Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Годуля, В. В. Старков, О точности некоторых оценок
Кэмпбелла и Поммеренке, *Матем. заметки*, 1998, том 63,
выпуск 5, 665–672

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1332>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 17:50:52

УДК 517.54

О ТОЧНОСТИ НЕКОТОРЫХ ОЦЕНОК КЭМПБЕЛЛА И ПОММЕРЕНКЕ

Я. Годуля, В. В. Старков

Статья посвящена вопросам точности некоторых известных оценок в универсальных линейно-инвариантных семействах $\mathcal{U}_\alpha$ регулярных функций. В статье установлено, что полученная в 1964 г. Поммеренке оценка $|\arg f'(z)|$, $z \in \Delta = \{z : |z| < 1\}$, является точной; указана экстремальная функция. В $\mathcal{U}_\alpha$ получена нижняя оценка производной Шварца. Для $f \in \mathcal{U}_\alpha$ получена точная оценка порядка функции $f_r(z) = f(rz)/r$, $r \in (0, 1)$; эта оценка используется далее при решении других задач.

Библиография: 13 названий.

Эта статья возникла в ходе нашей работы над обзором “Линейно-инвариантные семейства функций” и посвящена вопросам точности некоторых известных оценок в линейно-инвариантных семействах регулярных функций.

В [1] Ч. Поммеренке ввел понятие линейно-инвариантного семейства регулярных в круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ функций. Множество $\mathfrak{M}$ регулярных в Δ функций $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(f)z^n$ называется *линейно-инвариантным семейством*, если для любой функции $f \in \mathfrak{M}$ выполнены условия:

- 1) $f'(z) \neq 0$ в Δ (локальная конформность);
- 2) для любого конформного автоморфизма $\varphi(z)$ круга Δ функция

$$\Lambda_\varphi[f(z)] = \frac{f(\varphi(z)) - f(\varphi(0))}{f'(\varphi(0))\varphi'(0)} = z + \dots \in \mathfrak{M}.$$

Для локально однолистной в Δ функции f обозначим

$$\mathfrak{M}[f] = \{\Lambda_\varphi[f] : \varphi - \text{любой конформный автоморфизм } \Delta\}, \quad \text{ord } f = \text{ord } \mathfrak{M}[f].$$

Известно [1, с.115], что

$$\text{ord } f = \sup_{z \in \Delta} \left| -\bar{z} + \frac{1 - |z|^2}{2} \frac{f''(z)}{f'(z)} \right|.$$

Порядком линейно-инвариантного семейства $\mathfrak{M}$ в [1] называется $\sup_{f \in \mathfrak{M}} |a_2(f)|$. Универсальным линейно-инвариантным семейством $\mathcal{U}_\alpha$ Поммеренке называл объединение всех линейно-инвариантных семейств $\mathfrak{M}$ таких, что $\text{ord } \mathfrak{M} \leq \alpha$, $\alpha \geq 1$, иначе $\mathcal{U}_\alpha = \emptyset$. Многие известные классы конформных отображений являются линейно-инвариантными семействами. Например, класс выпуклых функций $K = \mathcal{U}_1$, класс S однолистных и регулярных в Δ функций, $\text{ord } S = 2$.

1. Теорема вращения. Важнейшим из рассматриваемых в этой статье вопросов является вопрос о точности оценки в теореме вращения в $\mathcal{U}_\alpha$. Пусть $x, q \in [0, 1)$. Обозначим

$$\Xi(x, q) = \int_0^x \frac{\sqrt{1 - q^2 \xi^2}}{1 - \xi^2} d\xi = q \arcsin x + \frac{1}{2} \sqrt{1 - q^2} \log \frac{\sqrt{1 - q^2 x^2} + x \sqrt{1 - q^2}}{\sqrt{1 - q^2 x^2} - x \sqrt{1 - q^2}}.$$

В предположении, что $\arg f'(z)$ непрерывен по $z \in \Delta$ и $\arg f'(0) = 0$, Поммеренке [1, с.126] в 1964 г. получил оценку $|\arg f'(z)|$ в $\mathcal{U}_\alpha$.

