Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. С. Теляковский, Обобщение теоремы Менъшова о функциях, удовлетворяющих условию K'' , *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 4, 578–591

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm133>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 10:35:48

УДК 517.5

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ МЕНЬШОВА О ФУНКЦИЯХ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ K''

Д. С. Теляковский

Рассматриваются функции $f(z)$, $z \in D \subset \mathbb{C}$, которые задают отображения $w = f(z)$, имеющие в точках ζ области D одинаковые растяжения вдоль трех попарно неколлинеарных лучей, исходящих из ζ . При наложении дополнительного условия на расположение лучей обобщение Трохимчука теоремы Меньшова о голоморфности таких функций распространяется на функции, у которых предположение о непрерывности функции заменено предположением о суммируемости $(\log^+ |f(z)|)^p$ относительно плоской меры Лебега при каждом положительном $p < 2$.

Библиография: 9 названий.

Рассматриваются функции $f(z)$, $z \in D \subset \mathbb{C}$, одного комплексного переменного, для которых в точках ζ области D отображение $w = f(z)$ имеет одинаковые растяжения вдоль тройки лучей, исходящих из ζ .

Сначала введем некоторые обозначения и договоренности.

Для точки ζ через $T(\zeta)$ будем обозначать тройку лучей $\{t_1(\zeta), t_2(\zeta), t_3(\zeta)\}$, исходящих из ζ . Направления лучей в тройке ζ зависят, вообще говоря, от точки ζ . Будем считать, что лучи в тройке $T(\zeta)$ занумерованы против часовой стрелки. Когда будет говориться об угле, образованном лучами $t_j(\zeta)$ и $t_{j+1}(\zeta)$ (при $j = 3$ номер $j + 1$ будем считать равным 1), будет рассматриваться угол, заметаемый лучом, исходящим из точки ζ , при повороте против часовой стрелки от луча $t_j(\zeta)$ до луча $t_{j+1}(\zeta)$, величина этого угла будет обозначаться $\widehat{t_j, t_{j+1}}$. Если $\varphi(t)$ – угол между положительным направлением оси Ox и лучом t (поворот против часовой стрелки от Ox до t), то под *сходимостью направлений* последовательности лучей $\{t_j\}$ будет пониматься сходимость числовой последовательности $\{e^{i\varphi(t_j)}\}$.

Замкнутый круг с центром в точке ζ радиуса r будем обозначать через $D(\zeta, r)$, а его границу – через $C(\zeta, r)$. Если $B(\zeta)$ – некоторое множество, зависящее от точки ζ , то пересечение $B(\zeta) \cap D(\zeta, r)$ будем обозначать через $B(\zeta, r)$. Будем говорить, действительная функция $\varphi(z)$, определенная внутри области D , *не превосходит числа C в точке $\zeta \in \partial D$* , если $\limsup \varphi(z) \leq C$ при $z \rightarrow \zeta$, $z \in D$.

Меньшов [1] дал следующее

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00913, и программы Президента РФ по поддержке ведущих научных школ, грант № НШ-1892.2003.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $f(z)$, определенная в окрестности точки ζ , удовлетворяет в точке ζ условию K'' , если для некоторой тройки попарно неколлинеарных лучей $T(\zeta) = \{t_1(\zeta), t_2(\zeta), t_3(\zeta)\}$, исходящих из точки ζ , существует конечный предел

$$\lim \left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \right| \quad \text{при } z \rightarrow \zeta, \quad z \in \bigcup_{j=1}^3 t_j(\zeta).$$

Условие K'' означает, что в точке ζ при отображении $w = f(z)$ растяжения в точке вдоль лучей из тройки $T(\zeta)$ одинаковы. Меньшов [1] доказал следующую теорему о голоморфности функций, удовлетворяющих условию K'' .

ТЕОРЕМА А. Пусть функция $f(z)$ непрерывна и однолистка в области $D \subset \mathbb{C}$. Если в каждой точке области D , за исключением, быть может, точек не более чем счетного множества, функция $f(z)$ удовлетворяет условию K'' , то либо функция $f(z)$, либо функция $\overline{f(z)}$ является голоморфной в области D .

Из примера Бора [2]

$$B(z) = \begin{cases} z & \text{при } \operatorname{Im} z > 0; \\ \bar{z} & \text{при } \operatorname{Im} z \leq 0, \end{cases}$$

видно, что условие однолистности здесь существенно. Но Трохимчук [3] показал, что его можно существенно ослабить.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [3, с. 107]. Точка $z_0 \in D$ называется U -точкой отображения $w = f(z)$, если найдутся такие две последовательности точек $\{z'_j\}$ и $\{z''_j\}$, что

- а) $z'_j \rightarrow z_0, z''_j \rightarrow z_0$ при $j \rightarrow \infty$;
- б) последовательности $\{z'_j\}$ и $\{z''_j\}$ имеют полукасательные t' и t'' , лежащие на неколлинеарных лучах;
- в) никакая из точек $w'_j := f(z'_j)$ и $w''_j := f(z''_j)$ не совпадает с точкой $w_0 := f(z_0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [3, с. 107]. Отображение $w = f(z)$ называется прямым в своей U -точке z_0 , если для некоторых последовательностей $\{z'_j\}$ и $\{z''_j\}$, удовлетворяющих условиям а)–в) из определения U -точки, соответствующие последовательности $\{w'_j = f(z'_j)\}$ и $\{w''_j = f(z''_j)\}$ имеют полукасательные T' и T'' , причем если лучи t' и t'' обозначены так, что $0 < \widehat{t', t''} < \pi$, то и $0 \leq \widehat{T', T''} < \pi$.

ТЕОРЕМА В [3, с. 116]. Пусть функция $f(z)$ непрерывна в области D , в каждой точке из D , за возможным исключением точек из не более чем счетного множества, удовлетворяет условию K'' и почти в каждой своей U -точке (если они существуют) отображение $w = f(z)$ является прямым. Тогда функция $f(z)$ голоморфна в D .

Из примера ступенчатой функции видно, что, не накладывая никаких дополнительных условий, предположение о непрерывности функции нельзя заменить, например, предположением о ее ограниченности. Для ослабления условия непрерывности наложим дополнительные ограничения на расположение лучей в тройках $T(\zeta)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что тройка лучей $T(\zeta)$ *растопырена*, если для каждого $j = 1, 2, 3$ угол, образованный лучами $t_j(\zeta)$ и $t_{j+1}(\zeta)$ меньше π .

Легко видеть, что тройка лучей $T(\zeta)$ будет растопыренной тогда и только тогда, когда каждый из лучей тройки лежит *внутри* (за исключением своей вершины) угла, вертикального к меньшему из углов, образованному остальными двумя лучами тройки, или тогда и только тогда, когда *внутри* каждой полуплоскости, содержащей точку ζ на своей границе, лежит по крайней мере один из лучей тройки $T(\zeta)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $f(z)$, определенная в окрестности точки ζ , удовлетворяет в точке ζ *условию M''* , если она удовлетворяет условию K'' для растопыренной тройки лучей.

