Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Б. Воробец, А. М. Степин, Изоспектральность и проективные геометрии Галуа, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 5, 660–664

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1331>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 13:26:04

УДК 517.9

ИЗОСПЕКТРАЛЬНОСТЬ И ПРОЕКТИВНЫЕ ГЕОМЕТРИИ ГАЛУА

Я. Б. Воробец, А. М. Стёпин

Предложена конструкция, приводящая к серии пар изоспектральных и неизометричных плоских областей и поверхностей с краем. Эта конструкция основана на существовании спектрально эквивалентных, но не изоморфных, конечных групп преобразований.

Библиография: 4 названия.

В известной работе 1966 г. М. Кац поставил следующий вопрос: влечет ли изоспектральность областей в $\mathbb{R}^2$ (т.е. совпадение спектров соответствующих операторов Лапласа) их изометричность. Л. Берс перефразировал вопрос популярно: можно ли услышать форму барабана? В 1992 г. К. Гордон, Д. Уэбб и С. Вольперт [1] дали отрицательный ответ на этот вопрос.

В настоящей работе указано на связь проблемы изоспектральности с конечными проективными геометриями и предложена конструкция, включающая пример из [1] в серию изоспектральных неизометричных областей (и многообразий с краем). Наша конструкция базируется на существовании спектрально эквивалентных, но несопряженных групп преобразований. Такие группы впервые рассматривались в алгебраической теории чисел. Связь этих групп с изоспектральными и неизометричными многообразиями впервые подметил Т. Сунада [2]. Доказательство изоспектральности в [2] было проинтерпретировано П. Бераром [3] как процедура *трансплантации* функций; это привело в [3] к обобщению конструкции Сунады на орбиобразия (*orbifolds*). Последнее позволило авторам упомянутой работы [1] сделать переход от многообразий к областям в $\mathbb{R}^2$.

Изложение начнем с простейшего, на наш взгляд, примера изоспектральных, но неконгруэнтных, областей на плоскости. Пусть T – остроугольный треугольник. Из четырнадцати экземпляров этого треугольника составим фигуры $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ так, как показано на рис. 1, 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. а) *Операторы Лапласа в областях $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ имеют одинаковый спектр как при краевых условиях Дирихле, так и при краевых условиях Неймана.*

б) *Если все углы треугольника T различны, то многоугольники $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ неконгруэнтны.*

Теперь опишем общую конструкцию, частным случаем которой является рассмотренный только что пример.

Работа выполнена при частичной поддержке объединенного проекта фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00043.

 Рис. 1. Многоугольник $F^{(1)}$

 Рис. 2. Многоугольник $F^{(2)}$

Пусть G – конечная группа, $g_1, \dots, g_k$ – ее образующие. *Базовой фигурой*, соответствующей этой системе образующих, назовем произвольную плоскую фигуру T , у которой имеется несколько прямолинейных сегментов границы, помеченных элементами $g_1, \dots, g_k$ и их обратными (если элемент g_i имеет порядок 2, то метки g_i и g_i^{-1} совпадают и относятся к одному и тому же сегменту). Указанные сегменты назовем *сторонами* фигуры T . Предполагается, что

- i) стороны, помеченные разными элементами группы, не перекрываются (могут иметь лишь общие концы);
- ii) стороны, помеченные взаимно обратными элементами (g_i и g_i^{-1}), имеют одинаковую длину;
- iii) все стороны каким-то образом ориентированы (независимо друг от друга).

Базовую фигуру можно представлять в виде многоугольника со срезанными углами. Объединение всех срезов, т.е. ту часть границы фигуры T , которая остается после выбрасывания всех сторон, назовем *свободной границей*.

Пусть, далее, $\varphi = \{\varphi_g\}_{g \in G}$ – действие группы G на множестве M . *Составной фигурой*, соответствующей действию φ и базовой фигуре T , называется фигура F , составленная из $n = \#M$ фигур T_m , $m \in M$, таким образом, что

- i) каждая из фигур T_m изометрична базовой фигуре T , с учетом меток и ориентации сторон;
- ii) разные фигуры не перекрываются, но могут иметь общие стороны, причем эти общие стороны ориентированы согласованно;
- iii) если $g \in \{g_1, \dots, g_k, g_1^{-1}, \dots, g_k^{-1}\}$, то сторона T_m с меткой g совпадает со стороной фигуры $T_{\varphi_g(m)}$, имеющей метку g^{-1} .

В дальнейшем рассматриваются только транзитивные действия φ ; соответствующие им составные фигуры являются связными.

Пусть, наконец, $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ – действия группы G на n -элементных множествах $M^{(1)}$ и $M^{(2)}$. Выберем произвольным образом базовую фигуру T и построим соответствующие составные фигуры $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$. Оказывается (и об этом говорится далее), что в случае спектральной эквивалентности действий $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ поверхности (с краем) $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ изоспектральны. Если $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ не сопряжены, то для типичной базовой фигуры T поверхности $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ неизометричны.

