Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Болотов, Гиперслоения на компактных трехмерных многообразиях с ограничениями на внешнюю кривизну слоев, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 5, 651–659

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1330>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 18:33:28

УДК 514

ГИПЕРСЛОЕНИЯ НА КОМПАКТНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ВНЕШНЮЮ КРИВИЗНУ СЛОЕВ

Д. В. Болотов

Исследуются C^∞ -слоения коразмерности 1 на компактных трехмерных римановых многообразиях. Вводятся новые классы слоений, а именно, гиперболические, параболические и эллиптические. Приводятся примеры таких слоений. В частности, строится метрика класса C^∞ неотрицательной секционной кривизны на S^3 такая, что слоение Роба является параболическим для этой метрики. Классифицируются аналитические трехмерные компактные многообразия знакопостоянной секционной кривизны, допускающие параболические слоения.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Пусть (M, g_M) – риманово многообразие и $\mathcal{F}$ – слоение на нем. Многообразие и слоение на нем везде предполагаются класса C^∞ . Обозначим через L подрасслоение касательного расслоения TM , касательное к $\mathcal{F}$, а через Q – нормальное расслоение, которое есть фактор TM/L . Тогда имеет место точная расщепляющаяся последовательность расслоений:

$$0 \rightarrow L \rightarrow TM \rightarrow Q \rightarrow 0.$$

Скажем, что слоение *ориентируемо*, если ориентируемо L , и *трансверсально ориентируемо*, если ориентируемо Q .

Пусть $\sigma: Q \rightarrow L^\perp \subset TM$ – расщепляющий изоморфизм, где $L^\perp$ – подрасслоение TM , ортогональное к L . Представим g_M в виде $g_M = g_L \oplus g_{L^\perp}$. Положим $g_Q = \sigma^* g_{L^\perp}$. Тогда σ есть метрический изоморфизм расслоений (Q, g_Q) и $(L, g_{L^\perp})$, которые мы в дальнейшем будем отождествлять.

Определим вторую фундаментальную форму слоения, как отображение α , положив $\alpha(X, X') = \pi(\nabla_X X')$, где X, X' – гладкие сечения L , а ∇ – метрическая связность на M . Определим оператор второй фундаментальной формы слоения $A_Z: L \rightarrow L$ для сечения Z расслоения $L^\perp$ из соотношения $g_M(\alpha(X, X'), Z) = g_M(A_Z X, X')$. Так как $g_M(\nabla_X X', Z) = -g_M(X', \nabla_X Z)$, то видно, что $A_Z X = -\pi^\perp \nabla_X Z$, где $\pi^\perp: TM \rightarrow L$ – естественная проекция. Пусть теперь $\mathcal{F}$ – ориентируемое гиперслоение на M , а ξ – единичное, ортогональное к $\mathcal{F}$ векторное поле. В этом случае оператор A_ξ назовем *оператором второй квадратичной формы* слоения $\mathcal{F}$. Из того, что $g_M(\nabla_X \xi, \xi) = 0$, следует, что $A_\xi = -\nabla_X \xi$.

2. Предварительные сведения.

ТЕОРЕМА 1 [1]. Пусть F — C^∞ -ориентируемое слоение на компактном многообразии W^{n+1} постоянной кривизны c .

Пусть $K_F: W^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ гладкая функция такая, что $K_F(x)$ — гауссова кривизна слоя L , проходящего через x , а μ — канонический объем на W^{n+1} . Определим $\overline{K_F}$ из равенства

$$\text{Vol}(W^{n+1})\overline{K_F} = \int_{W^{n+1}} K_F \mu.$$

Тогда имеет место следующая формула:

$$\overline{K_F} = \begin{cases} 2^n c^{n/2} / \binom{n}{n/2} & \text{для четного } n, \\ 0 & \text{для нечетного } n. \end{cases}$$