Функции, удовлетворяющие условию M'' , рассматривались Бродович, но она обобщение условия Меньшова K'' называла условием K^* , а аналогичное обобщение условия K' (условия сохранения углов (по величине и направлению) между тремя лучами при отображении $w = f(z)$) – K^{**} . Трохимчук условие сохранения углов между лучами из растопыренной тройки при отображении $w = f(z)$ называл условием K'_0 , а при отображении $w = \overline{f(z)}$ – условием $\overline{K}'_0$.

Бродович доказала следующую теорему [4].

ТЕОРЕМА С. Пусть функция $f(z)$ однолистка в D и в каждой точке из D удовлетворяет условию M'' . Тогда либо функция $f(z)$, либо функция $\overline{f(z)}$, голоморфна в D .

В настоящей работе доказана следующая теорема, анонсированная в [5].

ТЕОРЕМА. Пусть функция $f(z)$ в каждой точке области D за исключением, быть может, точек не более чем счетного множества $e \subset D$ удовлетворяет условию M'' , причем для каждой точки $\zeta \in e$ найдется растопыренная тройка лучей $T(\zeta)$, на которой функция $f(z)$ вблизи ζ ограничена, отображение $w = f(z)$ почти в каждой своей U -точке является прямым и функция $(\log^+ |f(z)|)^p$ локально суммируема в D для всех положительных $p < 2$. Тогда, если это необходимо, можно так переопределить $f(z)$ на множестве e , что функция $f(z)$ станет голоморфной в D .

Если не накладывать никаких ограничений на величины углов между лучами в тройках $T(\zeta)$, $\zeta \in D$, то условие суммируемости $(\log^+ |f(z)|)^p$ при всех $p < 2$ нельзя заменить условием суммируемости $(\log^+ |f(z)|)^p$ только при некотором положительном $p < 2$.

Если предположить, что для каждой точки ζ области D величины всех углов между лучами в тройке $T(\zeta)$ не превосходят $q\pi$, $2/3 \leq q < 1$, то можно положить $p := 2q$. Причем условие суммируемости $\log^+ |f(z)|$ в степени $2q$ нельзя заменить условием суммируемости этой функции ни в какой меньшей степени. Доказательство теоремы при этом не изменится.

Величина максимального угла между лучами в любой тройке не может быть меньше $2\pi/3$. Поэтому минимальное возможное значение степени суммируемости p равно $4/3$. Его можно взять в том случае, когда для каждой точки $\zeta \in D$ величины углов между лучами из тройки $T(\zeta)$ равны между собой и равны $2\pi/3$.

Проверим, что степень p нельзя уменьшить. В этом можно убедиться при помощи функций Миттаг-Леффлера

$$E_q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1 + qn)},$$

где $0 < q$, а Γ – гамма-функция.

При $q < 2$ функция $E_q(z)$ удовлетворяет следующим условиям (следуют из соотношений (2.23) и (2.24), приведенных в [6, лемма 3.4, с. 134] при $\mu = 1$, $q = 1/\rho$):

- (1) для каждого γ , удовлетворяющего условию $q\pi/2 < \gamma < \min\{\pi, \pi q\}$ при $z \rightarrow \infty$, $|\arg z| \leq \gamma$, выполнена оценка

$$E_q(z) = \frac{1}{q} e^{z^{1/q}} + O\left(\frac{1}{z}\right);$$

- (2) в области $|\arg z| \geq q\pi/2$ функция $E_q(z)$ ограничена.

Положим $f_q(z) := z^2 E_q(1/z)$ при $z \neq 0$, $f_q(0) = 0$. Ясно, что $z = 0$ – неустраняемая особая точка функции $f_q(z)$. В то же время функция $f_q(z)$ в точке $z = 0$ имеет производную, равную нулю, относительно любого луча, исходящего из начала координат, который образует угол с положительным направлением оси Ox , по абсолютной величине больший либо равный $q\pi/2$. Поэтому в точке $z = 0$ функция $f_q(z)$ удовлетворяет условию M'' относительно растопыренной тройки лучей T , состоящей, например, из лучей $t_1 := re^{iq\pi/2}$, $t_2 := re^{i\pi}$, $t_3 := re^{-iq\pi/2}$, $0 \leq r < \infty$. В этой тройке угол между лучами t_1 и t_3 равен $q\pi$.

При $z \rightarrow \infty$, $z \neq 0$, выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \log^+ |f_q(z)| &= \log^+ \left| z^2 E_q\left(\frac{1}{z}\right) \right| = \begin{cases} \log^+ \left| \frac{1}{q} e^{(1/z)^{1/q}} + O\left(\frac{1}{z}\right) \right| & \text{при } |\arg z| \leq \frac{\pi q}{2}, \\ O(1) & \text{при } |\arg z| \geq \frac{\pi q}{2} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \operatorname{Re} \frac{1}{z^{1/q}} + O(1) & \text{при } |\arg z| \leq \frac{\pi q}{2}, \\ O(1) & \text{при } |\arg z| \geq \frac{\pi q}{2} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{|z|^{1/q}} \cos \frac{\arg z}{q} + O(1) & \text{при } |\arg z| \leq \frac{\pi q}{2}, \\ O(1) & \text{при } |\arg z| \geq \frac{\pi q}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда видно, что функция $(\log^+ |f_q(z)|)^p$ локально суммируема при каждом положительном $p < 2q$ и не суммируема при $p \geq 2q$.

Покажем, что рассуждая, как при доказательстве нашей теоремы, можно получить теорему С Бродович. Пусть функция $f(z)$ однолистка в области D и в каждой точке из D удовлетворяет условию M'' . Тогда по леммам 1 и 2 и замечанию к лемме 2 существует всюду плотное в D открытое множество, на каждой компоненте которого функция $f(z)$ непрерывна. Тогда по теореме А Меньшова на каждой компоненте этого множества голоморфна либо $f(z)$, либо $\overline{f(z)}$. Пусть ζ – точка в окрестности $U(\zeta)$, в которой голоморфна либо $f(z)$, либо $\overline{f(z)}$. Так как однолистная функция $f(z)$ непрерывна в точке ζ , то $\min |f(z) - f(\zeta)| > 0$ при $z \in D \setminus U(\zeta)$. Поэтому функция $1/(f(z) - f(\zeta))$ ограничена

на $D \setminus U(\zeta)$. Ясно, что функция $1/(f(z) - f(\zeta))$ в каждой точке $D \setminus \zeta$ удовлетворяет условию M'' . Далее вместо функции $f(z)$ будем рассматривать функцию $1/(f(z) - f(\zeta))$ (такое соображение использовалось в одной из работ Бродович). Непрерывность функции $f(z)$ в D доказывается так же, как в настоящей работе. Тогда по теореме Меньшова либо $f(z)$, либо $\overline{f(z)}$ голоморфна в D .

