Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Добрынский, Унимодальные отображения и хаос по Ли-Йорку, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 5, 679–689

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1334>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 15:11:26

УДК 517.9

УНИМОДАЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ХАОС ПО ЛИ–ЙОРКУ

В. А. Добрынский

В работе сформулированы условия, при которых унимодальные отображения имеют области с хаотическим в смысле Ли–Йорка поведением траекторий.

Библиография: 8 названий.

Пусть T – некоторое подмножество квадрата $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ и F – отображение I^2 в себя. Через $\text{Int}(T)$ обозначим внутренность T , через $\Gamma(T) = T \setminus \text{Int}(T)$ – его границу, через $\text{NW}(F)$ – множество неблуждающих точек F , через $\text{Per}(F)$ – множество периодических точек F , через $\|DF\|$ и $\|D\Phi\|$ – якобианы F и Φ , где $\Phi = F(F(F(\cdot)))$. Положим

$$F^n = \underbrace{F(F(\dots F(\cdot)\dots))}_{n \text{ раз}}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $(x, y) \mapsto (\Psi(x, y), x)$ квадрата I^2 в себя называется *унимодальным*, если $\Psi(x, y)$ – C^1 -гладкая функция такая, что $\Psi(x, 0) = \Psi(x, 1) = \Psi(0, y) = \Psi(1, y) = 0$, и существует точка $(\bar{x}, \bar{y})$ такая, что $\Psi(\bar{x}, \bar{y}) > \Psi(x, y) > 0$ для любой точки $(x, y) \in \text{Int}(I^2)$ и $(\bar{x}, \bar{y})$ – единственная точка, в которой частные производные Ψ'_x и Ψ'_y одновременно обращаются в 0 [1], [2].

Ниже рассматривается семейство унимодальных отображений вида

$$F: (x, y) \rightarrow (\lambda f(x)(g(y))^s, x), \quad (1)$$

здесь $0 < \lambda < 1$, $s > 0$ – параметры; $f(t)$ – C^1 -гладкая унимодальная на $[0, 1]$ функция такая, что $f(0) = f(1) = 0$, $f(q) = 1$, где q – точка экстремума $f(t)$, $(t - q)f'(t) < 0$ на $[0, 1] \setminus \{q\}$, где $f'(t)$ – производная от $f(t)$, а $g(t) = h(f(t))$, где $h(t)$ – C^1 -дiffeоморфизм $[0, 1]$ такой, что $h(0) = 0$ и $h'(t) > 0$ на $[0, 1]$.

Для отображения вида (1) в [2] доказано, что в пространстве параметров есть две области значений λ и s такие, что соответствующие им отображения (1) имеют (в фазовом пространстве) области с хаотическим в смысле Ли–Йорка [3] поведением траекторий. Природа механизмов, порождающих хаос, в каждой области существенно отличается друг от друга: в одном случае он связан с траекторией, гомоклинической к “седлу”, а в другом – с траекторией, гомоклинической к “источнику” – репеллеру с внезапным возвратом (*snap-back repeller* [4]). В настоящей работе даны другие условия, при которых отображения (1) также имеют области с хаотическим в смысле Ли–Йорка поведением траекторий. В этом последнем случае так же, как и в первом, явление хаоса связано с существованием траектории, гомоклинической к периодической периода 3 точке типа “седло”.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Замыкание множества $\{(x, y) \in \text{Int}(I^2) : \|DF\| = 0\}$ называется *критическим множеством* K отображения F .

Данное определение критического множества отличается от [5], но они связаны между собой. Выпишем в явном виде K и два его первых образа и прообраза:

$$\begin{aligned} K &= \{(x, y) \in I^2 : y = q, 0 \leq x \leq 1\}, & F(K) &= \{(x, y) \in I^2 : x = \lambda f(y), 0 \leq y \leq 1\}, \\ F^{-1}K &= \{(x, y) \in I^2 : x = q, 0 \leq y \leq 1\}, \\ F^2(K) &= \{(x, y) \in I^2 : x = \lambda f(y)(h(y/\lambda))^s, 0 \leq y \leq \lambda\}, \\ F^{-2}(K) &= \{(x, y) \in I^2 : q = \lambda f(x)(h(f(y)))^s\}. \end{aligned}$$

Отметим, что $F^{-2}(K)$ существует при $\lambda > q$.