Пусть $A = (a(j_2, j_1))$ – произвольная матрица размера $n \times n$, строки которой индексированы элементами множества $M^{(2)}$, а столбцы – элементами множества $M^{(1)}$. Сопоставим этой матрице оператор трансплантации $U_A: L_2(F^{(1)}) \rightarrow L_2(F^{(2)})$ следующим образом.

Произвольная функция $f^{(i)}$ на $F^{(i)}$ может быть представлена как набор из n функций

$f_j^{(i)}$, $j \in M^{(i)}$, заданных на T , где функция $f_j^{(i)}$ отождествляется с ограничением функции $f^{(i)}$ на фигуру $T_j^{(i)}$. Зададим оператор $U_A: f^{(1)} = (f_j^{(1)})_{j \in M^{(1)}} \mapsto f^{(2)} = (f_j^{(2)})_{j \in M^{(2)}}$ формулой

$$f_{j_2}^{(2)} = \sum_{j_1 \in M^{(1)}} a(j_2, j_1) f_{j_1}^{(1)}.$$

Кроме того, рассмотрим оператор $u_A: \ell_2(M^{(1)}) \rightarrow \ell_2(M^{(2)})$, задаваемый матрицей A в базисе из δ -функций $\chi_j^{(i)}$ (т.е. индикаторов одноточечных множеств).

Прежде чем сформулировать условие, при котором U_A сплетает операторы Лапласа на $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$, введем одно ограничение на геометрию составных фигур. Скажем, что фигура $F^{(i)}$ *удовлетворяет условию* (*), если угловые точки (т.е. общие концы двух сторон) составляющих ее фигур $T_j^{(i)}$ не являются внутренними точками $F^{(i)}$. Если условие (*) не выполнено, можно добиться его выполнения путем изменения базовой фигуры – нужно срезать у последней один или несколько углов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть фигуры $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ удовлетворяют условию (*). Оператор трансплантации U_A сплетает операторы Лапласа с краевыми условиями Неймана в том и только том случае, когда оператор u_A сплетает естественные представления G в $\ell_2(M^{(1)})$ и $\ell_2(M^{(2)})$. В частности, спектральная эквивалентность действий $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ влечет совпадение спектров операторов Лапласа в $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$.

Имеется аналогичное утверждение и об операторах Лапласа с краевыми условиями Дирихле.

Кроме изоспектральности, от фигур $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ нам требуется также и неизометричность. Об этом нужно специально позаботиться, так как даже для несопряженных действий $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ при неудачном выборе базовой фигуры может оказаться, что составные фигуры изометричны. Сформулируем здесь следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для любой конечной группы G с выделенными образующими можно в качестве базовой фигуры выбрать такую плоскую область с кусочно-гладкой границей, что

- i) составная фигура, построенная по этой базовой фигуре и произвольному действию группы G , удовлетворяет условию (*);
- ii) составные фигуры, построенные по несопряженным действиям, неизометричны.

Таким образом, задача поиска изоспектральных и неизометричных областей сводится к нахождению конечных групп, обладающих парой спектрально эквивалентных и несопряженных действий. Основным источником таких действий для нас будут конечные проективные геометрии (точнее, геометрии Галуа).

Рассмотрим произвольную геометрию Галуа, т.е. конечномерное проективное пространство $M^{(1)}$ над конечным полем. Пусть $M^{(2)}$ – множество ее гиперплоскостей (прямых в случае проективной плоскости). Обозначим через G группу проективных преобразований рассматриваемой геометрии. Пусть $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ – естественные действия группы G на множествах $M^{(1)}$ и $M^{(2)}$ соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Действия $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ спектрально эквивалентны, но не сопряжены.

Итак, теперь остается выбрать образующие группы G , и можно получать примеры

изоспектральных и неизометричных плоских поверхностей с краем (в частности, областей в $\mathbb{R}^2$). Отметим, что образующие можно выбирать многими способами и это приводит к различным примерам.

ТЕОРЕМА 1. *Существует бесконечная серия пар изоспектральных и неизометричных двумерных многообразий с краем, имеющих плоскую метрику.*

Это утверждение требует пояснения. Очевидно, достаточно лишь одной пары спектрально эквивалентных и несопряженных действий конечной группы, чтобы получить семейство пар изоспектральных и неизометричных поверхностей, которые получаются друг из друга деформацией базовой фигуры. Теорема утверждает существование бесконечного числа пар, ни одна из которых не может быть сведена к другой посредством такой деформации.