Брито, Ланжевин, Розенберг в [2] обобщили этот результат и доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть W^{n+1} и F такие, как выше, а σ_i — элементарные симметрические многочлены от собственных значений оператора второй квадратичной формы A_ξ слоения. Тогда верна следующая формула:

$$\int_{W^{n+1}} \sigma_i \mu = \begin{cases} \binom{n/2}{i/2} c^{i/2} \text{Vol } W^{n+1}, & \text{если } n, i \text{ четные,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае $i = 1$ без предположения постоянства секционной кривизны W^{n+1} имеем $\int_{W^{n+1}} \sigma_1 \mu = 0$ [3].

Заметим, что в случае $n = 2$ σ_2 имеет наглядный геометрический смысл: $\sigma_2(x) = K^F(x) - K_\sigma^F(x) = K_e^F(x)$ (уравнение Гаусса) есть внешняя кривизна слоя $K_e^F(x)$, проходящего через x , а именно, разность секционных кривизн слоя $K^F(x)$ и объемлющего пространства $K_\sigma^F(x)$ вдоль площадок, касательных к слою.

ТЕОРЕМА 3 [4]. Пусть $\mathcal{F}$ — гладкое слоение на замкнутом ориентируемом трехмерном многообразии M^3 , причем все слои гомеоморфны $\mathbb{R}^2$. Тогда M^3 гомеоморфно тору.

ТЕОРЕМА 4 [5]. Пусть M^n — компактное риманово многообразие типа $K(\pi, 1)$. Тогда если секционная кривизна M^n неотрицательна, то она тождественно равна 0.

ТЕОРЕМА 5 [6]. Пусть M^n — полное риманово многообразие с постоянным нуль-индексом $\mu = k > 0$. Тогда если существует поверхность, ортогональная слоям вполне геодезического слоения, определяемого нуль-индексом, то M^n локально есть метрическое произведение риманова многообразия M^{n-k} и евклидова пространства E^k .

Напомним определения некоторых классов слоений, интенсивно исследуемых в последнее время.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Слоение на M называется *вполне геодезическим*, если слои – вполне геодезические подмногообразия M . Это равносильно тому, что $\alpha \equiv 0$, что эквивалентно условию $\Theta(Z)g_L = 0$ для любого сечения Z расслоения $L^\perp$, где $\Theta(Z)$ – производная Ли в направлении векторного поля Z .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Слоение на M называется *римановым*, если $\Theta(X)g_{L^\perp} = 0$ для любого сечения X расслоения L . То есть слоение локально является римановой субмерсией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Слоение на M называется *гармоническим*, если слои – минимальные подмногообразия M , что эквивалентно условию $\text{trace}(A_Z) = 0$ для любого сечения Z расслоения $L^\perp$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Слоение на M называется *вполне омбилическим*, если слои суть вполне омбилические подмногообразия M .

Следующие определения принадлежат профессору А. А. Борисенко.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ А. *Параболическим слоением* называется слоение, для которого $K_e^F \equiv 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ В. *Гиперболическим слоением* называется слоение, для которого $K_e^F \leq 0$ и которое не является параболическим. В случае строгого неравенства скажем, что слоение – *сильно гиперболическое*. (Заметим, что в трехмерном случае гармоническое слоение является гиперболическим).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ С. *Эллиптическим слоением* называется слоение, для которого $K_e^F \geq 0$ и которое не является параболическим. (В трехмерном случае примером эллиптического слоения является вполне омбилическое слоение).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Любое компактное трехмерное риманово многообразие не допускает сильно эллиптического слоения и параболического слоения с $\text{rank } A_\xi \equiv 1$. Это прямое следствие замечания 1.

3. Формулировки и доказательства основных результатов.

