Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. В. Гусейнов, Неравенства Харди в функциональных пространствах, содержащих производные нецелого порядка, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 5, 673–678

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1333>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 15:54:37

УДК 517.51.828

НЕРАВЕНСТВА ХАРДИ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, СОДЕРЖАЩИХ ПРОИЗВОДНЫЕ НЕЦЕЛОГО ПОРЯДКА

Р. В. Гусейнов

Доказана теорема о неравенстве Харди в функциональных пространствах, содержащих производные нецелого порядка.

Библиография: 7 названий.

Неравенство Харди [1] играет большую роль и имеет много применений в различных вопросах анализа.

Обобщения неравенства Харди для функций нескольких переменных из анизотропных пространств Соболева имеются в работах [2]–[5] и др. Здесь будет доказана одна теорема о неравенстве Харди в функциональных пространствах, содержащих производные нецелого порядка.

Пусть $s = (s_1, \dots, s_n)$ – набор положительных чисел, k – наименьшее целое число такое, что $s_i < k$, $i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим $\varphi(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ такую, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{\varphi}(\lambda)|^2 \left(\sum_1^n \lambda_i^{2s_i} \right) d\lambda = J(\varphi) < +\infty,$$

где $\tilde{\varphi}(\lambda)$ – преобразование Фурье функции $\varphi(x)$.

ТЕОРЕМА. Если

$$-k + \frac{k}{2} \sum_1^n \frac{1}{s_i} + k \sum_1^n \frac{\beta_i}{s_i} + 2|\alpha| \neq 0$$

ни при каких целых α, β , $0 \leq \alpha_i < k$, $0 \leq \beta_i < k$, то

$$\varphi(x) = \sum c_\alpha x^\alpha + \varphi_1(x),$$

где суммирование ведется по α таким, что

$$2 \sum_1^n \frac{\alpha_i}{s_i} + \sum_1^n \frac{1}{s_i} < 2,$$

а $\varphi_1(x)$ такова, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi_1|^2}{\sum_1^n x_i^{2s_i}} dx \leq cJ(\varphi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$h(\lambda) = \sum_1^n |\lambda_i|^{2s_i/k}.$$

В пространстве $\mathbb{R}^{n+k} = (x, t) = (x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_k)$ определим функцию

$$u(x, t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda x} \tilde{\varphi}(\lambda) e^{-h^2(\lambda)|t|^2} d\lambda,$$

где $|t| = (\sum_1^k t_i^2)^{1/2}$.