Для доказательства теоремы нам потребуется несколько лемм. Аналогичные леммы использовались Меньшовым и Трохомчуком.

ЛЕММА 1. Пусть функция $f(z)$ определена в области $D \subset \mathbb{C}$. Пусть для точек $\zeta_1, \zeta_2 \in D$, определены растопыренные тройки лучей

$$S(\zeta_k) = \{s_1(\zeta_k), s_2(\zeta_k), s_3(\zeta_k)\}, \quad k = 1, 2,$$

для которых

- (1) для некоторого положительного числа $\sigma < 1/2$ углы между лучами в тройках $S(\zeta_1)$ и $S(\zeta_2)$ не превосходят $(1 - 2\sigma)\pi$;
- (2) найдутся такие положительные числа $L > 0$ и $\delta > 0$, что для каждой точки $z \in S(\zeta_k)$, $|z - \zeta_k| \leq \delta$, $k = 1, 2$, выполнено неравенство

$$|f(z) - f(\zeta_k)| \leq L|z - \zeta_k|.$$

Тогда если $|\zeta_1 - \zeta_2| \leq (\delta/2) \sin \sigma\pi$, то

$$|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leq \frac{3L}{\sin \sigma\pi} |\zeta_1 - \zeta_2|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Delta(\zeta_1, \delta)$ – треугольник с вершинами в точках пересечения окружности $C(\zeta_1, \delta)$ с лучами тройки $S(\zeta_1)$. Лучи тройки $S(\zeta_1)$ разбивают треугольник $\Delta(\zeta_1, \delta)$ на три равнобедренных треугольника, длины равных сторон в которых равны δ , а величины углов при основании не меньше $\sigma\pi$. Поэтому в каждом из этих треугольников длина высоты, опущенной из их общей вершины ζ_1 на основание (являющееся стороной треугольника $\Delta(\zeta_1, \delta)$) не меньше $\delta \sin \sigma\pi$ и, значит, круг $D(\zeta_1, \delta \sin \sigma\pi)$ целиком лежит в $\Delta(\zeta_1, \delta)$. Так как $|\zeta_1 - \zeta_2| \leq (\delta/2) \sin \sigma\pi$, то точка ζ_2 лежит внутри $\Delta(\zeta_1, \delta)$. Обозначим через Δ_1 содержащий точку ζ_2 треугольник из тех, на которые лучи тройки $S(\zeta_1)$ разбивают треугольник $\Delta(\zeta_1, \delta)$. Проведем через точку ζ_2 прямую l , параллельную основанию треугольника Δ_1 . Обозначим через $\tilde{\Delta}_1$ равнобедренный треугольник, который прямая l отделяет от Δ_1 . В содержащей точку ζ_1 полуплоскости с границей l , лежит по крайней мере один из лучей тройки $S(\zeta_2)$. Пусть это луч $s_m(\zeta_2)$. Луч $s_m(\zeta_2)$ пересекается с одной из боковых сторон треугольника $\tilde{\Delta}_1$, точку пересечения обозначим через ν .

Пусть h – длина высоты треугольника $\tilde{\Delta}_1$, опущенная из вершины ζ_1 . По построению $\tilde{\Delta}_1$ выполнено неравенство $h \leq |\zeta_1 - \zeta_2|$. Так как углы при основании $\tilde{\Delta}_1$ не меньше $\sigma\pi$, то длины боковых сторон $\tilde{\Delta}_1$ не превосходят

$$\frac{h}{\sin \sigma\pi} \leq \frac{|\zeta_1 - \zeta_2|}{\sin \sigma\pi}.$$

Поэтому длина любого отрезка, лежащего в треугольнике $\tilde{\Delta}_1$ меньше $2|\zeta_1 - \zeta_2|/\sin \sigma\pi$. Поскольку $|\zeta_1 - \zeta_2| \leq (\delta/2)\sin \sigma\pi$, то длина любого отрезка, лежащего в $\tilde{\Delta}_1$, не превосходит δ , и поэтому $|\nu - \zeta_2| \leq \delta$.

Точка ν по построению лежит на боковой стороне треугольника $\tilde{\Delta}_1$, а боковые стороны $\tilde{\Delta}_1$ не длиннее $|\zeta_1 - \zeta_2|/\sin \sigma\pi < \delta$, поэтому

$$|\nu - \zeta_1| \leq \frac{|\zeta_1 - \zeta_2|}{\sin \sigma\pi} < \delta.$$

По условию (2) леммы из оценок для расстояний $|\nu - \zeta_1|$ и $|\nu - \zeta_2|$ получаем

$$\begin{aligned} |f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| &\leq |f(\zeta_1) - f(\nu)| + |f(\nu) - f(\zeta_2)| \\ &\leq L|\zeta_1 - \nu| + L|\nu - \zeta_2| \leq L \frac{|\zeta_1 - \zeta_2|}{\sin \sigma\pi} + L \frac{2|\zeta_1 - \zeta_2|}{\sin \sigma\pi} = \frac{3L}{\sin \sigma\pi} |\zeta_1 - \zeta_2|. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть множество $P \subset D$ совершенно относительно области D . Пусть функция $f(z)$ определена в области D и в каждой точке из P , за исключением, быть может, точек не более чем счетного множества $e \subset P$, функция $f(z)$ удовлетворяет условию M'' , а на множестве $D \setminus P$ непрерывна. Тогда существуют такие положительные числа σ , L и δ и такая порция Π множества P , что после возможного переопределения функции $f(z)$ на $\Pi \cap e$ для каждой точки ζ порции Π можно найти растопыренную тройку лучей $S(\zeta) = \{s_1(\zeta), s_2(\zeta), s_3(\zeta)\}$, исходящих из ζ , для которой выполнены следующие условия:

- (1) для каждой точки $z \in S(\zeta)$, лежащей на расстоянии, не превосходящем δ от ζ , выполнено условие

$$|f(z) - f(\zeta)| \leq L|z - \zeta|;$$

- (2) углы между лучами в тройке $S(\zeta)$ не превосходят $(1 - 2\sigma)\pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что если в точке ζ функция $f(z)$ удовлетворяет условию M'' , то для тройки $T(\zeta)$ при некоторых σ , L и δ выполнены условия (1) и (2) леммы. Для натуральных k , m и n к множеству $P_{k,m,n}$ отнесем те точки ζ множества P , для которых условия (1) и (2) леммы выполнены для тройки лучей $T(\zeta)$ при $\sigma = 1/k$, $L = m$ и $\delta = 1/n$. Так как каждая точка множества P , в которой выполнено условие M'' , принадлежит некоторому множеству $P_{k,m,n}$, то $\bigcup_{k,m,n} P_{k,m,n} \supset P \setminus e$. Поскольку совершенное относительно области D множество P является множеством второй категории на самом себе, то по теореме Бэра о категориях (см., например, [7, с. 87]) найдется порция Π множества P , на которой будет всюду плотно некоторое множество $P_{k',m',n'}$. Не уменьшая общности, можно считать, что $k' > 4$. Положим $\sigma := 1/k'$, $L := m'$, $\delta := 1/(2n')$ и проверим, что для каждой точки $\zeta \in \Pi$ можно определить растопыренную тройку лучей $S(\zeta)$ для которой будут выполнены условия (1) и (2) леммы. Обозначим $\Pi' := P_{k',m',n'} \cap \Pi$.