ТЕОРЕМА А. Пусть M^3 – компактное ориентируемое риманово многообразие и $\mathcal{F}$ – ориентируемое слоение коразмерности 1 на нем, а ξ – единичное, ортогональное к $\mathcal{F}$ векторное поле. Тогда верна следующая формула:

$$\int_{M^3} \text{Ric}(\xi, \xi) \mu = 2 \int_{M^3} K_e^{\mathcal{F}} \mu,$$

где μ – форма объема на M^3 , а $\text{Ric}(\xi, \xi)$ – кривизна Риччи в направлении ξ .

СЛЕДСТВИЕ. Если компактное трехмерное риманово многообразие M^3 является многообразием неотрицательной кривизны Риччи, то оно не допускает гиперболического слоения. Если компактное трехмерное риманово многообразие M^3 является многообразием неположительной кривизны Риччи, то оно не допускает эллиптического слоения. Если компактное трехмерное риманово многообразие M^3 является многообразием знакопостоянной кривизны Риччи, то оно не допускает параболического слоения.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае неориентируемости M^3 или $\mathcal{F}$ следует перейти к ориентируемому конечнолистному накрытию $\mathcal{M}^3$ с индуцированной метрикой и ориентируемым поднятым слоением Φ . Таким образом, следствия остаются верными и в неориентируемом случае.

Теорему А можно вывести из [7]. Однако в духе данной работы приведем доказательство, используя технику, используемую в [2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ А. Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ – локальный ортонормированный базис на M^3 , причем e_3 совпадает с ξ . Через $\{\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3\}$ обозначим двойственный базис ковекторов. Определим 1-формы $w_{i,j}$ ($i, j = 1, 2, 3$) и ψ_k ($k = 0, 1, 2$) на M^3 следующим образом: $w_{i,j}(u) = \langle \nabla_u e_i, e_j \rangle$, где ∇ – метрическая связность на M^3 , а ψ_k определяются из соотношения

$$\sum_{k=0}^2 \psi_k t^k = (t\Theta_1 + w_{13}) \wedge (t\Theta_2 + w_{23}).$$

В [2] доказывается, что ψ_k не зависят от выбора базиса с той же ориентацией и такого, что $e_3 = \xi$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. $d\psi_1 = 2\psi_0 \wedge \Theta_3 - \text{Ric}(\xi, \xi)\mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} d(w_{13} \wedge \Theta_2 + \Theta_1 \wedge w_{23}) &= dw_{13} \wedge \Theta_2 - w_{13} \wedge d\Theta_2 + d\Theta_1 \wedge w_{23} - \Theta_1 \wedge dw_{23} \\ &= dw_{13} \wedge \Theta_2 + w_{13} \wedge \Theta_1 \wedge w_{21} + w_{13} \wedge \Theta_3 \wedge w_{23} \\ &\quad - \Theta_2 \wedge w_{12} \wedge w_{23} - \Theta_3 \wedge w_{13} \wedge w_{23} - \Theta_1 \wedge dw_{23} \\ &= dw_{13} \wedge \Theta_2 + \Theta_1 \wedge w_{21} \wedge w_{13} - 2\Theta_3 \wedge w_{13} \wedge w_{23} - \Theta_2 \wedge w_{12} \wedge w_{23} - \Theta_1 \wedge dw_{23} \\ &= dw_{13} \wedge \Theta_2 + \Theta_1 \wedge dw_{23} + \Theta_1 \wedge \Omega_3^2 - 2\Theta_3 \wedge \psi_0 - \Theta_2 \wedge dw_{13} - \Theta_2 \wedge \Omega_3^1 - \Theta_1 \wedge dw_{23} \\ &= -2\Theta_3 \wedge \psi_0 + (K_\sigma(e_2, \xi) + K_\sigma(e_1, \xi))\mu = -2\Theta_3 \wedge \psi_0 + \text{Ric}(\xi, \xi)\mu. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

В выкладках мы использовали структурные уравнения Картана:

$$d\Theta_i = - \sum_j \Theta_j \wedge w_{ij}, \quad dw_{ij} + \Omega_j^i = \sum_k w_{ik} \wedge w_{kj},$$

где

$$\Omega_j^i = \sum_{k,l} \frac{1}{2} R_{jkl}^i \Theta_k \wedge \Theta_l$$

– компоненты формы кривизны многообразия M^3 .

