d . Допустим, что $d \geq c$. Так как $\mathcal{E} = \mathcal{E}_c \vee \mathcal{M}_p$, все тождества многообразия $\mathcal{M}_p$ с нижней степенью, большей либо равной c , выполняются и в многообразии $\mathcal{E}$, а следовательно, и в $\mathcal{X}$. Поэтому $g(x_1, \dots, x_d) = 0$ в $\mathcal{X}$, и в силу (9) $f(x_1, \dots, x_d) = 0$ в $\mathcal{X}$. Теперь допустим, что, напротив, $d < c$. Тогда в силу леммы 6 тождество $f(x_1, \dots, x_d) = 0$ влечет внутри $\mathcal{M}_p$ тождество $x_1 \cdots x_c = 0$. Отсюда пересечение $\mathcal{X} \cap \mathcal{M}_p$ удовлетворяет тождеству $x_1 \cdots x_c = 0$, и по уже доказанному тождество $x_1 \cdots x_c = 0$ будет выполнено во всем многообразии $\mathcal{X}$. Но тогда $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{E}_c$, что невозможно.

Теперь мы готовы к доказательству решающей леммы.

ЛЕММА 8. *Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ – произвольные подмногообразия в $\mathcal{E}$, не содержащиеся в $\mathcal{E}_c$. Тогда*

$$\mathcal{M}_p \cap (\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}) = (\mathcal{M}_p \cap \mathcal{X}) \vee (\mathcal{M}_p \cap \mathcal{Y}). \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что равенство (10) нарушается для каких-то многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Тогда его левая часть строго содержит правую. Из описания решетки $L(\mathcal{M}_p)$ (см. доказательство необходимости выше) вытекает, что найдется полилинейное тождество $f(x_1, \dots, x_d) = 0$ (в действительности, тождество одного из видов (4) или (5)), выполненное в $(\mathcal{M}_p \cap \mathcal{X}) \vee (\mathcal{M}_p \cap \mathcal{Y})$ и ложное в $\mathcal{M}_p \cap (\mathcal{X} \vee \mathcal{Y})$. Однако, применяя лемму 7, мы можем заключить, что тождество $f(x_1, \dots, x_d) = 0$ выполняется в каждом из многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, а стало быть, и в их объединении $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$. Отсюда $f(x_1, \dots, x_d) = 0$ заведомо выполняется в $\mathcal{M}_p \cap (\mathcal{X} \vee \mathcal{Y})$ – противоречие.

Завершим доказательство достаточности, для чего в силу леммы 5 остается проверить, что $\mathcal{E}$ – многообразие конечной ширины. Напомним, что многообразие $\mathcal{E}_c$ всех нильпотентных индекса $\leq c$ колец из $\mathcal{E}$ кроссово, в частности, содержит лишь конечное число подмногообразий. Обозначим это число через t и покажем, что ширина решетки $L(\mathcal{E})$ не превосходит $2t$. Пусть $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_{2m+1}$ – произвольные подмногообразия в $\mathcal{E}$. Из них не более t содержатся в $\mathcal{E}_c$. Следовательно, мы можем считать, что многообразия $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_{m+1}$ удовлетворяютсылке леммы 8. Далее, интервалы $[\mathcal{M}_p, \mathcal{E}] = [\mathcal{M}_p, \mathcal{E}_c \vee \mathcal{M}_p]$ и $[\mathcal{M}_p \cap \mathcal{E}_c, \mathcal{E}_c]$ изоморфны, поэтому между $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{E}$ заключено не более t многообразий. Следовательно, среди объединений $\mathcal{X}_1 \vee \mathcal{M}_p, \dots, \mathcal{X}_{m+1} \vee \mathcal{M}_p$ не более t различных, и найдутся такие различные индексы i и j , что

$$\mathcal{X}_i \vee \mathcal{M}_p = \mathcal{X}_j \vee \mathcal{M}_p.$$

Поскольку решетка $L(\mathcal{M}_p)$ – цепь, можно считать, что

$$\mathcal{X}_i \cap \mathcal{M}_p \subseteq \mathcal{X}_j \cap \mathcal{M}_p.$$

Известно [10, теорема II.12], что если три элемента произвольной модулярной решетки L связаны каким-либо соотношением дистрибутивности, то они порождают дистрибутивную подрешетку в L . В силу этого факта и леммы 8 многообразия $\mathcal{X}_i$, $\mathcal{X}_j$ и $\mathcal{M}_p$ порождают дистрибутивную подрешетку в $L(\mathcal{E})$. Вычисляя в этой подрешетке, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_i &= \mathcal{X}_i \cap (\mathcal{X}_i \vee \mathcal{M}_p) = \mathcal{X}_i \cap (\mathcal{X}_j \vee \mathcal{M}_p) = (\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j) \vee (\mathcal{X}_i \cap \mathcal{M}_p) \\ &\subseteq (\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j) \vee (\mathcal{X}_j \cap \mathcal{M}_p) \subseteq \mathcal{X}_j. \end{aligned}$$

Итак, $\mathcal{X}_i \subseteq \mathcal{X}_j$, т.е. среди произвольных $2m + 1$ элементов решетки $L(\mathcal{E})$ нашлось два сравнимых. Достаточность условия теоремы доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Артамонов В. А. Цепные многообразия линейных алгебр // Тр. ММО. 1973. Т. 29. С. 51–78.
- [2] Артамонов В. А. Решетки многообразий линейных алгебр // УМН. 1978. Т. 33. № 2. С. 135–167.
- [3] Ананичев Д. С. Почти дистрибутивные многообразия колец Ли // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 4. С. 3–20.
- [4] Dilworth R. P. A decomposition theorem for partially ordered sets // Ann. of Math. 1950. V. 51. № 1. P. 161–166.
- [5] Волков М. В., Гейн А. Г. Тожества почти нильпотентных колец Ли // Матем. сб. 1982. Т. 118. № 1. С. 132–142.
- [6] Львов И. В. О многообразиях ассоциативных колец. I // Алгебра и логика. 1973. Т. 12. № 3. С. 269–297.
- [7] Бахтурин Ю. А., Ольшанский А. Ю. Тожественные соотношения в конечных кольцах Ли // Матем. сб. 1975. Т. 96. № 4. С. 543–559.
- [8] Бахтурин Ю. А. Тожества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.
- [9] Бахтурин Ю. А., Ольшанский А. Ю. Разрешимые почти кроссовы многообразия колец Ли // Матем. сб. 1976. Т. 100. № 3. С. 384–399.
- [10] Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984.

Уральский государственный университет, г. Екатеринбург
E-mail: Dmitry.Ananichev@usu.ru, Mikhail.Volkov@usu.ru

Поступило
18.11.96