Обозначим $R = F^2(I^2)$. Несложно показать, что

$$R = \{(x, y) \in I^2 : \lambda f(y)(h(y/\lambda))^s \leq x \leq \lambda f(y), 0 \leq y \leq \lambda\}.$$

Так что при $h(t) = t$

$$R = \{(x, y) \in I^2 : \lambda^{1-s} y^s f(y) \leq x \leq \lambda f(y), 0 \leq y \leq \lambda\}.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(x, y) : 0 \leq x \leq q, 0 \leq y \leq q\}, & M_2 &= \{(x, y) : q \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq q\}, \\ M_3 &= \{(x, y) : q \leq x \leq 1, q \leq y \leq 1\}, & M_4 &= \{(x, y) : 0 \leq x \leq q, q \leq y \leq 1\}. \end{aligned}$$

Вычислением проверяется справедливость соотношений

$$\begin{aligned} F(M_1) &= F(M_4) \subset M_1 \cup M_2, & F(M_2) &= F(M_3) \subset M_3 \cup M_4, \\ F^2(M_i) &= R, & i &= 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Обозначим

$$S(f(t)) = \frac{f'''(t)}{f'(t)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(t)}{f'(t)} \right)^2$$

производную Шварца (шварциан) функции $f(t) \in C^3[0, 1]$ Пусть λ^* – минимальное решение уравнения $tf(t) = q$ такое, что $\lambda^* > q$. Зафиксируем $\tilde{\lambda} > \lambda^*$ и $\tilde{s} > 0$ так, чтобы график кривой $x = \lambda f(y)(h(y/\lambda))^s$ для всех $\lambda, s, \tilde{\lambda} < \lambda < 1, 0 < s < \tilde{s}$, имел единственную точку пересечения с $\{(x, y) : x = q, y > q\}$. Такие $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{s}$ всегда существуют. (В частности, $\tilde{s} = 1$ при $h(t) = t$.) Более того, анализируя зависимость свойств функций $x = \lambda f(y)$, $x = \lambda f(y)(h(y/\lambda))^s$, $\lambda f(y)(h(f(y)))^s = q$ от параметров (см. [6]), можно утверждать, что они могут быть выбраны следующим образом: для любых $\lambda, s, \tilde{\lambda} < \lambda < 1, 0 < s < \tilde{s}$, графики указанных выше функций в M_4 попарно пересекаются в трех разных точках. При этом получается, что дуги кривых $F(K)$, $F^2(K)$ и $F^{-2}(K)$, пересекаясь, образуют в M_4 криволинейный треугольник ABC с основанием $AB \subset F^{-2}(K)$ и боковыми сторонами $BC \subset F(K)$ и $CA \subset F^2(K)$. Учитывая, что

$$F^{-2}(K) \xrightarrow{F} F^{-1}(K) \xrightarrow{F} K \xrightarrow{F} F(K),$$

нетрудно показать, что по крайней мере для λ близких к 1 и достаточно малых s

- 1) $\Phi(C) \in M_1$;
- 2) $\Phi(AB) \cap BC = \emptyset$ и, следовательно, $\Phi(ABC) \cap ABC = \emptyset$.

Определим последовательность вложенных друг в друга множеств E_j следующим образом: $E_{-1} \stackrel{\text{df}}{=} ABC$, $E_j \stackrel{\text{df}}{=} \Phi(E_{j-1}) \cap E_{-1}$ для $j > -1$. Пусть $\tilde{E} \cap_{j=0}^{\infty} E_j$. Тогда $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Phi^{-k}(\tilde{E})$ – максимальное замкнутое инвариантное подмножество множества E_{-1} .

ТЕОРЕМА. Если $S(f(t)) < 0$ на $[0, 1] \setminus \{q\}$, то существуют $\bar{\lambda} < 1$, $\bar{s} > 0$ такие, что для любых λ, s , $\bar{\lambda} < \lambda < 1$, $0 < s < \bar{s}$, множество $\Gamma(E)$ – неподвижная гиперболическая (типа “седло”) точка Φ такая, что $W_{\text{loc}}^s(\Gamma(E))$ и $W^u(\Gamma(E))$ имеют отличные от $\Gamma(E)$ точки трансверсального пересечения.