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что $\Theta_3 \wedge \psi_0 = \det A_\xi \mu$, а это в точности утверждение леммы 1.8 [2]. Таким образом, теорема А доказана.

ТЕОРЕМА В. Пусть M^3 – компактное ориентируемое риманово многообразие с аналитической метрикой и $\mathcal{F}$ – параболическое слоение коразмерности 1 на нем. Тогда

- 1) если секционная кривизна K_σ многообразия неотрицательна, то либо
 - а) M^3 – плоская пространственная форма, либо
 - б) M^3 гомеоморфно $S^2 \times S^1$, причем $\mathcal{F}$ в этом случае является тривиальным S^2 -расслоением над S^1 , и метрика на $S^2 \times S^1$ локально есть метрика прямого произведения слоя на евклидов фактор;
- 2) если $K_\sigma \leq 0$, то либо
 - а) M^3 – плоская пространственная форма, либо
 - б) $\mathcal{F}$ является M^2 -расслоением над S^1 , где M^2 – замкнутая поверхность рода $g \geq 2$, и метрика на M^3 локально есть метрическое произведение слоя на евклидов фактор.

Конечнолистное накрытие M^3 гомеоморфно $M^2 \times S^1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Утверждение 1) теоремы В не может быть обобщено на случай C^∞ метрики (см. пример 2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ В. Напомним определение внутреннего нуль-индекса точки x многообразия M :

$$\mu_x = \dim\{X \in T_x M : R(X, Y) = 0 \text{ для любого } Y \text{ из } T_x M\}, \quad (1)$$

где $R(X, Y)$ – оператор кривизны риманова многообразия M . Оказывается, если $\mu_x > 0$ для всех x , то множество $P = \{x : \mu_x = \min_{x \in M} \mu_x\}$ открыто, а распределение (1) на P является интегрируемым и вполне геодезическим [8]. Непосредственно из теоремы 1 и из того, что K_σ не меняет знак, следует, что $K_\sigma(\xi, *) \equiv 0$. Представляя тензор кривизны в точке как симметрический билинейный оператор на трехмерном пространстве бивекторов $\Lambda^2 T_x M$ и замечая (из экстремальности), что собственное подпространство $\Lambda^2 T_x M$, отвечающее собственному значению 0, двумерно, можно показать, что $R_x(\xi, *) \equiv 0$ для любого x из M , т.е. $\mu_x = 1$ или 3. Из сказанного следует, что $P = \{x \in M : \mu_x = 1\}$ является открытым и насыщенным (т.е. являющимся объединением слева ортогонального слоения $\mathcal{F}^\perp$), причем слои $\mathcal{F}^\perp$ на P являются геодезическими в M^3 . Если $M^3 \setminus P$ содержит открытое множество, то ввиду аналитичности метрики $R \equiv 0$ на M^3 . Если же множество P всюду плотно в M^3 , то $\mathcal{F}^\perp$ является вполне геодезическим на всем M^3 . Действительно, пусть $f: M^3 \rightarrow \mathbb{R}$ – функция, ставящая в соответствие точке M^3 многообразия геодезическую кривизну слоя ортогонального слоения $\mathcal{F}^\perp$, проходящего через эту точку. Тогда $f = 0$ на всюду плотном множестве P , поэтому f есть тождественный нуль. Из теоремы 5 следует, что метрика на M^3 локально расщепляется на прямое произведение метрик, т.е. $\mathcal{F}$ является как римановым, так и вполне геодезическим. Заметим, что теорема 5 применима лишь в случае постоянства нуль-индекса в некоторой окрестности точки, однако наличие слоения позволяет перенести доказательство теоремы 5 и на особые точки. Утверждение 2) теоремы следует теперь из результатов Эберляйна [9]. Для доказательства утверждения 1) рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $\mathcal{F}$ имеет компактный слой. Тогда этот слой гомеоморфен либо S^2 , либо T^2 ввиду условия на кривизну многообразия и параболичности слоения. Если это тор, то он плоский, но тогда $M^3 \setminus P$ содержит открытое множество. Поэтому ввиду насыщенности $M^3 \setminus P$ и аналитичности метрики M^3 плоское. В случае же, когда слой