Заметим, что $u|_{t=0} = \varphi(x)$. Пусть

$$a_{\alpha\beta} = -2k + k \sum_1^n \frac{\beta_i}{s_i} + 2|\alpha|.$$

По равенству Парсеваля

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{\varphi}(\lambda)|^2 \cdot |(i\lambda)^\beta|^2 e^{-2h^2(\lambda)|t|^2} \left(\sum_{\substack{\gamma_1 + \dots + \gamma_k = p'' \\ 0 \leq p' \leq |\alpha| \\ 2p' - p'' = |\alpha|}} (-h^2(\lambda))^{p'} |t_1^{\gamma_1} \dots t_k^{\gamma_k}| \right)^2 d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} u}{\partial t^\alpha \partial x^\beta} \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Умножив обе части этого равенства на $|t|^{a_{\alpha\beta}}$ и проинтегрировав по $\mathbb{R}^k$, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n+k}} |t|^{a_{\alpha\beta}} \cdot \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} u}{\partial t^\alpha \partial x^\beta} \right|^2 dx dt = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} |t|^{a_{\alpha\beta}} \cdot |\lambda^\beta|^2 e^{-2h^2(\lambda)|t|^2} |\tilde{\varphi}(\lambda)|^2 \\ & \quad \times \left(\sum_{\substack{\gamma_1 + \dots + \gamma_k = p'' \\ 0 \leq p' \leq |\alpha| \\ 2p' - p'' = |\alpha|}} (-h^2(\lambda))^{p'} |t_1^{\gamma_1} \dots t_k^{\gamma_k}| \right)^2 d\lambda dt. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных $t_i = y_i/h(\lambda)$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n+k}} |t|^{a_{\alpha\beta}} \cdot \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} u}{\partial t^\alpha \partial x^\beta} \right|^2 dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \frac{|y|^{a_{\alpha\beta}}}{|h(\lambda)|^{a_{\alpha\beta}}} e^{-2|y|^2} |\lambda^\beta|^2 \cdot |\tilde{\varphi}(\lambda)|^2 \\ & \quad \times \left(\sum_{\substack{\gamma_1 + \dots + \gamma_k = p' \\ 0 \leq p' \leq |\alpha| \\ 2p' - p'' = |\alpha|}} |h^2(\lambda)|^{p'} \frac{|y_1^{\gamma_1} \dots y_k^{\gamma_k}|}{|h(\lambda)|^{p''}} \right)^2 (h(\lambda))^{-k} d\lambda dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda^\beta|^2 \cdot |\tilde{\varphi}(\lambda)|^2 \cdot |h(\lambda)|^{-a_{\alpha\beta}-k} d\lambda \\ & \quad \times \sum_{\substack{\gamma_1 + \dots + \gamma_k = p'' \\ 0 \leq p' \leq |\alpha|}} |h^2(\lambda)|^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^k} |y|^{a_{\alpha\beta}} e^{-2|y|^2} |y_1^{\gamma_1} \dots y_k^{\gamma_k}|^2 dy. \end{aligned}$$

Оценим, считая $\gamma_1 + \dots + \gamma_k = p'', 0 \leq p' \leq |\alpha|$, следующий интеграл:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^k} |y|^{\alpha_{\alpha\beta}} e^{-2|y|^2} |y_1^{\gamma_1} \dots y_k^{\gamma_k}|^2 dy \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^k} |y|^{\alpha_{\alpha\beta}} e^{-2|y|^2} \left(\frac{y_1}{|y|}\right)^{2\gamma_1} \dots \left(\frac{y_k}{|y|}\right)^{2\gamma_k} |y|^{2p''} dy \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^k} |y|^{\alpha_{\alpha\beta}} e^{-2|y|^2} |y|^{2p''} dy, \quad 0 \leq p'' \leq |\alpha|. \end{aligned}$$

Все эти интегралы при $a_{\alpha\beta} > -k, a_{\alpha\beta} + 2 > -k, \dots, a_{\alpha\beta} + 2|\alpha| > -k$, т.е. при $a_{\alpha\beta} > -k$ (или $a_{\alpha\beta} + k > 0$) сходятся.

Отсюда при $a_{\alpha\beta} + k > 0$ получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n+k}} |t|^{\alpha_{\alpha\beta}} \cdot \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} u}{\partial t^\alpha \partial x^\beta} \right|^2 dx dt \\ & \leq c \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda^\beta|^2 \cdot |\tilde{\varphi}(\lambda)|^2 \cdot |h(\lambda)|^{-a_{\alpha\beta}-k} \cdot |h(\lambda)|^{2|\alpha|} d\lambda \\ & = c \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda^\beta|^2 \cdot |\tilde{\varphi}(\lambda)|^2 \cdot |h(\lambda)|^{k-\sum_1^n (\beta_i/s_i)} d\lambda \\ & = c \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{\varphi}(\lambda)|^2 |\lambda_1^{2s_1/k} \lambda_{\beta_1 k/s_1} \dots \lambda_n^{2s_n/k} \lambda_{\beta_n k/s_n} \left(\sum_1^n |\lambda_i|^{2s_i/k}\right)^{k-\sum_1^n (\beta_i/s_i)} d\lambda \\ & = c \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{\varphi}(\lambda)|^2 \frac{\prod_1^n |\lambda_j^{2s_j/k} \lambda_{\beta_j k/s_j}|}{\left(\sum_1^n |\lambda_i|^{2s_i/k}\right)^k \sum_1^n (\beta_i/s_i)} \left(\sum_1^n |\lambda_i|^{2s_i/k}\right)^k d\lambda \\ & \leq c \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{\varphi}(\lambda)|^2 \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^{2s_i/k}\right)^k d\lambda \\ & \leq c_0 \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{\varphi}(\lambda)|^2 \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^{2s_i}\right) d\lambda = cJ(\varphi). \end{aligned} \quad (1)$$