Для точек $\zeta \in \Pi'$ положим $S(\zeta) := T(\zeta)$ (т.е. $s_j(\zeta) := t_j(\zeta)$, $j = 1, 2, 3$). Условия (1) и (2) леммы для такой тройки выполняются по определению множеств $P_{k,m,n}$, причем неравенство из условия (1) выполняется для всех точек тройки $S(\zeta)$, лежащих от ζ на расстоянии, не превосходящем 2δ .

Рассмотрим теперь множество $\Pi \setminus \Pi'$. По лемме 1 если точки ζ' и ζ'' из Π' лежат достаточно близко друг к другу ($|\zeta' - \zeta''| \leq (\delta/2) \sin \sigma\pi$), то выполняется неравенство

$$|f(\zeta') - f(\zeta'')| \leq \frac{3L}{\sin \sigma\pi} |\zeta' - \zeta''|.$$

Это значит, что функция $f(z)$ в достаточно близких точках удовлетворяет условию Липшица вдоль множества Π' . Поэтому, так как множество Π' всюду плотно на множестве Π , то по критерию Коши в каждой точке $\zeta \in \Pi$ существует предел $\lim_{z \rightarrow \zeta, z \in \Pi'} f(z)$.

Если в точке ζ функция $f(z)$ удовлетворяет условию M'' (это так для всех точек множества $\zeta \in \Pi \setminus e$), то для тройки $T(\zeta)$ при некоторых значениях коэффициентов σ , L , δ выполнены условия (1) и (2) леммы 1. Поэтому по этой лемме для некоторого положительного K если точка $\nu \in \Pi'$ лежит достаточно близко к ζ , то $|f(\zeta) - f(\nu)| \leq K|\zeta - \nu|$ и, следовательно, $f(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta, z \in \Pi'} f(z)$. Если же точка ζ принадлежит множеству e , то положим $f(\zeta) := \lim_{z \rightarrow \zeta, z \in \Pi'} f(z)$.

Теперь возьмем произвольную точку $\zeta \in \Pi \setminus \Pi'$ и определим для нее тройку лучей $S(\zeta)$, удовлетворяющую условию леммы. Пусть $\{\zeta_n\}$ – некоторая последовательность точек множества Π' , сходящаяся к ζ . Как отмечалось, $f(\zeta_n) \rightarrow f(\zeta)$ при $n \rightarrow \infty$. Найдутся лучи $s_j(\zeta)$, $j = 1, 2, 3$, направления которых являются предельными для направлений лучей последовательностей $\{s_j(\zeta_{n_k})\}$, $j = 1, 2, 3$, соответственно, для некоторой подпоследовательности $\{\zeta_{n_k}\}$ последовательности $\{\zeta_n\}$. Переходя если потребуется к подпоследовательности, будем считать, что направления лучей тройки $S(\zeta) := \{s_j(\zeta), j = 1, 2, 3\}$ являются предельными для направлений лучей троек последовательности $\{S(\zeta_n)\}$. Проверим, что для так определенных троек $S(\zeta)$ выполнены условия (1) и (2) леммы.

Выполнение условия (2) очевидно.

Проверим выполнение условия (1). Пусть точка $\nu \in S(\zeta)$, $|\nu - \zeta| \leq \delta$. Пусть $s_j(\zeta)$ – тот луч из тройки $S(\zeta)$, на котором лежит точка ν . Рассмотрим по отдельности случаи, когда функция $f(z)$ непрерывна и разрывна в точке ν .

Предположим сначала, что функция $f(z)$ непрерывна в точке ν . На каждом луче последовательности $\{s_j(\zeta_n)\}$ выберем по точке ν_n так, чтобы $\nu_n \rightarrow \nu$ при $n \rightarrow \infty$. Можно считать, что для каждого номера n выполняется неравенство $|\nu_n - \zeta_n| < 2\delta$. Условие (1) леммы для точек множества $\zeta_n \in \Pi'$ выполняется для точек тройки $S(\zeta_n)$, лежащих на расстоянии, не превосходящем 2δ , от ζ_n , поэтому

$$|f(\nu_n) - f(\zeta_n)| \leq L|\nu_n - \zeta_n|. \quad (1)$$

Так как $\nu_n \rightarrow \nu$ при $n \rightarrow \infty$ и функция $f(z)$ непрерывна в точке ν , то $f(\nu_n) \rightarrow f(\nu)$ при $n \rightarrow \infty$. Кроме того, $f(\zeta_n) \rightarrow f(\zeta)$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому, переходя в неравенстве (1) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем соотношение

$$|f(\nu) - f(\zeta)| \leq L|\nu - \zeta|.$$

Для точек тройки $S(\zeta)$, принадлежащих $D \setminus \Pi$ (в них функция $f(z)$ непрерывна) условие (1) леммы проверено.

Рассмотрим теперь случай, когда функция $f(z)$ разрывна в точке ν . Точка ν принадлежит множеству Π и является поэтому предельной точкой множества Π' . Пусть $\{\nu_m\}$ – некоторая последовательность точек множества Π' , сходящаяся к ν .

Покажем, что для любого $d > 0$ для всех достаточно больших номеров n и m найдется точка пересечения η лучей троек $S(\zeta_n)$ и $S(\nu_m)$, лежащая на расстоянии меньше d от точки ν .

Пусть τ – произвольная точка, а $S(\tau)$ – тройка исходящих из τ лучей, удовлетворяющих условию (2) леммы. Обозначим через $\Delta(\tau, \rho)$ треугольник с вершинами в точках пересечения $S(\tau) \cap C(\tau, \rho)$. Ясно, что расстояние от любой точки треугольника $\Delta(\tau, \rho)$ до точки τ не превосходит ρ . Как было показано при доказательстве леммы 1, круг $D(\tau, \rho \sin \sigma\pi)$ целиком лежит в треугольнике $\Delta(\tau, \rho)$. Поэтому каждая прямая, пересекающая круг $D(\tau, \rho \sin \sigma\pi)$ (это прямые, проходящие от точки τ на расстоянии, не превосходящем $\rho \sin \sigma\pi$), пересекает лучи тройки $S(\tau)$ по крайней мере в одной точке η , лежащей внутри треугольника $\Delta(\tau, \rho)$ и, значит, расстояние между точками η и τ меньше ρ .