гомеоморфен S^2 , в силу теоремы стабильности Рибба заключаем, что M^3 гомеоморфно $S^2 \times S^1$, и слоение есть тривиальное S^2 -расслоение над окружностью.

Случай 2. Пусть $\mathcal{F}$ не имеет компактных слоев. Если хотя бы один слой плоский, то M^3 плоское (см. выше). В противном случае слои имеют неотрицательную секционную кривизну и содержат точки, где кривизна больше 0. Ввиду теоремы 5 все слои гомеоморфны плоскости. Но тогда из теоремы 4 следует, что M^3 гомеоморфно тору. Значит, в силу неотрицательности секционной кривизны M^3 снова плоское. Таким образом, теорема В доказана.

4. Примеры.

ПРИМЕР 1 (негеодезируемые слоения на плоском торе). Напомним, что слоение на многообразии M *негеодезируемо*, если оно не является вполне геодезическим ни для какой метрики g на M .

Пусть $\mathbb{R}^3$ – трехмерное линейное пространство со стандартной евклидовой метрикой. Определим 1-форму на $\mathbb{R}^3$ в декартовых координатах (x, y, z) :

$$\omega(x) = h(x) dx + (1 - h(x)) dy,$$

где $h(x)$ – любая гладкая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $0 \leq h(x) \leq 1$;
- 2) $h(x)$ периодическая с периодом 1;
- 3) $h(1/2) = 0$;
- 4) $h(1/2 - x) = h(1/2 + x)$;
- 5) $h(0) = h(1) = 1$;
- 6) $h(x)$ возрастает на $[1/2, 1]$.

Нетрудно видеть, что $\omega \wedge d\omega = 0$. Поэтому ω задает слоение коразмерности 1 в силу теоремы Фробениуса. Так как слои являются цилиндрическими поверхностями, это слоение – параболическое. Очевидно, что слоение инвариантно относительно свободного действия группы $\mathbb{Z}^3$ на $\mathbb{R}^3$, определяемого параллельными переносами на векторы с целочисленными координатами. Поэтому, профакторизовав $\mathbb{R}^3$ по $\mathbb{Z}^3$, мы получим параболическое слоение на плоском торе T^3 . Это слоение имеет единственный компактный слой, диффеоморфный тору, который является вполне геодезическим подмногообразием в T^3 . Полученное слоение неориентируемо, однако его двулистное накрытие является уже ориентируемым слоением на T^3 . Оно имеет два компактных слоя. Взяв на накрытии индуцированную метрику, получим ориентируемое параболическое слоение на плоском торе. Оно не является геодезируемым. Это следует из того, что всякая траектория, ортогональная слоению и стартующая с компактного слоя, ни разу больше на него не попадает [10]. Заметим, что существуют также примеры негеодезируемых параболических слоений и на других плоских пространственных формах.

ПРИМЕР 2 (параболическое слоение на трехмерной сфере S^3). На S^3 существует метрика класса C^∞ неотрицательной секционной кривизны такая, что слоение Рибба является параболическим для этой метрики.