ТЕОРЕМА А (вращения). Для каждой функции $f \in \mathcal{U}_\alpha$ и любого $z \in \Delta$ справедливо неравенство

$$|\arg f'(z)| \leq 2\alpha \Xi\left(|z|, \frac{1}{\alpha}\right) \leq \sqrt{\alpha^2 - 1} \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|} + 2 \arcsin |z| \quad (1)$$

(последнее неравенство строгое, если $z \neq 0$). При этом для любого $z \in \Delta$ существует $f \in \mathcal{U}_\alpha$, для которой

$$\sqrt{\alpha^2 - 1} \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \leq |\arg f'(z)|. \quad (2)$$

Вопрос о точности оценки (1) оставался открытым. В 1973 г. Д. М. Кэмпбелл и М. Р. Циглер в [2] исследовали свойства функции

$$G(r, \mathfrak{M}) = G(r) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \max_{|z|=r} \arg f'(z), \quad (3)$$

где $\mathfrak{M}$ – линейно-инвариантное семейство. Рассматривая случай $\mathfrak{M} = \mathcal{U}_\alpha$, они привели пример функции $f \in \mathcal{U}_\alpha$, для которой неравенство (2) является строгим при $0 < |z| < 1/\alpha$. Таким образом, они получили уточнение теоремы А для $0 < |z| < 1/\alpha$:

$$\sqrt{\alpha^2 - 1} \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|} < G(r, \mathcal{U}_\alpha) \leq 2\alpha \Xi\left(|z|, \frac{1}{\alpha}\right).$$

Вопросу точности оценки $|\arg f'(z)|$ в $\mathcal{U}_\alpha$, в частности, посвящена работа Кэмпбелла и Пфальцграфа [3].

Мы доказываем точность левого неравенства в (1), указываем экстремальную функцию.

В [4] (см. также [5]) было введено линейно-инвариантное семейство $\mathcal{U}'_\alpha \subset \mathcal{U}_\alpha$ ($\alpha \geq 1$), $\text{ord } \mathcal{U}'_\alpha = \alpha$. Имеем

$$f \in \mathcal{U}'_\alpha \iff f'(z) = \exp\left(-2 \int_0^{2\pi} \log(1 - ze^{-it}) d\mu(t)\right),$$

где $\mu(t)$ – любая комплекснозначная функция ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$, удовлетворяющая неравенству

$$\left| \int_0^{2\pi} d\mu(t) - 1 \right| + \int_0^{2\pi} |d\mu(t)| \leq \alpha.$$

Класс $\mathcal{U}'_\alpha$ компактен в топологии равномерной сходимости внутри Δ , он естественным образом возникает в задаче об аппроксимации производной функции $f \in \mathcal{U}_\alpha$ степенями производных выпуклых функций. Можно ожидать, что многие экстремальные функции в $\mathcal{U}'_\alpha$ являются экстремальными и в $\mathcal{U}_\alpha$. В частности, в [6] доказано, что

$$\max_{f \in \mathcal{U}'_\alpha} |a_3| = \frac{\alpha(\alpha + \sqrt{\alpha^3 + 3})}{3}. \quad (4)$$

Это опровергает гипотезу Кэмпбелла, Цима, Пфальцграффа [7] о том, что максимум в (4) равен $(2\alpha^2 + 1)/3$, причем экстремальной в (4) является функция

$$h(z) = h(z, t, x) = \frac{1}{i\sqrt{\alpha^2 - 1}(e^{-ix} - e^{-it})} \left(\left(\frac{1 + ze^{-ix}}{1 + ze^{-it}} \right)^{i\sqrt{\alpha^2 - 1}} - 1 \right), \quad (5)$$

где x, t определены в [6]. Функция вида (5) является экстремальной и в других задачах в $\mathcal{U}'_\alpha$ (см., например, [8], [9]). Строго говоря, нам не удалось с помощью вариационного метода, разработанного в [4], [5], показать, что в задаче (3) с $\mathfrak{M} = \mathcal{U}'_\alpha$ экстремальной будет функция вида (5). Однако, применение этого вариационного метода и геометрических соображений приводит к естественному предположению, что экстремальная функция в (3) (с $\mathfrak{M} = \mathcal{U}'_\alpha$) имеет вид (5).