В силу [7] отсюда вытекает следующее

СЛЕДСТВИЕ. Если $S(f(t)) < 0$ на $[0, 1] \setminus \{q\}$, то существуют $\bar{\lambda} < 1$, $\bar{s} > 0$ такие, что для любых λ, s , $\bar{\lambda} < \lambda < 1$, $0 < s < \bar{s}$, отображения F имеют (в фазовом пространстве) области хаоса в смысле Ли-Йорка.

Сформулируем вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. Существуют $\bar{\lambda} < 1$, $\bar{s} > 0$ такие, что $E \neq \emptyset$ для любых λ, s таких, что $\bar{\lambda} < \lambda < 1$ и $0 < s < \bar{s}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, точка C имеет координаты $x_C = \lambda f(\lambda)$, $y_C = \lambda$, т.е. при $\lambda = 1$ $C = (0, 1)$ и $\Phi(C) = (0, 0)$. В силу непрерывной зависимости координат $\Phi(C)$ от параметров для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_C = \delta_C(\varepsilon) > 0$ такое, что если $1 - \delta_C < \lambda < 1$, то $\Phi(C) \in U_\varepsilon((0, 0))$. Точка B имеет координаты $x_B < q$, $y_B > q$, удовлетворяющие системе уравнений

$$x_B = \lambda f(y_B), \quad q = \lambda f(x_B)(h(f(y_B)))^s,$$

которая при $s = 0$ вырождается в

$$x_B = \lambda f(y_B), \quad q = \lambda f(x_B). \quad (2)$$

Вычисляя при $s = 0$ координаты точки $\Phi(B)$, имеем

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} \xrightarrow{F} \begin{pmatrix} \lambda f(x_B) \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ x_B \end{pmatrix} \xrightarrow{F} \begin{pmatrix} \lambda \\ q \end{pmatrix} \xrightarrow{F} \begin{pmatrix} \lambda f(\lambda) \\ \lambda \end{pmatrix} = C.$$

Следовательно, в силу непрерывной зависимости $\Phi(B)$ от параметров существует $\delta_B = \delta_B(\varepsilon) > 0$ такое, что если $0 < s < \delta_B$, то $\Phi(B)$ принадлежит ε -окрестности точки C .

Аналогично, точка A имеет координаты $x_A < q$, $y_A > q$, которые определяются как решение системы уравнений

$$x_A = \lambda f(y_A)(h(y_A/\lambda))^s, \quad q = \lambda f(x_A)(h(f(y_A)))^s,$$

которая при $s = 0$ вырождается в

$$x_A = \lambda f(y_A), \quad q = \lambda f(x_A). \quad (3)$$

Системы (2) и (3) совпадают и, значит, A и B при $s = 0$ сливаются в одну точку. Следовательно, существует $\delta_A = \delta_A(\varepsilon) > 0$ такое, что если $0 < s < \delta_A$, то $\Phi(A)$ принадлежит ε -окрестности точки C . Полагая $\delta = \min\{\delta_A, \delta_B, \delta_C\}$, получаем, что при λ, s таких, что $1 - \delta < \lambda < 1$ и $0 < s < \delta$ точки $\Phi(A)$, $\Phi(B) \in U_\varepsilon(C)$, а $\Phi(C) \in U_\varepsilon((0, 0))$.

Далее, поскольку $AB \subset F^{-2}(K)$, $BC \subset F(K)$, $\Phi(F^{-2}(K)) = F(K)$, то $\Phi(AB) \subset BC$. И так как $F(R) \subset R$, то $\Phi(AC)$ и $\Phi(BC)$ имеют непустое пересечение с AB . Фиксируя первые, начиная от $\Phi(A)$ и $\Phi(B)$ соответственно, точки пересечения указанных множеств с AB , мы получаем ту самую компоненту множества $\Phi(ABC) \cap ABC$, Φ -образ которой имеет правильное (в том смысле, что лежащие на AB и BC ее основания отображаются на некоторые подмножества, принадлежащие $\Phi(AB)$ и ε -окрестности точки $(0, 0)$) с ней пересечение. При этом получается, что основания множества

$$\Phi(\Phi(ABC) \cap ABC) \cap (\Phi(ABC) \cap ABC)$$

лежат на основаниях $\Phi(ABC) \cap ABC$. Следовательно,

$$\Phi(\Phi(ABC) \cap ABC) \cap (\Phi(ABC) \cap ABC) = \varnothing$$

и т.д.