Рассмотрим следующую параметризацию единичной сферы S^3 в цилиндрических координатах (t, φ, θ) :

$$x = t \cos \varphi, \quad y = t \sin \varphi, \quad z = \sqrt{1 - t^2} \cos \theta, \quad \tau = \sqrt{1 - t^2} \sin \theta.$$

Особенностями данной параметризации являются две зацепленные окружности $t = 0$ и $t = 1$. Определим следующую метрику на S^3 :

$$ds^2 = dt^2 + g^2(t) d\varphi^2 + f^2(t) d\theta^2,$$

где g и f – выпуклые неотрицательные функции, определяемые следующим образом. Возьмем произвольные положительные константы a , A_1 и A_2 . Положим

$$G(x) = \begin{cases} a \frac{\alpha(A_2 - x)}{\alpha(A_2 - x) + \alpha(x - A_1)}, & A_1 \leq x \leq A_2, \\ 0, & x \geq A_2. \end{cases}$$

Здесь

$$\alpha(x) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Константы a , A_1 и A_2 можно выбрать так, чтобы выполнялись условия

$$A_1 < A_2 < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \int_0^{A_2} G(x) dx = 1.$$

Теперь положим

$$g(t) = \int_0^t G(x) dx.$$

Нетрудно видеть, что $g \in C^\infty$ и $g''(t) \leq 0$, т.е. g – выпуклая функция. Теперь положим по определению $f(t) = g(1 - t)$. Ввиду особого выбора метрики вблизи сингулярностей параметризации метрика определена глобально. Построенная метрика есть метрика неотрицательной секционной кривизны, причем лишь при $A_1 < A_2$ кривизна не равна 0 тождественно. Определим слоение Рибба на S^3 . Пусть (t, φ) – цилиндрические координаты на $\mathbb{R}^3$. Определим 1-форму на $\mathbb{R}^3$ следующим образом: $\omega = h(t) dt + (1 - h(t)) d\theta$, где $h(t)$ определяется в виде

$$h(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq A_2, \\ h(t) \text{ возрастает на } [A_2, 1/\sqrt{2}], \\ 1, & t \geq 1/\sqrt{2}. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $\omega \wedge d\omega = 0$. Поэтому форма ω задает слоение на $\mathbb{R}^3$. Ограничив его на область $t \leq 1/\sqrt{2}$, а затем соответственно профакторизовав, получим слоение на полнотории. Склеив стандартным образом два таких полнотория, получим слоение на S^3 . Убедимся, что полученное слоение параболическое для построенной выше метрики. Действительно, в области $0 \leq t \leq A_2$ имеем метрическое произведение слоя $\{\theta = \text{const}, 0 \leq t \leq A_2\}$ на окружность $t = 0$. Следовательно, в этой области слоение является вполне геодезическим. По аналогичным рассуждениям слоение вполне геодезическое в области $1 - A_2 \leq t \leq 1$. В области $A_2 < t < 1 - A_2$ метрика плоская и имеет вид $ds^2 = dt^2 + d\varphi^2 + d\theta^2$. Заметим, что через каждую точку этой области проходит одна из окружностей, принадлежащая некоторому слою: $\{t = \text{const}, \theta = \text{const}\}$, если $A_2 < t \leq 1/\sqrt{2}$, или $\{t = \text{const}, \varphi = \text{const}\}$, если $1/\sqrt{2} \leq t < 1 - A_2$. Однако эти окружности являются геодезическими в S^3 , поэтому $K^e \leq 0$ в этой области. Ввиду теоремы А и неотрицательности кривизны метрики следует, что $K^e = 0$ в этой области. Заметим, что единственным вполне геодезическим слоем является плоский тор, отвечающий параметру $t = 1/\sqrt{2}$.

ПРИМЕР 3 (сильногиперболическое слоение на расслоении единичных касательных векторов над пространством постоянной отрицательной кривизны, равной -1). Пусть T_1P – расслоение единичных касательных векторов над пространством постоянной отрицательной кривизны, равной -1 . Рассмотрим геодезический поток на P . Он задает орисферическое слоение на T_1P . Если рассмотреть изометрическое накрытие $p: T_1H^2 \rightarrow T_1P$, то прообразом слоя будет поверхность в T_1H^2 , определяемая единичным векторным полем вдоль геодезических, параллельных (по Лобачевскому) некоторой фиксированной геодезической на H^2 , т.е. геодезических, сходящихся к некоторой фиксированной точке A на абсолюте.