Покажем, что при $\alpha > 1$ и $r \in [0, 1)$

$$\max_{t, x \in \mathbb{R}} \arg h'(r) = 2\alpha \Xi \left(r, \frac{1}{\alpha} \right).$$

Тем самым, будет доказана точность оценки в теореме А для всех $r \in [0, 1)$. Экстремальная функция будет иметь вид (5) (экстремальные значения t_0 и x_0 укажем ниже)

$$\arg h'(r) = -\arg \overline{h'(r)} = -\arg \frac{1}{(1 + re^{ix})^{1+i\sqrt{\alpha^2-1}}(1 + re^{it})^{1-i\sqrt{\alpha^2-1}}} = \varphi(x) + \psi(t),$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sqrt{\alpha^2 - 1} \log |1 + re^{ix}| + \arg(1 + re^{ix}), \\ \psi(t) &= -\sqrt{\alpha^2 - 1} \log |1 + re^{it}| + \arg(1 + re^{it}). \end{aligned}$$

Вычисления показывают, что

$$\max_{x \in [0, 2\pi]} \varphi(x) = \varphi(x_0), \quad \text{где } x_0 = \arcsin \frac{1}{\alpha} + \arcsin \frac{r}{\alpha}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |1 + re^{ix_0}| &= \frac{\sqrt{\alpha^2 - r^2} + r\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha}, \\ \arg(1 + re^{ix_0}) &= \arcsin \frac{r \sin x_0}{\sqrt{1 + r^2 + 2r \cos x_0}} = \arcsin \frac{r}{\alpha}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\varphi(x_0) = \sqrt{\alpha^2 - 1} \log \frac{\sqrt{\alpha^2 - r^2} + r\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha} + \arcsin \frac{r}{\alpha}.$$

Аналогично, $\max_{t \in [0, 2\pi]} \psi(t) = \psi(t_0)$, где $t_0 = \pi - \arcsin(1/\alpha) + \arcsin(r/\alpha)$. Тогда

$$|1 + re^{it_0}| = \frac{\sqrt{\alpha^2 - r^2} - r\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha},$$

$$\arg(1 + re^{it_0}) = \arcsin \frac{r \sin t_0}{\sqrt{1 + r^2 + 2r \cos t_0}} = \arcsin \frac{r}{\alpha}$$

и

$$\psi(t_0) = -\sqrt{\alpha^2 - 1} \log \frac{\sqrt{\alpha^2 - r^2} - r\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha} + \arcsin \frac{r}{\alpha}.$$

Следовательно,

$$\max_{t, x \in \mathbb{R}} \arg h'(r) = \sqrt{\alpha^2 - 1} \log \frac{\sqrt{\alpha^2 - r^2} + r\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\sqrt{\alpha^2 - r^2} - r\sqrt{\alpha^2 - 1}} + 2 \arcsin \frac{r}{\alpha} = 2\alpha \Xi \left(r, \frac{1}{\alpha} \right).$$

Точность оценки в теореме А доказана.

Поскольку $S \subset \mathcal{U}_2$, естественно сравнить $G(r, S)$ с $G(r, \mathcal{U}_2)$. В [10, с. 114] доказано, что

$$G(r, S) = \begin{cases} 4 \arcsin r & \text{для } r \in [0, 1/\sqrt{2}], \\ \pi + \log \frac{r^2}{1 - r^2} & \text{для } r \in [1/\sqrt{2}, 1). \end{cases}$$

Таким образом, $G(r, S) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} G(r, \mathcal{U}_2)$, однако $G(r, \mathcal{U}_2) \underset{r \rightarrow 1-}{\sim} \sqrt{3}G(r, S)$, т.е. существенное отличие проявляется при больших r .