Положим

$$\rho := \min \left\{ \delta, \frac{d}{2} \sin \sigma\pi \right\}.$$

Пусть n – номер, для которого расстояние от каждой точки множества $S(\zeta_n, 2\delta)$ до $S(\zeta)$ меньше $\rho/2$, а m – номер для которого $|\nu - \nu_m| < \rho/2$. Обозначим через $\Delta(\nu_m, \rho)$ треугольник с вершинами в точках пересечения окружности $C(\nu_m, \rho)$ с лучами тройки $S(\nu_m)$. Центр окружности $C(\nu_m, \rho)$ лежит на расстоянии меньше $\rho/2$ от луча $s_j(\zeta)$, поэтому с каждой стороны от луча $s_j(\zeta)$ (на котором лежит точка ν) есть точки круга $D(\nu_m, \rho)$, лежащие на расстоянии больше $\rho/2$ от $s_j(\zeta)$. Значит, луч $s_j(\zeta_n)$ пересекается с кругом $D(\nu_m, \rho)$. Так как $D(\nu_m, \rho) \subset \Delta(\nu_m, \rho/\sin \sigma\pi)$, то луч $s_j(\zeta_n)$ пересекает внутри $\Delta(\nu_m, \rho/\sin \sigma\pi)$ по крайней мере один из лучей тройки $S(\nu_m)$. Эту точку пересечения обозначим через η . Ясно, что

$$|\nu_m - \eta| < \text{diam } \Delta\left(\nu_m, \frac{\rho}{\sin \sigma\pi}\right) < \frac{2\rho}{\sin \sigma\pi} \leq d.$$

Поскольку $\nu_m \rightarrow \nu$, то найдется последовательность $\{\eta_k\}$ точек, лежащих на пересечении луча $s_j(\zeta_k)$ и некоторого луча из тройки $S(\nu_{m_k})$, которая сходится к ν , причем $m_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Будем считать, что для всех номеров $m_k = k$ и $|\nu_k - \eta_k| < \delta/2$ и $|\zeta - \zeta_k| < \delta/2$ для всех k .

Для каждого номера k выполняется неравенство

$$|f(\nu) - f(\zeta)| \leq |f(\nu) - f(\nu_k)| + |f(\nu_k) - f(\eta_k)| + |f(\eta_k) - f(\zeta_k)| + |f(\zeta_k) - f(\zeta)|. \quad (2)$$

Так как $\nu_k \in \Pi'$, $\zeta_k \in \Pi'$ и $\nu_k \rightarrow \nu$, $\zeta_k \rightarrow \zeta$, где $\nu, \zeta \in \Pi$ ($k \rightarrow \infty$), то как было показано, $f(\nu_k) \rightarrow f(\nu)$, $f(\zeta_k) \rightarrow f(\zeta)$, $k \rightarrow \infty$. Точка $\zeta_k \in \Pi'$, поэтому неравенство из условия (1) леммы выполнено для точек тройки $S(\zeta_k)$, лежащих от ζ_k на расстоянии, не превосходящем 2δ . Так как

$$|\zeta_k - \eta_k| \leq |\zeta_k - \zeta| + |\zeta - \nu| + |\nu - \eta_k| < \frac{\delta}{2} + \delta + \frac{\delta}{2} = 2\delta.$$

то $|f(\zeta_k) - f(\eta_k)| \leq L|\zeta_k - \eta_k|$. При $k \rightarrow \infty$ верны соотношения $|\nu_k - \eta_k| \leq |\nu_k - \nu| + |\nu - \eta_k| \rightarrow 0$ и $|\zeta_k - \eta_k| \rightarrow |\zeta - \nu| \leq \delta$; поэтому по условию (1) леммы при $k \rightarrow \infty$

$$|f(\nu_k) - f(\eta_k)| \leq L|\nu_k - \eta_k| \rightarrow 0, \quad |f(\zeta_k) - f(\eta_k)| \leq L|\zeta_k - \eta_k| \rightarrow L|\zeta - \nu|.$$

Поэтому, переходя в неравенстве (2) к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем

$$|f(\nu) - f(\zeta)| \leq L|\nu - \zeta|.$$

Следовательно, для точек $\zeta \in \Pi$ условие (1) леммы также проверено.

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если предположить, что для всех точек z множества P величина максимального угла между лучами троек $T(z)$ не превосходит $q\pi$, то для точек ζ порции Π множества P , определенной в лемме 2, величина максимального угла между лучами троек $S(\zeta)$ также будет не превосходить $q\pi$. Доказательство леммы при этом не изменится.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если в лемме 2 диаметр порции Π взять достаточно малым (меньше $(\delta/2) \sin \sigma$), то согласно лемме 1 функция $f(z)$ будет удовлетворять условию Липшица вдоль порции Π .

Для доказательства теоремы нам потребуется аналог теоремы типа Фрагмена–Линделёфа, в которой условие на рост функции выражено в форме некоторого условия суммируемости.

ЛЕММА 3 [8, теорема 1]. Пусть область D лежит в угле G раствора $q\pi$, $1/2 \leq q \leq 2$, и вершина угла точка ζ лежит на ∂D . Пусть функция $f(z)$ голоморфна внутри D , значения $|f(z)|$ не превосходят некоторой постоянной C во всех точках $\partial D \setminus \zeta$, а функция $(\log^+ |f(z)|)^{2q}$ локально суммируема в $\bar{D}$. Тогда неравенство $|f(z)| \leq C$ выполнено во всей области D .

ЛЕММА 4. Пусть G – угол раствора не более $(1 - 2\sigma)\pi$, $0 < \sigma < 1/2$, с вершиной в точке ζ и область D лежит в G , а ν – точка области D . Тогда вне угла G , а значит, и вне области D лежит дуга окружности $C(\nu, 2|\zeta - \nu|/\sin \sigma\pi)$ угловой величины больше π .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Δ – равнобедренный треугольник, у которого вершина, противоположная основанию, лежит в точке ζ , равные стороны лежат на сторонах угла G , а точка ν принадлежит основанию. Оценим длины сторон Δ .

Длина высоты Δ , опущенной из ζ , не превосходит $|\zeta - \nu|$, а углы при основании Δ не меньше $\pi\sigma$. Поэтому в треугольнике Δ длины боковых сторон не превосходят $|\zeta - \nu|/\sin \sigma\pi$. Значит, $\text{diam } \Delta < 2|\zeta - \nu|/\sin \sigma\pi$ и треугольник Δ целиком лежит внутри круга $D(\nu, 2|\zeta - \nu|/\sin \sigma\pi)$. Поэтому точки пересечения окружности $C(\nu, 2|\zeta - \nu|/\sin \sigma\pi)$ со сторонами угла G лежат от ζ дальше, чем вершины при основании треугольника Δ . Отсюда видно, большая дуга окружности $C(\nu, 2|\zeta - \nu|/\sin \sigma\pi)$ с концами на сторонах угла G содержит оба конца диаметра этой окружности, проведенного через основание треугольника Δ , и значит, имеет угловую величину больше π . Лемма доказана.