Рассмотрим на H^2 параболическую систему координат (r, t) , где координатным линиям, отвечающим параметру r , соответствует пучок геодезических, определенный выше, а координатным линиям, соответствующим параметру t , отвечают орициклы, определяемые как орбиты однопараметрической группы поворотов вокруг точки A . В этой системе координат метрика на H^2 имеет вид $ds^2 = dr^2 + e^{-2r} dt^2$. Метрическая связность, соответствующая этой метрике, имеет вид:

$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{2r} \end{pmatrix}, \quad \Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Рассмотрим метрику Сасаки на T_1H^2 . Пусть $(x^i, \xi^i) = (r, t, \xi^1, \xi^2)$ – локальные координаты на T_1H^2 , где в качестве ортонормированного базиса (ξ^1, ξ^2) можно взять единичные касательные векторные поля вдоль координатных линий r, t . Тогда в этих координатах метрика имеет вид

$$d\sigma^2 = ds^2 + g_{ik} D\xi^i D\xi^k = dr^2 + e^{-2r} dt^2 + (d\xi^1 + e^{2r} \xi^2 dt)^2 + e^{-2r} (d\xi^2 - \xi^1 dt - \xi^2 dr)^2,$$

где $D\xi^i = d\xi^i + \Gamma_{jk}^i \xi^j dx^k$ ($i, k = 1, 2$).

Из того, что движения перестановочны с параллельным переносом, а также из конкретного вида метрики Сасаки, следует, что изометрическое накрытие $r: H^2 \rightarrow P$ поднимается до изометрического накрытия $p: T_1H^2 \rightarrow T_1P$. Поэтому в локальных координатах (r, t, ξ^1, ξ^2) метрика на T_1P совпадает с метрикой $d\sigma^2$ на T_1H^2 .

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть T_1P – сферическое расслоение к пространству постоянной кривизны, равной -1 , с сасакиевой метрикой. Тогда орисферическое слоение на T_1P является сильногиперболическим и гармоническим, причем слои имеют постоянную секционную кривизну -1 и постоянную внешнюю кривизну $-1/4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{L}$ – произвольный слой орисферического слоения на T_1P . Выберем локальную систему координат так, чтобы $\mathcal{L}$ локально задавался в виде поверхности $\varphi(r, t) = (r, t, 1, 0)$. Тогда касательные к координатным линиям векторы имеют вид $\varphi_r(1, 0, 0, 0)$ и $\varphi_t(0, 1, 0, 0)$. Для доказательства данного утверждения необходимо доказать следующую лемму.

ЛЕММА. Индуцированная метрика на $\mathcal{L}$ из T_1P имеет вид $dq^2 = dr^2 + 2e^{-2r} dt^2$, т.е. является метрикой постоянной кривизны, равной -1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как локально $\mathcal{L}$ задается как поверхность $\varphi(r, t) = (r, t, 1, 0)$, имеем $d\xi^1 = 0$. Из конкретного вида связности (2) следует, что $D\xi^1 = d\xi^1 + \Gamma_{jk}^1 \xi^j dx^k = 0$. Из аналогичных соображений следует, что $\xi^2 = d\xi^2 = 0$ и $D\xi^2 = \Gamma_{12}^2 dx^2 = -dt$. Поэтому индуцированная метрика dq^2 имеет вид $dq^2 = dr^2 + 2e^{-2r} dt^2$. Лемма доказана.