В [11] высказана гипотеза, что функция (5), дающая максимум $|a_3|$ в $\mathcal{U}'_\alpha$, является экстремальной и в $\mathcal{U}_\alpha$. Естественно предположить, что $\max_{f \in \mathcal{U}_\alpha} |a_n|$ достигается для функции $f \in \mathcal{U}'_\alpha$, которой в интегральном представлении соответствует кусочно постоянная функция $\mu(t)$, имеющая в точности $n - 1$ разрывов (в [6] доказано, что в задаче о $\max_{f \in \mathcal{U}'_\alpha} |a_n|$ есть экстремальная функция, которой в интегральном представлении соответствует кусочно постоянная $\mu(t)$ с не более чем $n - 1$ разрывами).

2. Оценка производной Шварца. Поскольку и

$$\sup_{z \in \Delta} \left| \frac{1 - |z|^2}{2} \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| - \bar{z} \right| = \text{ord } f,$$

и

$$\sup_{z \in \Delta} ((1 - |z|^2)^2 \{f(z), z\}) = \sigma_f,$$

где

$$\{f(z), z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2$$

— производная Шварца, являются инвариантами относительно преобразования $f \mapsto \Lambda_\varphi[f]$, то интересно выявить соотношение между ними. Для $f \in \mathcal{U}_\alpha$ Поммеренке [1] получил точную оценку

$$\alpha \leq \sqrt{1 + \frac{\sigma_f}{2}}. \quad (6)$$

Обозначим $\sigma = \sigma(\alpha) = \sup_{f \in \mathcal{U}_\alpha} \sigma_f$. Интересно, что неравенство между α и σ незначительно трансформируется по сравнению с (6).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $\alpha \leq \sqrt{\sigma(\alpha)/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f \in \mathcal{U}_\alpha$, $\zeta = \varphi(z)$ – конформный автоморфизм Δ и $g(z) = \Lambda_\varphi[f(z)]$, то

$$(1 - |\zeta|^2)^2 |\{f(\zeta), \zeta\}| = (1 - |z|^2)^2 |\{g(z), z\}| \leq \sigma.$$

Отсюда при $z = 0$ получаем

$$\left| \frac{g'''(0)}{g'(0)} - \frac{3}{2} \left(\frac{g''(0)}{g'(0)} \right)^2 \right| \leq \sigma \iff 6|a_3 - a_2^2| \leq \sigma, \quad (7)$$

где $g(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \in \mathcal{U}_\alpha$. В [8] найден $\max_{g \in \mathcal{U}'_\alpha} |a_3 - \lambda a_2^2|$ для $\lambda \in \mathbb{R}$. В частности,

$$\max_{g \in \mathcal{U}'_\alpha} |a_3 - a_2^2| = \frac{\alpha^2}{3}.$$

Экстремальную функцию в этой задаче подставим в (7), получим $2\alpha^2 \leq \sigma$.

Это доказывает наше предложение.

3. Оценка $\text{ord } f_r$ и $\mathcal{U}_\beta$ -радиуса. Для $r \in (0, 1]$ преобразование $f(z) \mapsto f(rz)/r = f_r(z)$ называется *преобразованием сжатия*. В некоторых задачах в $\mathcal{U}_\alpha$ важно знать, как зависит $\text{ord } f_r$ от r и $\alpha = \text{ord } f$.

ТЕОРЕМА Б [12]. Если $\text{ord } f = \alpha$, то $\text{ord } f_r$ — непрерывно возрастающая функция на $(0, 1]$. Более того, $\text{ord } f_r$ строго возрастает при r , больших радиуса выпуклости функции f и

$$\text{ord } f_r \leq (\alpha - 1)r + 1. \quad (8)$$

Отсюда, в частности, следует инвариантность $\mathcal{U}_\alpha$ относительно преобразования сжатия.