Напомним формулировку леммы Линделёфа.

ЛЕММА ЛИНДЕЛЁФА (см., например, [9, с. 37]). Пусть G – некоторая область, а ω – ее конечная точка. Пусть в области G функция $f(z)$ голоморфна, значения $|f(z)| \leq M$ и найдется окружность $C(\omega, r)$, для которой

а) в каждой точке $\zeta \in \partial G$, лежащей внутри круга $D(\omega, r)$,

$$\overline{\lim} |f(z)| \leq m < M \quad \text{при } z \rightarrow \zeta, \quad z \in G;$$

б) вне G лежит дуга окружности $C(\omega, r)$ угловой величины $2\pi/n$, $n \in \mathbb{N}$.

Тогда

$$|f(\omega)| \leq \sqrt[n]{mM^{n-1}}.$$

Условие а) леммы можно заменить условием (напомним, что функция $f(z)$ ограничена в G)

а') в каждой точке $\zeta \in \partial G$, лежащей внутри круга $D(\omega, r)$, за исключением, быть может, точек конечного множества,

$$\overline{\lim} |f(z)| \leq m < M \quad \text{при } z \rightarrow \zeta, \quad z \in G.$$

Это утверждение доказывается так же, как и приведенное в [9], при использовании следующей формы принципа максимума модуля.

Пусть функция $f(z)$ голоморфна и ограничена в области G и во всех точках $\zeta \in \partial G$, за исключением, быть может, точек конечного множества

$$\overline{\lim} |f(z)| \leq M \quad \text{при } z \rightarrow \zeta, \quad z \in G.$$

Тогда неравенство $|f(z)| \leq M$ выполнено во всей области G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Предположим, что теорема неверна и множество особых точек P (т.е. множество точек, в любой окрестности которых функция $f(z)$ не всюду голоморфна) непусто. Докажем, что функция $f(z)$ непрерывна на некоторой непустой порции Π множества P . Тогда по теореме Трохимчука (теорема В) функция $f(z)$ голоморфна в области, определяющей порцию Π , что противоречит предположению о том, что теорема неверна.

Предположим, что у функции $f(z)$ найдется изолированная особая точка ζ . Функция $f(z)$ ограничена в точках некоторой растопыренной тройки $T(\zeta)$, лежащих достаточно близко к ζ (это будет либо тройка, существующая согласно условию M'' , либо тройка $T(\zeta)$, существующая для точек множества e). Если $D(\zeta, r)$ – круг достаточно малого радиуса, то функция $f(z)$ голоморфна на $D(\zeta, r) \setminus \zeta$, а лучи тройки $T(\zeta)$ разбивают $D(\zeta, r)$ на три сектора, максимальной угловой величины меньше π . Тогда по лемме 3 функция $f(z)$ ограничена в каждом из этих секторов и, следовательно, на всем круге $D(\zeta, r)$. Значит, ζ – устранимая особая точка функции $f(z)$. Если в точке ζ выполнено условие M'' , то поскольку $f(z) \rightarrow f(\zeta)$ при $z \rightarrow \zeta$, $z \in T(\zeta)$, то у $f(z)$ особенности в точке ζ нет. Если же $\zeta \in e$, то положим $f(\zeta) := \lim f(z)$ при $z \rightarrow \zeta$, после этого функция $f(z)$ станет голоморфной в ζ . Значит, если потребуется, можно так переопределить $f(z)$ в точках множества e , чтобы у $f(z)$ не было изолированных особых точек, т.е. множество P было совершенно относительно области D .

Сначала покажем, что функция $f(z)$ ограничена в некоторой области $G \subset D$, содержащей точки исключительного множества P .

Согласно лемме 2 найдутся такие числа σ , L и δ и такая непустая порция Π множества P , что после возможного переопределения функции $f(z)$ на множестве $e \cap \Pi$ для каждой точки $\zeta \in \Pi$ будет определена тройка лучей $S(\zeta)$, удовлетворяющая условиям (1) и (2) леммы 2. Не уменьшая общности, можно считать, что $\sigma < 1/4$. Пусть G – область, определяющая порцию Π , т.е. область, для которой $\Pi = P \cap G$. Не уменьшая общности, можно считать, что $\text{diam } G < (\delta/2) \sin \sigma\pi$ и что G – круг с центром в точке $\tau \in \Pi$. В этом случае согласно лемме 1 функция $f(z)$ удовлетворяет на множестве Π условию Липшица.

Положим $S := \overline{\bigcup_{\zeta \in \Pi} S(\zeta, \delta)}$. Так как на Π функция $f(z)$ удовлетворяет условию Липшица, а на каждом множестве $S(\zeta, \delta)$ – условию (1) леммы 2, то функция $f(z)$ ограничена на множестве $\bigcup_{\zeta \in \Pi} S(\zeta, \delta)$ и для некоторого $M > 0$ на S выполнено неравенство $|f(z)| \leq M$. На $\overline{\bigcup_{\zeta \in \Pi} S(\zeta, \delta) \setminus \bigcup_{\zeta \in \Pi} S(\zeta, \delta)}$ функция $f(z)$ голоморфна, и, следовательно, непрерывна. Поэтому неравенство $|f(z)| \leq M$ выполняется на всем множестве S .

Для каждой точки $\zeta \in \Pi$ отрезки, составляющие $S(\zeta, \delta)$, разделяют круг G на три выпуклые части. Поэтому множество $G \setminus S$ состоит из непересекающихся открытых выпуклых компонент. Пусть Δ – произвольная компонента множества $G \setminus S$. Проверим, что функция $f(z)$ ограничена на Δ , причем во всех точках $\partial\Delta$, лежащих внутри круга G , функция $|f(z)|$ не превосходит числа M .

По определению S внутри Δ точек из Π нет, точки из Π могут лежать только на $\partial\Delta$. Покажем, что их не может быть больше, чем конечное множество. Пусть $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ – точки из Π , лежащие на $\partial\Delta$. Обозначим через A_m выпуклый многоугольник с вершинами в точках $\zeta_1, \dots, \zeta_m$. Так как Δ – выпуклое множество, то многоугольник A_m целиком (кроме своих вершин) лежит в Δ . По определению множества S , для каждой вершины ζ_k , $k = 1, \dots, m$, многоугольник A_m целиком лежит в одном из углов, образованном лучами тройки $S(\zeta_k)$. По условию (2) леммы 2 величины углов между лучами в тройке $S(\zeta_k)$ не превосходят $(1 - 2\sigma)\pi$. Поэтому величина каждого угла в A_m не превосходит $(1 - 2\sigma)\pi$, а сумма углов всего A_m – $m(1 - 2\sigma)\pi$. В то же время сумма углов m -угольника A_m равна $(m - 2)\pi$. Значит, $(m - 2)\pi \leq m(1 - 2\sigma)\pi$, отсюда $\pi \geq m\pi\sigma$ и, следовательно, $m \leq 1/\sigma$.