Пусть (e_1, e_2, e_3) – локальный ортонормированный базис в точке (x, v) многообразия T_1P , причем e_1 – горизонтальный лифт v , e_2 – горизонтальный лифт $v^\perp$ ($v^\perp \perp v$), а e_3 – вертикальный лифт $v^\perp$. Напомним, что горизонтальный лифт вектора $Z = (Z^i)$ в точку (x, ξ) – это вектор $Z^H = (Z^i, -\Gamma_{jk}^i Z^j \xi^k)$, а вертикальный лифт – это вектор $Z^V = (0, 0, Z^i)$ ($i, j, k, l = 1, 2$). Определим теперь базис (e_1, e_2, e_3) в точке $(r, t, 1, 0)$:

$e_1 = (1, 0, 0, 0)$ – горизонтальный лифт вектора $\xi^1 = (1, 0)$;

$e_2 = (0, e^r, 0, e^r)$ – горизонтальный лифт вектора $\xi^2 = (0, e^r)$;

$e_3 = (0, 0, 0, e^r)$ – вертикальный лифт вектора $\xi^2 = (0, e^r)$.

Разложим векторы $\varphi_r = (1, 0, 0, 0)$ и $\varphi_t = (0, 1, 0, 0)$ по базису (e_1, e_2, e_3) : $\varphi_r = e_1$ и $\varphi_t = e^{-r}(e_2 - e_3)$. отождествив T_1P с расслоением реперов над P , можно показать, что структурные уравнения на T_1P имеют следующий вид:

$$d\Theta_1 = -\Theta_2 \wedge \Theta_3, \quad d\Theta_2 = \Theta_1 \wedge \Theta_3, \quad d\Theta_3 = \Theta_1 \wedge \Theta_2,$$

где $(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)$ – базис ковекторов, двойственный к (e_1, e_2, e_3) . С другой стороны, $d\Theta_i = -\sum_j \Theta_j \wedge w_{ij}$, где w_{ij} – компоненты формы метрической связности. Сравнивая эти системы, получим $w_{12} = \frac{3}{2}\Theta_3$, $w_{13} = \frac{1}{2}\Theta_2$, $w_{23} = -\frac{1}{2}\Theta_1$. Теперь, учитывая что рассматриваемое слоение определяется формой $\Theta_2 + \Theta_3$, нетрудно убедиться, что в базисе $(e_1, (e_2 - e_3)/\sqrt{2})$, касательном к слоению, вторая квадратичная форма слоения постоянна и имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда и следует утверждение.

Автор выражает благодарность профессору А. А. Борисенко за научное руководство, а также Ю. А. Николаевскому за полезные советы в ходе подготовки данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Asimov D. Average Gaussian curvature of leaves of foliations // Bull. Amer. Math. Soc. 1978. V. 84. P. 131–133.
- [2] Brito F., Langevin R., Rosenberg H. Intégrales de courbure sur des variétés feuilletées // J. Differential Geom. 1981. V. 16. P. 123–135.
- [3] Tondeur Ph. Foliations on Riemannian Manifolds. Universitext. New York: Springer, 1988.
- [4] Rosenberg R. Foliations by planes // Topology. 1968. V. 7. P. 131–138.
- [5] Cheeger J., Gromoll D. On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature // Ann. of Math. 1972. V. 96. P. 413–443.
- [6] Борисенко А. А. О цилиндрических многомерных поверхностях в пространстве Лобачевского // Укр. геом. сб. 1990. Т. 33. С. 18–27.
- [7] Аминов Ю. А. Геометрия векторного поля. М.: Наука, 1990.
- [8] Maltz R. The nullity spaces of the curvature operator // Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catégoriques. 1968. V. 8. P. 1–20.
- [9] Eberlein P. Euclidean de Ram factor of a lattice of nonpositive curvature // J. Differential Geom. 1983. V. 18. P. 209–220.
- [10] Johnson D., Witt L. Totally geodesic foliations // J. Differential Geom. 1980. V. 15. P. 225–235.