Теперь опишем ряд модификаций изложенной выше конструкции изоспектральных областей и поверхностей, которые позволяют обобщить теорему 1 в различных направлениях. Во-первых, можно перейти от двумерных фигур к многомерным. Далее, евклидову метрику можно заменить на произвольную риманову метрику. В качестве базовой фигуры теперь может выступать конечномерное риманово многообразие с краем, а роль сторон или граней играют неперекрывающиеся гладкие куски границы базовой фигуры. Сборка составного многообразия с краем из отдельных копий базовой фигуры производится посредством отображений $\psi_1, \dots, \psi_k$, где ψ_i – изометрия грани базовой фигуры с меткой g_i на грань, имеющую метку g_i^{-1} . Гладкость метрики на составной фигуре обеспечивается дополнительным условием на базовую фигуру. Еще одна модификация связана с пересмотром краевых условий. Если изменить их согласованно на свободной границе, то предложение 2 будет по-прежнему верно. В результате оператор трансплантации, сплетающий операторы Лапласа с краевыми условиями Неймана, заданные на составных многообразиях с непустой свободной границей, сплетает также и целое семейство пар операторов Лапласа на этих многообразиях со смешанными (частично Неймана, частично Дирихле) краевыми условиями.

Наконец, последнее усовершенствование относится к *кратности изоспектральности*, т.е. к вопросу о возможном числе попарно неизометричных изоспектральных многообразий. Применяя нашу основную конструкцию (в модифицированном виде) к всевозможным тензорным произведениям спектрально эквивалентных, но не сопряженных действий группы G , получим набор попарно неизометричных изоспектральных областей или многообразий с краем.

Один из способов подытожить эти наблюдения таков.

ТЕОРЕМА 2. *Для любых целых чисел $l, n \geq 2$ и любого действительного числа R существует бесконечная серия наборов из l изоспектральных и попарно неизометричных n -мерных многообразий с краем, с римановой метрикой постоянной кривизны R .*

Теперь приведем ряд найденных нами примеров спектрально эквивалентных и несопряженных действий. В каждом из них действует группа проективных преобразований конечной геометрии, имеющая три инволютивных образующие a, b, c . Перестановки a_1, b_1, c_1 задают действие этих образующих на точках проективной геометрии, а перестановки a_2, b_2, c_2 – их действие на прямых (соответственно на плоскостях в случае геометрии порядка 15). Пример 1) был рассмотрен в предложении 1, пример 2) был найден в [1].

$$1) a_1 = (1, 2)(4, 7), b_1 = (1, 6)(2, 5), c_1 = (1, 4)(3, 6); a_2 = b_1, b_2 = a_1, c_2 = c_1;$$

$$2) a_1 = (1, 5)(3, 7), b_1 = (1, 2)(5, 6), c_1 = (1, 4)(3, 6); a_2 = (4, 5)(6, 7), b_2 = b_1, c_2 = c_1;$$