По построению Φ диффеоморфно отображает ABC на $\Phi(ABC)$. Поэтому $\Phi: E \rightarrow E$ — диффеоморфизм. И если модуль $\|D\Phi\| < 1$ на E_{-1} , то E — одномерное множество или точка. Покажем, что существуют значения параметров, при которых E — множество, гомеоморфное отрезку прямой.

Обозначим через $\mathfrak{L}$ класс C^1 -гладких функций таких, что сужение графика каждой из них на E_{-1} имеет вид $\{(x, y) : x = \vartheta(y)\}$, где $\vartheta(y) : \lambda f(y)(h(y/\lambda))^s < \vartheta(y) < \lambda f(y)$, и справедлива оценка $\tilde{N} > |\vartheta'(y)| > \tilde{n}$, где $\tilde{n}, \tilde{N} > 0$ — не зависящие от s константы.

Покажем, что диффеоморфизм Φ порождает отображение $\mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}$.

Пусть $\vartheta \in \mathfrak{L}$. Рассмотрим сужение графиков функций $F(\vartheta)$, $F^2(\vartheta)$ и $\Phi(\vartheta)$ на множества $F(E_{-1})$, $F^2(E_{-1})$ и $\Phi(E_{-1}) \cap E_{-1}$ соответственно. Здесь и ниже ϑ , $F(\vartheta)$, $F^2(\vartheta)$, $\Phi(\vartheta)$ обозначают функции $x = \vartheta(y)$, $\bar{x} = \bar{\vartheta}(\bar{y})$, $\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{\vartheta}}(\bar{\bar{y}})$ и $\hat{x} = \hat{\vartheta}(\hat{y})$, которые неявно в параметрической форме задаются формулами

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \lambda f(x)(h(f(y)))^s, & \bar{y} &= x, \\ \bar{\bar{x}} &= \lambda f(\bar{x})(h(f(\bar{y})))^s, & \bar{\bar{y}} &= \bar{x}, \\ \hat{x} &= \lambda f(\bar{x})(h(f(\bar{\bar{y}})))^s, & \hat{y} &= \bar{\bar{x}}.\end{aligned}$$

Легко убедиться в том, что

$$\bar{x} = \bar{\vartheta}(\bar{y}) = \lambda f(\bar{y})(h(f(\vartheta^{-1}(\bar{y}))))^s, \quad \bar{\bar{x}} = \bar{\bar{\vartheta}}(\bar{\bar{y}}) = \lambda f(\bar{\bar{y}})(h(f(\bar{\vartheta}^{-1}(\bar{\bar{y}}))))^s$$

— монотонно возрастающие (по $\bar{y}$ и $\bar{\bar{y}}$ соответственно) функции и справедливы соотношения: $0 < \bar{\vartheta}(\bar{y}) < q$ и $0 < \bar{\bar{\vartheta}}(\bar{\bar{y}}) < \lambda < 1$.

Рассмотрим $\Phi(\vartheta)$. Ввиду монотонности $\bar{\bar{\vartheta}}(\bar{\bar{y}})$ существует обратная к ней функция $\bar{\bar{\vartheta}}^{-1}(\bar{\bar{x}})$, поэтому $\hat{\vartheta}(\hat{y})$ может быть представлена в таком же виде, что и $\bar{\vartheta}(\bar{y})$, $\bar{\bar{\vartheta}}(\bar{\bar{y}})$, а именно:

$$\hat{x} = \hat{\vartheta}(\hat{y}) = \lambda f(\hat{y})(h(f(\bar{\bar{\vartheta}}^{-1}(\hat{y}))))^s. \quad (4)$$