Мы улучшаем неравенство (8), получая точную оценку

$$\begin{cases} \text{ord } f_r = 1 & \text{при } r \in (0, \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}], \\ \frac{1}{2} \left(\tau + \frac{1}{\tau} \right) & \text{при } r \in [\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}, 1], \end{cases} \quad (9)$$

где $\tau = r(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВА (9). В [1, с. 133] доказано, что радиус выпуклости $\mathcal{U}_\alpha$ равен $\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}$. Поэтому при $r \in (0, \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}]$ функции $f_r(z) \in K = \mathcal{U}_1$. Следовательно, при этих r $\text{ord } f_r = 1$; это доказывает первую часть (9). Пусть теперь $r \in (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}, 1]$. Имеем

$$\begin{aligned} \text{ord } f_r &= \sup_{z \in \Delta} \left| -\bar{z} + \frac{1 - |z|^2}{2} \frac{f''(rz)}{f'(rz)} r \right| \\ &= \sup_{z \in \Delta} \left| r \frac{1 - |z|^2}{1 - r^2|z|^2} \left(-r\bar{z} + \frac{1 - r^2|z|^2}{2} \frac{f''(rz)}{f'(rz)} \right) - \bar{z} \left(1 - r^2 \frac{1 - |z|^2}{1 - r^2|z|^2} \right) \right| \\ &\leq \sup_{x \in [0, 1)} V(x), \quad \text{где } V(x) = \frac{\alpha r(1 - x^2) + x(1 - r^2)}{1 - r^2 x^2}. \end{aligned}$$

Так как

$$V'(x) = (1 - r^2) \frac{1 - 2\alpha r x + r^2 x^2}{(1 - r^2 x^2)^2},$$

то

$$\sup_{x \in [0,1]} V(x) = V\left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(r(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) + \frac{1}{r(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})} \right).$$

В заключении доказательства заметим, что равенство в (9) достигается для функции

$$f_0(z) = \frac{1}{2\alpha} \left(\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^\alpha - 1 \right).$$

По аналогии с радиусами однолистности и выпуклости Кэмпбелл [12] ввел понятие $\mathcal{U}_\beta$ -радиуса $\mathcal{R}(\beta)$ компактного семейства $\mathfrak{M}$:

$$\mathcal{R}(\beta) = \max \left\{ \rho : \frac{f(\rho z)}{\rho} \in \mathcal{U}_\beta \quad \forall f \in \mathfrak{M} \right\}.$$

Если $\beta \geq \alpha$, то $\mathcal{U}_\beta \supset \mathcal{U}_\alpha$. Поэтому $\mathcal{U}_\beta$ -радиус семейства $\mathcal{U}_\alpha$ равен 1, и интерес представляет только случай $\beta < \alpha$. $\mathcal{U}_1$ -радиус семейства $\mathcal{U}_\alpha$ является радиусом выпуклости $\mathcal{U}_\alpha$ (см. [1, с. 133]). В [12] доказано, что при $\beta \leq \alpha$ $\mathcal{U}_\beta$ -радиус семейства $\mathcal{U}_\alpha$ удовлетворяет неравенствам

$$\max \left\{ \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}, \frac{\beta - 1}{\alpha - 1} \right\} \leq \mathcal{R}(\beta) \leq (\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}).$$

Мы уточняем этот результат с помощью неравенства (9).

ТЕОРЕМА. При $1 \leq \beta \leq \alpha$ $\mathcal{U}_\beta$ -радиус семейства $\mathcal{U}_\alpha$ равен

$$\mathcal{R}(\beta) = (\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $1 \leq \beta \leq \alpha$, то $\max_{f \in \mathcal{U}_\alpha} \text{ord } f_{\mathcal{R}(\beta)} = \beta$. Из точности неравенства (9) следует также, что $\max_{f \in \mathcal{U}_\alpha} \text{ord } f_{\mathcal{R}(\beta)} = \frac{1}{2}(\tau + 1/\tau)$, где

$$\tau = \mathcal{R}(\beta)(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) \geq \mathcal{R}_1(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) = 1.$$

Поэтому $\mathcal{R}(\beta)$ удовлетворяет уравнению $\beta = \frac{1}{2}(\tau + 1/\tau)$, $\tau \geq 1$. Отсюда находим $\tau = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}$. Следовательно, $\mathcal{R}(\beta) = (\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1})$.