Ограничимся рассмотрением тех α и β , которые удовлетворяют условиям $a_{\alpha\beta} + k > 0$ и $|\alpha| + |\beta| \leq k$. Такой набор α, β будем брать в качестве n [5]. За числа p_i в определении n берем $p_i = k, i = 1, \dots, n+k$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{n+k}$ область

$$\Omega = \{(x, t) : |t_i| \leq t_k, i = 1, \dots, k-1, |x_i| \leq t_k^{k/(2s_i)}, i = 1, \dots, n, t_k > 0\}$$

– рога типа (q, l) [5], где $q = (k/(2s_1), \dots, k/(2s_n), 1, \dots, 1)$ и l – любой вектор из $\mathbb{R}_+^{n+k-1}$. Рассмотрим функцию $u(x, t)$. Из (1) легко получить, что $u(x, t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 из [5] для рога типа (q, l) , т.е. для области Ω . В самом деле, из неравенства $t_k < |t| < \sqrt{k}t_k$ имеем

$$c_1 t_k^{\alpha_{\alpha\beta}} < |t|^{\alpha_{\alpha\beta}} < c_2 t_k^{\alpha_{\alpha\beta}}.$$

Тогда согласно (1)

$$\int_{\Omega} |t_k|^{\alpha_{\alpha\beta}} \cdot \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} u}{\partial t^\alpha \partial x^\beta} \right|^2 dx dt \leq cJ(\varphi).$$

Если в условии теоремы взять $\gamma(0, \dots, 0, p_n) = 0$, то

$$\gamma(\alpha, \beta) = 2 \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{k}{2s_i} + 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i - 2k = k \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{s_i} + 2|\alpha| - 2k = a_{\alpha\beta}$$

и по условию теоремы

$$a_{\alpha\beta} + k + \frac{k}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i} \neq 0. \quad (2)$$

Тогда из теоремы 1 [5] получаем, что

$$u = \sum c_{\alpha\beta} x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} t_1^{\alpha_1} \dots t_k^{\alpha_k} + u_1(x, t), \quad (3)$$

где $|\alpha| + |\beta| < k$, $(\alpha, \beta) \in \mathbf{n}' [5]$, а $u_1(x, t)$ такова, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega, |\alpha|+|\beta|<k, (\alpha, \beta) \in \mathbf{n}'} |t_k|^{\gamma(\alpha, \beta)} \cdot \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} u_1}{\partial t^\alpha \partial x^\beta} \right|^2 dx dt \\ & \leq \int_{\Omega, |\alpha|+|\beta|<k, (\alpha, \beta) \in \mathbf{n}} |t_k|^{\gamma(\alpha, \beta)} \cdot \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} u}{\partial t^\alpha \partial x^\beta} \right|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{t_k^{a_{\alpha\beta}+2k}}{t_k^{2k}} \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} u_1}{\partial t^\alpha \partial x^\beta} \right|^2 dx dt \leq cJ(\varphi), \\ & \int_{\Omega} \frac{t_k^{a_{\alpha\beta}+2k}}{\sum_1^k t_i^{2k} + \sum_1^n x_i^{4s_i}} \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} u_1}{\partial t^\alpha \partial x^\beta} \right|^2 dx dt \leq cJ(\varphi) \end{aligned}$$