Но поскольку $0 < \hat{y} < \lambda$, это немонотонная функция. Обозначим $\hat{q} = \hat{q}(s) > q$ максимальное значение координаты $\hat{y}$, при котором касательная к графику функции $\Phi(\vartheta)$ параллельна оси Oy (т.е. $d\hat{x}/d\hat{y}|_{\hat{y}=\hat{q}} = 0$, но $d\hat{x}/d\hat{y}|_{\hat{y}>\hat{q}} < 0$). В том, что такое $\hat{q}$ существует, легко убедиться, изучая свойства функции (4). Более того, можно показать, что

$$\lim_{s \rightarrow 0} \hat{q}(s) = q.$$

Следовательно, существует $\bar{s} > 0$ такое, что $\hat{q}(s) < y_A$ для любого $0 < s < \bar{s}$, где y_A — y -координата точки A . Но это значит, что $d\hat{x}/d\hat{y} < 0$ на $[y_A, \lambda]$, т.е. $\Phi(\vartheta)$ монотонно убывает на E_{-1} . (Отметим также, что на M_1 $\Phi(\vartheta)$ — монотонно возрастающая функция с $d\hat{x}/d\hat{y} > 0$.)

Покажем, что $\Phi(\vartheta) \in \mathfrak{L}$. Для этого оценим $d\hat{x}/d\hat{y} = d\hat{x}/d\bar{x}$. Ее значение определяется в конечном счете следующим выражением:

$$\frac{d\hat{x}}{d\bar{x}} = \lambda f'(\bar{x})(h(f(\bar{x})))^s + \frac{sf(\bar{x})(h(f(\bar{x})))^{s-1}h'(f(\bar{x}))f'(\bar{x})}{f'(\bar{x})(h(f(x)))^s + sf(\bar{x})(h(f(x)))^{s-1}h'(f(x))f'(x)Q},$$

где

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\bar{x}/dx}{\lambda} = f'(x)(h(f(y)))^s + sf(x)(h(f(y)))^{s-1}h'(f(y))f'(y) \frac{d(\vartheta^{-1}(x))}{dx}.$$

Оценивая величину первого слагаемого, обратим внимание на то обстоятельство, что поскольку $F(M_1) \cap \text{Int}(M_4) = \emptyset$ и $E_{-1} \subset \text{Int}(M_4)$, то

$$F^{-1}(\Phi(E_{-1}) \cap E_{-1}) \cap F^2(E_{-1}) \subset M_2.$$

Более того, ввиду компактности $\Phi(E_{-1}) \cap E_{-1}$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$F^{-1}(\Phi(E_{-1}) \cap E_{-1}) \cap F^2(E_{-1}) \subset M_2 \setminus \{(x, y) : q - \varepsilon < x < q + \varepsilon\}.$$

Таким образом, не ограничивая общности, можно рассматривать только такие $(\bar{x}, \bar{y}) \in F^2(E_{-1})$, что $\bar{x} > q + \varepsilon$. Нов таком случае $|f'(\bar{x})| > |f'(q + \varepsilon)|$. Рассмотрим $E_{-1} \setminus U_\varepsilon(C)$, где $U_\varepsilon(\cdot)$ обозначает ε -окрестность множества. Очевидно, что существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$F^{-1}(E_{-1} \setminus U_\varepsilon(C)) \subset M_1 \setminus \{(x, y) : 0 < x < \varepsilon\}$$

и, значит, $(h(f(\bar{x})))^s > 0$ для $(\bar{x}, \bar{y}) \in F^{-1}(E_{-1} \setminus U_\varepsilon(C))$. Так как $F^{-1}(E_{-1} \setminus U_\varepsilon(C))$ — компакт, убеждаемся, что $(h(f(\bar{x})))^s > H(s) > 0$, где $H(s)$ — некоторая зависящая от s константа. Следовательно, значения $|f'(\bar{x})(h(f(\bar{x})))^s|$ ограничены и отделены от нуля.

Оценим второе слагаемое. Сразу отметим, что поскольку

$$\frac{d(\vartheta^{-1}(x))}{dx} = \left(\frac{d\vartheta(y)}{dy} \right)^{-1},$$