Теорема доказана.

Обозначим $r_u(\alpha)$ радиус однолистности $\mathcal{U}_\alpha$, т.е.

$$r_u(\alpha) = \max \left\{ \rho : \frac{f(\rho z)}{\rho} \in S \quad \forall f \in \mathcal{U}_\alpha \right\}.$$

Если ζ_0 – решение уравнения $\Xi(\zeta_0, 1/\alpha) = \pi/\alpha$, $\zeta_1 = \zeta_0/(1 + \sqrt{1 - \zeta_0^2})$, то (см. [1, с. 135])

$$\zeta_1 \leq r_u(\alpha) \leq \text{th} \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}}, \quad r_u(\alpha) = \frac{\pi}{2\alpha} + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Из доказанной теоремы получается качественный результат о $r_u(\alpha)$.

СЛЕДСТВИЕ. Обозначим $\rho(\alpha) = (\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})r_u(\alpha)$. Функция $\rho(\alpha)$ возрастает по $\alpha \in [1, \infty)$, $\rho(1) = 1$, $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \rho(\alpha) = \pi$.

Действительно, если $1 \leq \beta \leq \alpha$ и $f \in \mathcal{U}_\alpha$, то

$$\frac{f(\mathcal{R}(\beta)r_u(\beta)z)}{\mathcal{R}(\beta)r_u(\beta)} \in S.$$

Следовательно, $\mathcal{R}(\beta)r_u(\beta) \leq r_u(\alpha)$. Поэтому $(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1})r_u(\beta) \leq (\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})r_u(\alpha)$. При $\alpha = 1$ $r_u(1) = 1$ и $\rho(1) = 1$. Поскольку $S \subset \mathcal{U}_2$, имеем

$$\mathcal{R}_2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}} \geq r_u(\alpha).$$

Следовательно, функция $\rho(\alpha)$ ограничена и имеет конечный предел $c = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \rho(\alpha)$. Тогда при $\alpha \rightarrow \infty$

$$r_u(\alpha) = \frac{c + o(1)}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}} = \frac{c}{2\alpha} + o\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Сравнивая это равенство с (10), находим $c = \pi$. Заметим, что функция $\rho(\alpha)$ останется возрастающей, если в ее определении заменить $r_u(\alpha)$, например, на радиус звездообразности $r_*(\alpha)$. Но в этом случае предел $c_* \geq 2$, поскольку $r_*(\alpha) \geq \frac{1}{\alpha}$ (см. [1, с. 134]). Можно показать, что $c_* > 2.04$.

4. Локально однолистные функции с локально однолиственными производными. Пусть $\mathfrak{C}$ – некоторый класс конформных в Δ отображений $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$. Обозначим через $\mathcal{T}(\mathfrak{C})$ (см. [13]) множество всех функций $f \in \mathfrak{C}$ таких, что для всех натуральных n $f^{(n)}(z) \neq 0$ и $(f^{(n)}(z) - f^{(n)}(0)) / f^{(n+1)}(0) \in \mathfrak{C}$, $A(\mathfrak{C}) = \sup\{|a_2| : f \in \mathcal{T}(\mathfrak{C})\}$. В [13] доказано, что $\pi/2 \leq A(S) < 1.7208$, $1/2 \leq A(\mathcal{U}_1) < 0.68379$. В [12] получено неравенство

$$\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}}{2} \leq A(\mathcal{U}_\alpha) = A_\alpha \leq \alpha. \quad (11)$$