или

$$\int_{\Omega} \frac{|t|^{a_{\alpha\beta}+2k}}{\sum_1^k t_i^{2k} + \sum_1^n x_i^{4s_i}} \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} u_1}{\partial t^\alpha \partial x^\beta} \right|^2 dx dt \leq cJ(\varphi) \quad (4)$$

при всех α, β таких, что $|\alpha| + |\beta| < k$, если только выполнено (2) для всех $(\alpha, \beta) \in \mathbf{n}'$, $|\alpha| + |\beta| < k$. Пусть

$$Q_\mu = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+k} : |t_i| \leq \mu, i = 1, \dots, k; |x_i| \leq \mu^{k/(2s_i)}, i = 1, \dots, n\},$$

$\Omega_\mu = Q_\mu \setminus Q_{\mu/2}$. По теореме вложения С. Л. Соболева [6, с. 64]

$$\sup_{0 < |t_i| < 1} |u(x, t)| \leq M \left(\int_{|t_i| < 1} u_1^2(x, t) dt \right)^{1/2} + M \sum_{|\alpha|=k} \left(\int_{|t_i| < 1} \left| \frac{\partial^\alpha u_1(x, t)}{\partial t^\alpha} \right|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & u_1^2(x, 0) \leq c \int_{|t_i| < 1} u_1^2(x, t) dt + c \sum_{|\alpha|=k} \int_{|t_i| < 1} \left| \frac{\partial^\alpha u_1}{\partial t^\alpha} \right|^2 dt, \\ & \int_{(x, 0) \in \Omega_1} |u_1(x, 0)|^2 dx \leq c \int_{(x, t) \in \Omega_1} |u_1|^2 dx dt + c \int_{\Omega_1} \sum_{|\alpha|=k} \left| \frac{\partial^\alpha u_1}{\partial t^\alpha} \right|^2 dx dt. \end{aligned}$$

По неравенству из [7, с. 131]

$$\int_{(x,0) \in \Omega_1} u_1^2 dx \leq c \int_{(x,t) \in \Omega \cap \Omega_1} u_1^2 dx dt + c \int_{\Omega_1} \sum_{|\alpha|=k} \left| \frac{\partial^\alpha u_1}{\partial t^\alpha} \right|^2 dx dt.$$

Мы учли, что $2k > k$ (т.е. $pl > n$, $p = 2$, $l = k$, $n = k$). Далее, $0 < t_i < 1$, поэтому $|t| < c_2$ и $|t|^{a_{\alpha\beta}} > c_2$, $a_{\alpha\beta} < 0$. Отсюда

$$\int_{(x,0) \in \Omega_1} u_1^2 dx \leq c \int_{(x,t) \in \Omega \cap \Omega_1} u_1^2 dx dt + c \int_{\Omega_1} \sum_{|\alpha|+|\beta|=k} |t|^{a_{\alpha\beta}} \cdot \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} u_1}{\partial t^\alpha \partial x^\beta} \right|^2 dx dt. \quad (5)$$

После преобразования $t_i = \mu t'_i$, $x_i = \mu^{k/(2s_i)} x'_i$ из (5) следует, что

$$\int_{(x,0)} |\mu|^{-k} u_1^2 dx \leq c \int_{\Omega_\mu \cap \Omega} (\mu)^{-2k} u_1^2 dx dt + c \int_{\Omega_\mu} \sum_{|\alpha|+|\beta|=k} |t|^{a_{\alpha\beta}} \cdot \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} u_1}{\partial x^\beta \partial t^\alpha} \right|^2 dx dt. \quad (6)$$

Так как в Ω_μ $|t_i| < \mu$, $i = 1, \dots, k$, $|x_i| \leq \mu^{k/(2s_i)}$, $x_i^{4s_i} < c_2 \mu^{2k}$, выполнены соотношения (потому что в некоторой части Ω_μ $(\mu/2)^{k/s} < x_i$, а в некоторой части $\mu/2 < |t_i|$)

$$|\mu|^{2k} \leq c_1 \left(\sum_1^k t_i^{2k} + \sum_1^n x_i^{4s_i} \right) \leq c_2 |\mu|^{2k},$$