значения $d(\vartheta^{-1}(x))/dx$ ограничены и отделены от нуля. Далее, так как одним из сомножителей является s , значения обоих слагаемых сравнимы между собой (при достаточно малых s) только в том случае, когда $f'(\bar{x})(h(f(x)))^s = 0$. Последнее возможно только, когда $f'(\bar{x}) = 0$ или $f(x) = 0$. Но $f'(\bar{x}) = 0$, если $(x, y) \in F^{-2}(K) \cap E_{-1}$, а $f(x) = 0$, если $(x, y) = (0, 1)$ и $(x, y) \in E_{-1}$. Зафиксируем ξ , $0 < \xi < \varepsilon$, так чтобы $LMN \stackrel{\text{def}}{=} E_{-1} \setminus U_\xi(AB \cup C) \supset E$. Тогда оба рассматриваемых сомножителя отличны от 0 и потому на LMN справедлива оценка

$$\frac{d\hat{x}}{d\hat{y}} = \lambda f'(\bar{x})(h(f(\bar{x})))^s + sZ,$$

где $Z = Z(s)$ такова, что

$$\lim_{s \rightarrow 0} |Z(s)| < +\infty.$$

Таким образом, величина $d\hat{x}/d\hat{y}$ определяется при малых s знаком и величиной члена $\lambda f'(x)(h(f(\bar{x})))^s$, в котором $(h(f(\bar{x})))^s \rightarrow 1$ при $s \rightarrow +0$, а $|f'(x)| > |f'(q+\varepsilon)| > 0$. Фиксируя $\tilde{n}$ и $\tilde{N}$ так, чтобы выполнялись оценки на производные для функций из класса $\mathcal{L}$ при $s = 0$, можно (ввиду непрерывной зависимости их от s) утверждать справедливость их для всех $s \in [0, \bar{s}]$, где $\bar{s} > 0$ достаточно мало. Отметим теперь, что подобного рода оценки справедливы на множестве $(M_1 \cup M_4) \cap R \cap \{(x, y) : 0 < x < x(q, y)\}$ более широком, чем E_{-1} , где $x(q, y)$ – решение уравнения $\lambda f(x)(h(f(y)))^s = q$ такое, что $x(q, y) < q$.

ЛЕММА 2. *Существуют $\bar{\lambda} < 1$, $\bar{s} > 0$ такие, что $\tilde{E}$ – множество, гомеоморфное отрезку прямой для любых λ, s таких, что $\bar{\lambda} < \lambda < 1$ и $0 < s < \bar{s}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что существует $\bar{s}$ такое, что при $0 < s < \bar{s}$ графики функций, описывающих боковые границы множеств E_j , пересекают AB только один раз. Заметим прежде всего, что значения координаты y точек, принадлежащих графику Φ -образа функции $x = \vartheta(t)$, $y = t$ из класса $\mathcal{L}$, монотонно убывают с ростом значений параметра t . В самом деле, так как графики функций из класса $\mathcal{L}$ принадлежат E_{-1} , областью определения $\vartheta \in \mathcal{L}$ является множество $T_\vartheta = [t_{\min}(\vartheta), t_{\max}(\vartheta)]$, где $t_{\min}(\vartheta) > q$ такое, что справедливо соотношение

$$\lambda f(\vartheta(t_{\min}(\vartheta)))(h(f(t_{\min}(\vartheta))))^s < q$$

(равенство достигается, когда точка $(\vartheta(t_{\min}(\vartheta)), t_{\min}(\vartheta))$ принадлежит AB), а $t_{\max}(\vartheta)$ такое, что $t_{\min}(\vartheta) < t_{\max}(\vartheta) < \lambda$. Вычисление координат Φ -образа точки $(\vartheta(t), t)$ дает следующее выражение:

$$y = \lambda f(\lambda f(\vartheta(t))(h(f(t))))^s (h(f(\vartheta(t))))^s.$$

Так как $\vartheta(t)$ и $\lambda f(\vartheta(t))(h(f(t)))^s$ монотонно убывают с ростом t от $t_{\min}(\vartheta)$ до $t_{\max}(\vartheta)$ и $\lambda f(\vartheta(t_{\min}(\vartheta)))(h(f(t_{\min}(\vartheta))))^s < q$, $\vartheta(t_{\min}(\vartheta)) < q$, видим, что значения y с ростом t убывают. Если выразить x – координату точки $(x, y) \in AB$ – как функцию от y , то ее производная $dx/dy > 0$ на M_4 . А так как производные от функций из $\mathcal{L}$ отрицательные, равномерно ограниченные и отделены от нуля, то графики функций, задающих “боковые” стороны E_j , трансверсально пересекают AB и при этом углы пересечения равномерно отделены снизу от нуля. При $s = 0$ дуга AB вырождается в точку. Пусть $\varepsilon > 0$. Зафиксируем $\bar{s} > 0$ так, что в $U_\varepsilon(B)$

- 1) для производной каждой функции, описывающей границу множества E_j , справедливы оценки $-\tilde{n} + \delta > \vartheta'(y) > -\tilde{N} - \delta$, где $\tilde{n}, \tilde{N} > 0$ – константы, входящие в определение $\mathcal{L}$, а $0 < \delta < \tilde{n}/2$ – некоторая постоянная;
- 2) длина дуги AB меньше $\varepsilon/(\tilde{N} + \delta)$, т.е. AB принадлежит $\varepsilon/(\tilde{N} + \delta)$ -окрестности точки B .