Таким образом, граница каждой компоненты Δ состоит из точек, в которых функция $f(z)$ голоморфна и, быть может, конечного числа точек порции Π исключительного множества P . Граница каждой компоненты Δ состоит из точек множества S и, быть может, точек окружности ∂G . Множество $G \setminus S$ состоит из не более чем счетного множества компонент. Поэтому на границах всех компонент множества $G \setminus S$ может лежать не более чем счетное множество точек из Π . Значит, можно найти концентрический с кругом G открытый круг $K := D(\tau, R) \setminus C(\tau, R)$, несколько меньшего, чем у G , радиуса, на границе которого нет точек множества Π . Дальше будем считать, что Δ – некоторая компонента множества $K \setminus S$.

Если на $\partial\Delta$ нет точек из Π , то по принципу максимума модуля функция $f(z)$ ограничена в Δ , причем $|f(z)|$ ограничен числом M_Δ , которое, вообще говоря, зависит от компоненты Δ . Заметим, что во всех точках $\zeta \in \partial\Delta$, лежащих внутри G , выполнено соотношение $\lim_{z \rightarrow \zeta} |f(z)| = |f(\zeta)| \leq M$ при $z \rightarrow \zeta$, $z \in \Delta$.

Пусть теперь компонента Δ содержит на своей границе точки из Π . Пусть $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ – точки порции Π , лежащие на границе $\partial\Delta$. Возьмем круги $D(\zeta_j, r_j)$, $j = 1, \dots, m$, кото-

рые лежат внутри круга K и попарно не пересекается. Положим $\Delta_j := \Delta \cap D(\zeta_j, r_j)$. По построению ζ_j – единственная точка порции Π в Δ_j . Во всех точках $\overline{\Delta_j} \setminus \{\zeta_j\}$ функция $f(z)$ непрерывна, причем все точки $\partial\Delta_j$, лежащие к ζ достаточно близко, принадлежат множеству S , на котором $|f(z)|$ не превосходит M . Поэтому $|f(z)|$ не превосходит некоторой постоянной во всех точках $\partial\Delta_j \setminus \{\zeta_j\}$. Следовательно, так как область Δ_j лежит в угле величины не более $(1 - 2\sigma)\pi$, $1/2 \leq 1 - 2\sigma < 1$ (напомним, что $\sigma < 1/4$), с вершиной в точке ζ_j и функция $(\log^+ |f(z)|)^{2(1-2\sigma)}$ суммируема в $\overline{\Delta_j}$, то по лемме 3 функция $f(z)$ ограничена в Δ_j . Таким образом, функция $f(z)$ ограничена на компоненте Δ , причем число M_Δ , которое ограничивает $|f(z)|$, зависит, вообще говоря, от Δ .

Покажем, что во всех точках $\zeta \in \partial\Delta$, лежащих внутри K , выполнено неравенство $\overline{\lim} |f(z)| \leq M$, $z \rightarrow \zeta$, $z \in \Delta$ (напомним, что все точки $\partial\Delta$, лежащие внутри $K \subset G$, принадлежат множеству S , а на S имеет место неравенство $|f(z)| \leq M$). Ясно, что это соотношение нужно проверять только в точках множества $\Pi \cap \partial\Delta$.

Предположим, что найдется точка $\zeta \in \Pi$, лежащая на $\partial\Delta$, в которой $\overline{\lim} |f(z)| > M$ при $z \rightarrow \zeta$, $z \in \Delta$. Напомним, что по определению круга K точка ζ лежит внутри K . Поскольку на компоненте Δ функция $f(z)$ ограничена, то верхний предел $\overline{\lim} |f(z)|$ при $z \rightarrow \zeta$, $z \in \Delta$, конечен. Обозначим этот предел через N , $N > M$.

Положим $\varepsilon := (N - M)/3$. Пусть r – радиус, для которого во всех точках $D(\zeta, 2r/\sin \sigma\pi) \cap \Delta$ выполнено неравенство $|f(z)| < N + \varepsilon$. Будем считать, что круг $D(\zeta, 2r/\sin \sigma\pi)$ целиком лежит внутри K и внутри $D(\zeta, 2r/\sin \sigma\pi)$ нет точек из $\Pi \cap \partial\Delta$, кроме ζ . Пусть ω – точка из $D(\zeta, r) \cap \Delta$, в которой $|f(\omega)| > N - \varepsilon$. Компонента Δ лежит в угле величины не более $(1 - 2\sigma)\pi$ с вершиной в точке ζ . Поэтому по лемме 4 вне этого угла, а значит, и вне замыкания области $\Delta \cap D(\omega, 2|\zeta - \omega|/\sin \sigma\pi)$, лежит дуга окружности $C(\omega, 2|\zeta - \omega|/\sin \sigma\pi)$ угловой величины больше π . Во всех точках $\nu \in \partial\Delta \cap D(\omega, 2|\zeta - \omega|/\sin \sigma\pi)$, лежащих внутри $D(\omega, 2|\zeta - \omega|/\sin \sigma\pi)$, кроме точки ζ , функция $f(z)$ голоморфна и $|f(\nu)| \leq M$. Поскольку среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического, то в точке ω по лемме Линделёфа

$$|f(\omega)| < \sqrt{M \cdot (N + \varepsilon)} \leq \frac{M + (N + \varepsilon)}{2} = M + \frac{2}{3}(N - M).$$

Точка ω выбиралась так, чтобы

$$|f(\omega)| > N - \varepsilon = M + \frac{2}{3}(N - M).$$

Получено противоречие. Следовательно, предположение о том, что $\overline{\lim} |f(z)| > M$ при $z \rightarrow \zeta$, $z \in \Delta$ неверно. Таким образом, для всех компонент Δ множества $K \setminus S$ в каждой точке $\zeta \in \partial\Delta$, лежащей внутри K , выполняется

$$\overline{\lim} |f(z)| \leq M \quad \text{при } z \rightarrow \zeta, \quad z \in \Delta.$$

Проверим, что функция $f(z)$ ограничена в круге $D(\tau, R/2)$. По условию теоремы функция $(\log^+ |f(z)|)^{2(1-\sigma)}$ суммируема на $K = D(\tau, R) \setminus C(\tau, R)$. Положим

$$Q := \iint_K (\log^+ |f(z)|)^{2(1-\sigma)} dx dy + \pi R^2 (\log^+ (M + 1))^{2(1-\sigma)}.$$

На множестве $K \cap S$ выполнено неравенство $|f(z)| \leq M$. Возьмем произвольную компоненту Δ множества $K \setminus S$. В круге K положим

$$\varphi_{\Delta}(z) := \begin{cases} \max\{(\log^+ |f(z)|)^{2(1-\sigma)}, (\log^+(M+1))^{2(1-\sigma)}\}, & z \in \Delta, \\ (\log^+(M+1))^{2(1-\sigma)}, & z \in K \setminus \Delta. \end{cases}$$

Внутри области Δ функция $\varphi_{\Delta}(z)$ субгармонична как максимум двух субгармонических функций. У каждой точки $\zeta \in \partial\Delta$ найдется окрестность $U(\zeta)$, в которой $|f(z)| \leq M+1$ при $z \in U(\zeta) \cap \Delta$, поэтому по определению функции $\varphi_{\Delta}(z)$ на $U(\zeta)$ выполняется тождество $\varphi_{\Delta}(z) \equiv (\log^+(M+1))^{2(1-\sigma)}$, а на открытом множестве $K \setminus \overline{\Delta}$ – тождество $\varphi_{\Delta}(z) \equiv (\log^+(M+1))^{2(1-\sigma)}$. Следовательно, $\varphi_{\Delta}(z)$ – субгармоническая в круге K функция.