из (6) следует

$$\begin{aligned} \int_{(x,0) \in \Omega_\mu} \left(\sum_1^n x_i^{2s_i} \right)^{-1} u_1^2 dx &\leq c \int_{\Omega_\mu \cap \Omega} \frac{u_1^2}{\sum_1^k t_i^{2k} + \sum_1^n x_i^{4s_i}} dx dt \\ &+ c \int_{\Omega_\mu} \sum_{(\alpha,\beta) \in \mathbf{n}} |t|^{a_{\alpha\beta}} \cdot \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} u}{\partial t^\alpha \partial x^\beta} \right|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Полагая в (7) $\mu = 2^m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и суммируя все получившиеся неравенства, в силу (1) и (4) получим

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u_1^2(x,0)}{\sum_1^n x_i^{2s_i}} dx \leq cJ(\varphi).$$

(В интеграле

$$\int_{\Omega} \frac{u_1^2}{\sum_1^k t_i^{2k} + \sum_1^n x_i^{4s_i}} dx dt,$$

если сравнить с (4) $a_{\alpha\beta} + 2k = 0$, потому что $|\alpha| = 0$, $|\beta| = 0$.) Итак,

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| < k} c_\alpha x^\alpha + \varphi_1(x),$$

где $\varphi_1(x)$ такова, что (в неравенстве (3) $\alpha = 0$, $|\beta| < k$, $(\beta, 0) \in \mathbf{n}'$)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi_1|^2}{\sum_1^n x_i^{2s_i}} dx \leq cJ(\varphi). \quad (8)$$

Так как $\varphi(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ (по условию теоремы),

$$\int_{\sum_1^n x_i^{2s_i} > 1} \left(\sum_1^n x_i^{2s_i} \right)^{-1} \left(\sum c_\alpha x^\alpha \right)^2 dx < +\infty.$$

Если здесь перейти к переменным t_i заменой $x_i = t^{1/s_i}$, а затем к сферическим координатам, получим, что $c_\alpha = 0$, если

$$2 \sum_1^n \frac{\alpha_i}{s_i} + \sum_1^n \frac{1}{s_i} \geq 2.$$

Таким образом,

$$\varphi(x) = \sum c_\alpha x^\alpha + \varphi_1(x),$$

где суммирование ведется по таким α_i , что

$$2 \sum_1^n \frac{\alpha_i}{s_i} + \sum_1^n \frac{1}{s_i} < 2,$$

а $\varphi_1(x)$ удовлетворяет неравенству (8).

ПРИМЕРЫ. Если $\sum_1^n (1/s_i) > 2$, то условия теоремы выполнены.

В этом случае все $c_\alpha = 0$. Так будет, например, при $n > 1$ и если хотя бы одно из чисел s_i не более $1/2$. Условия теоремы нарушаются, например, при $s = 1/2$ и $n = 1$.

Автор выражает благодарность проф. В. А. Кондратьеву за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.
- [2] Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Количественный анализ в теоремах вложения Соболева и приложения к спектральной теории // 10-я матем. школа. Киев: ИМ АН УССР, 1974. С. 7–81.
- [3] Кондратьев В. А., Олейник О. А. О неравенствах Харди и Корна для некоторого класса неограниченных областей и их приложениях в теории упругости // Докл. АН СССР. 1990. Т. 312. № 6. С. 1299–1304.
- [4] Triebel H. Anisotropic function spaces. I: Hardy's inequality, decompositions // Anal. Math. 1984. V. 10. P. 53–77.
- [5] Гусейнов Р. В. О неравенствах типа Харди и их применениях в теории квазиэллиптических уравнений // Докл. РАН. 1993. Т. 330. № 5. С. 542–545.
- [6] Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., 1995.
- [7] Бесов О. В., Ильин В. А., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.