Тогда график каждой такой функции имеет только одну точку пересечения с AB . Действительно, в $\varepsilon/(\tilde{N} + \delta)$ -окрестности точки B есть точка пересечения AB с каждой из боковых сторон; при изменении x -координаты боковой стороны от x_B до $x_B + \varepsilon$ ее y -координата уменьшается более чем на $\varepsilon/(\tilde{N} + \delta)$, и значит, точка, x -координата которой равна $x_B + \varepsilon$, лежит вне $\varepsilon/(\tilde{N} + \delta)$ -окрестности точки B ; других точек пересечения нет ввиду взаимно однозначного соответствия между значениями y -координат любой “боковой” стороны множества E_j и значениями y -координат ее Φ -образа.

Поскольку “боковые” стороны E_{-1} – дуги AC и BC – элементы класса $\mathcal{L}$ (при $0 < s < \tilde{s}$ для некоторого $\tilde{s} > 0$), существует $\bar{s}$ такое, что при $0 < s < \bar{s}$ отображение Φ переводит их в элементы того же класса $\mathcal{L}$. Таким образом, E_j образуют сходящуюся к $\tilde{E}$ последовательность вложенных друг в друга множеств, а их “боковые” стороны сходятся к “боковым” сторонам $\tilde{E}$. Так как функции из $\mathcal{L}$ имеют ограниченные производные, они непрерывны по Липшицу и образуют компактное подмножество в пространстве непрерывных функций. Поэтому предельные множества – “боковые” множества $\tilde{E}$ – являются графиками непрерывных по Липшицу функций, имеют ограниченную вариацию и конечную длину. По построению $\Phi(\tilde{E}) = \tilde{E}$. И если “боковые” стороны $\tilde{E}$ не совпадают друг с другом, то существует $\bar{y}$ такое, что $g_1(\bar{y}) \neq g_2(\bar{y})$, где $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ – функции, графиками которых они являются. Ввиду непрерывности данное неравенство выполняется и для других y в окрестности $\bar{y}$. Следовательно, $\text{mes}(\tilde{E}) > 0$. Но из $\|D\Phi\| < 1$ на E_{-1} вытекает, что мера любого инвариантного множества равна 0. Значит, наше предположение неверно.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Существуют $\bar{\lambda} < 1$, $\bar{s} > 0$ такие, что для любых $\bar{\lambda} < \lambda < 1$ и $0 < s < \bar{s}$ E – точка или множество, гомеоморфное отрезку прямой.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Существуют $\bar{\lambda} < 1$, $\bar{s} > 0$ такие, что для любых $\bar{\lambda} < \lambda < 1$ и $0 < s < \bar{s}$ на E есть единственная неподвижная точка Φ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение очевидно, если E – точка. Предположим, что E – множество, гомеоморфное отрезку прямой. Поскольку $\Phi|_E$ – гомеоморфизм, под действием $\Phi|_E$ пара точек $\Gamma(E)$ переходит сама в себя. При этом точки $\Gamma(E)$ меняются друг с другом местами. Но это значит, что на E есть единственная неподвижная точка Φ .

Пусть $\Phi(P) = P$, $W_{\text{loc}}^s(P)$ и $W_{\text{loc}}^u(P)$ – локальные устойчивое и неустойчивое многообразия Φ в точке P , а $W^u(P) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Phi^i(W_{\text{loc}}^u(P))$ – глобальное многообразие [8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многообразия $W_{\text{loc}}^s(P)$ и $W^u(P)$ в точке $\bar{P}$ пересекаются неустраняемым образом, если малые возмущения Φ приводят к малым изменениям в координатах точки пересечения $W_{\text{loc}}^s(P)$ и $W^u(P)$. Точка $\bar{P}$ называется при этом *неустраняемой гомоклинической точкой*.