- 3) $a_1 = (2, 6)(3, 7)$, $b_1 = (1, 2)(5, 6)$, $c_1 = (1, 4)(3, 6)$; $a_2 = (4, 6)(5, 7)$, $b_2 = b_1$, $c_2 = c_1$;
- 4) $a_1 = (1, 8)(2, 6)(3, 13)(7, 11)$, $b_1 = (1, 5)(3, 8)(4, 11)(10, 13)$, $c_1 = (6, 7)(8, 11)(9, 13)(10, 12)$; $a_2 = (1, 2)(5, 13)(6, 10)(8, 12)$, $b_2 = b_1$, $c_2 = c_1$;
- 5) $a_1 = (1, 8)(2, 7)(4, 12)(6, 11)$, $b_1 = (1, 5)(3, 8)(4, 11)(10, 13)$, $c_1 = (6, 7)(8, 11)(9, 13)(10, 12)$; $a_2 = (1, 2)(5, 12)(7, 9)(8, 13)$, $b_2 = b_1$, $c_2 = c_1$;
- 6) $a_1 = (1, 8)(2, 13)(3, 6)(5, 12)$, $b_1 = (1, 5)(3, 8)(4, 11)(10, 13)$, $c_1 = (6, 7)(8, 11)(9, 13)(10, 12)$; $a_2 = (1, 8)(2, 12)(4, 7)(5, 13)$, $b_2 = b_1$, $c_2 = c_1$;
- 7) $a_1 = (1, 9)(2, 5)(4, 13)(7, 12)$, $b_1 = (1, 5)(3, 8)(4, 11)(10, 13)$, $c_1 = (6, 7)(8, 11)(9, 13)(10, 12)$; $a_2 = (2, 7)(3, 6)(4, 5)(8, 9)$, $b_2 = b_1$, $c_2 = c_1$;
- 8) $a_1 = (1, 13)(2, 8)(3, 6)(7, 9)$, $b_1 = (1, 5)(3, 8)(4, 11)(10, 13)$, $c_1 = (6, 7)(8, 11)(9, 13)(10, 12)$; $a_2 = (2, 4)(5, 13)(6, 11)(7, 12)$, $b_2 = b_1$, $c_2 = c_1$;
- 9) $a_1 = (3, 4)(5, 8)(6, 9)(7, 10)$, $b_1 = (1, 8)(2, 6)(3, 13)(7, 11)$, $c_1 = (6, 7)(8, 11)(9, 13)(10, 12)$; $a_2 = (2, 11)(3, 12)(4, 13)(9, 10)$, $b_2 = (1, 2)(5, 13)(6, 10)(8, 12)$, $c_2 = c_1$;
- 10) $a_1 = (3, 4)(5, 11)(6, 12)(7, 13)$, $b_1 = (1, 8)(2, 6)(3, 13)(7, 11)$, $c_1 = (6, 7)(8, 11)(9, 13)(10, 12)$; $a_2 = (2, 8)(3, 10)(4, 9)(12, 13)$, $b_2 = (1, 2)(5, 13)(6, 10)(8, 12)$, $c_2 = c_1$;
- 11) $a_1 = (1, 9)(3, 12)(4, 6)(5, 11)$, $b_1 = (1, 8)(2, 6)(3, 13)(7, 11)$, $c_1 = (6, 7)(8, 11)(9, 13)(10, 12)$; $a_2 = (2, 9)(3, 10)(4, 8)(5, 7)$, $b_2 = (1, 2)(5, 13)(6, 10)(8, 12)$, $c_2 = c_1$;
- 12) $a_1 = (1, 13)(3, 10)(4, 7)(5, 8)$, $b_1 = (1, 8)(2, 6)(3, 13)(7, 11)$, $c_1 = (6, 7)(8, 11)(9, 13)(10, 12)$; $a_2 = (2, 13)(3, 12)(4, 11)(5, 6)$, $b_2 = (1, 2)(5, 13)(6, 10)(8, 12)$, $c_2 = c_1$;
- 13) $a_1 = (1, 10)(3, 8)(4, 15)(6, 13)$, $b_1 = (1, 4)(3, 6)(9, 12)(11, 14)$, $c_1 = (1, 8)(2, 4)(3, 12)(5, 10)(7, 14)(11, 13)$; $a_2 = (1, 12)(2, 15)(5, 8)(6, 11)$, $b_2 = b_1$, $c_2 = c_1$;
- 14) $a_1 = (1, 6)(2, 5)(8, 15)(11, 12)$, $b_1 = (1, 4)(3, 6)(9, 12)(11, 14)$, $c_1 = (1, 8)(2, 4)(3, 12)(5, 10)(7, 14)(11, 13)$; $a_2 = (1, 10)(2, 9)(4, 15)(7, 12)$, $b_2 = b_1$, $c_2 = c_1$;
- 15) $a_1 = (1, 2)(5, 6)(8, 11)(12, 15)$, $b_1 = (1, 12)(3, 14)(4, 9)(6, 11)$, $c_1 = (1, 8)(2, 4)(3, 12)(5, 10)(7, 14)(11, 13)$; $a_2 = (1, 10)(2, 9)(5, 14)(6, 13)$, $b_2 = (1, 4)(3, 6)(8, 13)(10, 15)$, $c_2 = c_1$;
- 16) $a_1 = (1, 13)(3, 15)(4, 8)(6, 10)$, $b_1 = (1, 12)(3, 14)(4, 9)(6, 11)$, $c_1 = (1, 8)(2, 4)(3, 12)(5, 10)(7, 14)(11, 13)$; $a_2 = (4, 9)(5, 8)(6, 11)(7, 10)$, $b_2 = (1, 4)(3, 6)(8, 13)(10, 15)$, $c_2 = c_1$.

Каждый из примеров 1)–16) позволяет получить пару многоугольников на плоскости Евклида или Лобачевского, которые изоспектральны, но не изометричны. Более того, если в качестве базовой фигуры взять треугольник на плоскости Лобачевского с достаточно малыми углами, можно добиться, чтобы эти многоугольники были выпуклыми (для примера 2) на это указали Гордон и Уэбб [4]).

Основная для наших целей – связь изоспектральности с конечными геометриями – была обнаружена авторами весной 1996 г. и доложена в январе 1997 г. на семинаре К. Шмидта в институте Шрёдингера.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gordon C., Webb D., Wolpert S. Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds // *Invent. Math.* 1992. V. 110. № 1. P. 1–22.
- [2] Sunada T. Riemannian coverings and isospectral manifolds // *Ann. of Math.* (2). 1985. V. 121. P. 169–186.
- [3] Berard P. Transplantation et isospectralité. I // *Math. Ann.* 1992. V. 292. № 3. P. 547–560.
- [4] Gordon C.S., Webb D.L. Isospectral convex domains in the hyperbolic plane // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1994. V. 120. № 3. P. 981–983.