Мы покажем, что в правой части (11) неравенство строгое для всех $\alpha \geq 1$. Действительно, в противном случае существует функция $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{T}(\mathcal{U}_\alpha)$, для которой $a_2 = A(\alpha) = \alpha$, так как $\mathcal{T}(\mathcal{U}_\alpha)$ компактен в топологии равномерной сходимости внутри Δ . Поэтому

$$\alpha = \frac{1}{2} f''(0) \leq \sup_{z \in \Delta} \left| -\bar{z} + \frac{1 - |z|^2}{2} \frac{f''(0)}{f'(0)} \right| \leq \alpha.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dr} \operatorname{Re} \left(-r + \frac{1 - r^2}{2} \frac{f''(r)}{f'(r)} \right) \Big|_{r=0} = 0 \iff \operatorname{Re} f'''(0) = 2 + (f''(0))^2$$

и

$$\operatorname{Re} a_3 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} a_2^2. \quad (12)$$

С другой стороны,

$$\operatorname{ord} \frac{f^{(n)}(z) - f^{(n)}(0)}{f^{(n+1)}(0)} \leq \alpha,$$

т.е.

$$\sup_{z \in \Delta} \left| -\bar{z} + \frac{1 - |z|^2}{2} \frac{f^{(n+2)}(z)}{f^{(n+1)}(z)} \right| \leq \alpha = a_2.$$

В частности, при $n = 1$ отсюда следует, что $|f'''(0)| \leq 2\alpha f''(0)$, и $|a_3| \leq \frac{2}{3}a_2^2$, что противоречит (12).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Pommerenke Ch. Linear-invariante Familien analytischer Funktionen. I // *Math. Ann.* 1964. V. 155. P. 108–154.
- [2] Campbell D. M., Ziegler M. R. The argument of derivative linear-invariant families of finite order and the radius of close-to-convexity // *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska. Sect. A.* 1976. V. 28. P. 5–22.
- [3] Campbell D. M., Pfaltzgraff J. A. Boundary behaviour and linear invariant families // *J. Anal. Math.* 1976. V. 29. P. 67–92.
- [4] Старков В. В. О некоторых подклассах линейно-инвариантных семейств, имеющих интегральное представление // *Деп. ВИНТИ № 3341-81.* М.: ВИНТИ 1981.
- [5] Старков В. В. О некоторых линейно-инвариантных семействах функций, имеющих интегральное представление // *Изв. вузов. Матем.* 1983. № 5. С. 82–85.
- [6] Старков В. В. К оценке коэффициентов в классе U'_α локально однолистных функций // *Вестн. ЛГУ. Матем., мех., астроном.* 1984. № 13. С. 48–54.
- [7] Campbell D. M., Cima J. A., Pfaltzgraff J. A. Linear space and linear-invariant families of locally univalent analytic functions // *Manuscripta Math.* 1971. V. 4. P. 1–30.
- [8] Старков В. В. Об одном неравенстве для коэффициентов функций некоторого линейно-инвариантного семейства // *C. R. Acad. Bulgare Sci.* 1984. V. 37. № 8. P. 999–1002.
- [9] Godula J., Starkov V. V. On the Jakubowski's functional in a linearly invariant family // *Zeszyty Nauk. Politech. Rzeszowskiej. Mat. Fiz.* 1990. V. 73. P. 19–27.
- [10] Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука 1966.
- [11] Старков В. В. К проблеме коэффициентов в U'_α // *Деп. ВИНТИ № 972-82.* М.: ВИНТИ, 1981.
- [12] Campbell D. M. Locally univalent functions with locally univalent derivatives // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1971. V. 162. P. 395–409.
- [13] Shah S. M., Trimble S. Y. Univalent functions with univalent derivatives. III // *J. Appl. Math. Mech.* 1969/1970. V. 19. P. 451–460.

Институт математики университета М. Кюри-Скловской, г. Люблин
 Петрозаводский государственный университет
E-mail: godula@golem.umcs.lublin.pl, starkov@mainpgu.karelia.ru

Поступило
 28.10.96