Функция $\varphi_{\Delta}(z)$ неотрицательна, поэтому по определению величины Q и для каждого множества $F \subset K$ выполнено

$$0 \leq \iint_F \varphi_{\Delta}(z) dx dy \leq \iint_K \varphi_{\Delta}(z) dx dy \leq Q.$$

Возьмем точку $\zeta \in \Delta \cap D(\tau, R/2)$ (если такие точки существуют). Тогда, так как $D(\zeta, R/2) \subset K$ и подынтегральная функция $\varphi_{\Delta}(z)$ неотрицательна и субгармонична, то по определению $\varphi_{\Delta}(\zeta)$

$$\begin{aligned} (\log^+ |f(\zeta)|)^{2(1-\sigma)} &\leq \varphi_{\Delta}(\zeta) \leq \frac{1}{\pi(R/2)^2} \iint_{D(\zeta, R/2)} \varphi_{\Delta}(z) dx dy \\ &\leq \frac{1}{\pi(R/2)^2} \iint_K \varphi_{\Delta}(z) dx dy \leq \frac{Q}{\pi(R/2)^2}. \end{aligned}$$

Поскольку величина $Q/(\pi(R/2)^2)$ не зависит от выбора компоненты Δ , то функция $f(z)$ ограничена в $D(\tau, R/2)$.

Теперь покажем, что функция $f(z)$ непрерывна на множестве $\Pi \cap D(\tau, R/2)$. Предположим, что это не так и найдется точка $\zeta \in \Pi \cap D(\tau, R/2)$, в которой $f(z)$ разрывна. Не уменьшая общности, можно считать, что $f(\zeta) = 0$. В этом случае $\lim_{z \rightarrow \zeta} |f(z)| > 0$. Положим $\varepsilon := \lim_{z \rightarrow \zeta} |f(z)|$. В любой близости от ζ есть точки ω , в которых $|f(\omega)| > \varepsilon/2$. Найдем круг $D(\zeta, r)$, в котором $|f(z)| < 3\varepsilon/2$. Вдоль множества Π функция $f(z)$ удовлетворяет условию Липшица, а для точек $\nu \in \Pi$ в точках троек $S(\nu, \delta)$ выполнено условие (1) леммы 2. Поэтому если радиус r достаточно мал, то на множестве $S_r := \bigcup_{\nu \in (\Pi \cap D(\zeta, r))} S(\nu, 2r)$ выполнено неравенство $|f(z)| < \varepsilon/8$. Следовательно, в каждой точке круга $D(\zeta, r)$, в которой $|f(z)| > \varepsilon/2$, функция $f(z)$ голоморфна.

Пусть ω – точка круга $D(\zeta, (r/4) \sin \sigma\pi)$, в которой $|f(\omega)| > \varepsilon/2$. Обозначим через Δ ту компоненту множества $D(\zeta, r) \setminus S_r$, которой принадлежит точка ω . Множество Δ лежит в не превосходящем $(1 - 2\sigma)\pi$ угле с вершиной в точке ζ . По лемме 3 вне этого угла лежит дуга окружности $C(\omega, 2|\omega - \zeta|/\sin \sigma\pi)$ величины больше π . В области $\Delta \cap D(\omega, 2|\omega - \zeta|/\sin \sigma\pi) \subset D(\zeta, r)$ выполнено неравенство $|f(z)| \leq 3\varepsilon/2$. Все точки границы $\partial(\Delta \cap D(\omega, 2|\omega - \zeta|/\sin \sigma\pi))$, лежащие внутри окружности $C(\omega, 2|\omega - \zeta|/\sin \sigma\pi)$ принадлежат множеству S_r . Среди них может быть только конечное число точек порции Π , во всех остальных точках η границы $\partial(\Delta \cap D(\omega, 2|\omega - \zeta|/\sin \sigma\pi))$ функция $f(z)$ голоморфна и поэтому $\lim |f(z)| = |f(\eta)| \leq \varepsilon/8$ при $z \rightarrow \eta$, $z \in \Delta$. Следовательно, по лемме Линделёфа, примененной к области $\Delta \cap D(\zeta, r)$ и окружности $C(\omega, 2|\omega - \zeta|/\sin \sigma\pi)$

выполнена оценка

$$|f(\omega)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{8} \cdot \frac{3\varepsilon}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В то же время, точка ω выбиралась так, чтобы в ней $|f(\omega)| > \varepsilon/2$. Мы пришли к противоречию.

Следовательно, предположение о том, что функция $f(z)$ разрывна в некоторой точке $\zeta \in D(\tau, R/2)$ неверно и $f(z)$ непрерывна в круге $D(\tau, R/2)$. Тогда по теореме Трохимчука (теорема В) функция $f(z)$ голоморфна в круге $D(\tau, R/2)$. По предположению в круге $D(\tau, R/2)$ содержались точки исключительного множества P . Полученное противоречие доказывает теорему.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Menchoff D. Sur les fonctions monogènes // Bull. Soc. Math. France. 1931. V. 59. P. 141–182.
- [2] Bohr H. Ueber streckentreue und konforme Abbildung // Math. Z. 1918. V. 1.
- [3] Трохимчук Ю. Ю. Непрерывные отображения и условия моногенности. М.: Физматгиз, 1963.
- [4] Бродович М. Т. Об условиях моногенности не непрерывных отображений // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 12. Харьков: ХГУ, 1970. С. 94–103.
- [5] Теляковский Д. С. Обобщение одной теоремы Меньшова о моногенности // Тезисы докладов 10-й Саратовской зимней школы. Саратов: Саратовский гос. ун-т, 2000. С. 135–136.
- [6] Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.
- [7] Сакс С. Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949.
- [8] Теляковский Д. С. Обобщение одной теоремы Меньшова о моногенности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 4. С. 886–896.
- [9] Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

Московский инженерно-физический институт
(технический университет)

Поступило
04.04.2002
Исправленный вариант
21.08.2003