ЛЕММА 3. *Если $S(f(t)) < 0$ на $[0, 1] \setminus \{q\}$, то существуют $\hat{\lambda} < 1$, $\hat{s} > 0$ такие, что при $\hat{\lambda} < \lambda < 1$ и $0 < s < \hat{s}$ множество $E = \Gamma(E)$ – гиперболическая неподвижная (типа “седло”) точка отображения Φ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В E_{-1} дуга $\tilde{E}$ может быть записана в виде $x = \sigma(y)$, где $\sigma'(y) < -N$ и $N > 0$. Обозначим через $\tilde{\Phi}$ ограничение Φ на $\tilde{E}$. Пусть $(x, y) \in \tilde{E}$. Собственные числа якобиана $D\Phi$ в (x, y) определяются из уравнения

$$\left\| D\Phi - \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\| = 0, \quad (5)$$

которое в пределе (при $s \rightarrow 0$) переходит в уравнение

$$\mu^2 - \mu \lambda^3 f'(x) f'(\lambda f(x)) f'(\lambda f(\lambda f(x))) = 0. \quad (6)$$

Обозначим через $\mu_1(s)$ больший по модулю корень (5), а через $\mu_2(s)$ меньший. Тогда из (6) имеем

$$\mu_2(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \mu_2(s) = 0, \quad \mu_1(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \mu_1(s) = \lambda^3 f'(x) f'(\lambda f(x)) f'(\lambda f(\lambda f(x))).$$

Пусть $dl \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{dx^2 + dy^2}$ – бесконечно малый сегмент дуги $\tilde{E}$. Под действием Φ он преобразуется в $d\tilde{l} = \sqrt{(\mu_1 dx)^2 + (\mu_2 dy)^2}$. Рассмотрим сначала случай, когда $s = 0$. При этом треугольник E_{-1} вырождается в дугу $\hat{E}_{-1}$ кривой $x = \lambda f(y)$, ограниченную точками $(\hat{x}, \hat{y})$ и $(\lambda f(\lambda), \lambda)$, причем $\hat{x} < q$, $\hat{y} > q$ таковы, что $\lambda f(\hat{x}) = q$, $\lambda f(\hat{y}) = \hat{x}$. Уравнения для определения координат ее концов получаются как пределы соответствующих уравнений для координат точек A, B, C . Обозначим через $(\tilde{x}, \tilde{y})$ прообраз точки $(\hat{x}, \hat{y})$ такой, что $\tilde{x} < \hat{x}$, $\tilde{y} > \hat{y}$. Таким образом, $\lambda f(\tilde{x}) = \hat{x}$, $\lambda f(\tilde{y}) = \hat{y}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\tilde{x}(\lambda) > \lambda f(\lambda)$. В самом деле, при $\lambda = 1$ $\lambda f(\lambda) = 0$, но $\tilde{x}(1) = f^{-1}(f^{-1}(q)) > 0$. Следовательно, существует $\hat{\lambda} < 1$ такое, что для любого $\lambda \in [\hat{\lambda}, 1]$ справедливы соотношения $0 < \lambda f(\lambda) < \tilde{x}(\lambda) < \hat{x}(\lambda) < q$.

Обозначим через $\hat{\Phi}$ и $\hat{F}$ ограничения Φ и F на множество $\hat{E}_{-1}$ и посмотрим, как преобразуется $\hat{E}_{-1}$ под действием $\hat{\Phi}$. Учитывая, что $\hat{F}: (x, y) \mapsto (\lambda f(x), x)$, несложно проверить, что расположенный между $(\lambda f(\lambda), \lambda)$ и $(\tilde{x}, \tilde{y})$ сегмент дуги $\hat{E}_{-1}$ преобразуется в дугу кривой $x = \lambda f(y)$, которая лежит в $M_1 \cup M_2$, а сегмент дуги, расположенный между точками $(\tilde{x}, \tilde{y})$ и $(\hat{x}, \hat{y})$, – в дугу той же кривой, которая находится в $M_3 \cup M_4$. При этом $\hat{\Phi}((\tilde{x}, \tilde{y})) = (\lambda, q)$, $\hat{\Phi}((\hat{x}, \hat{y})) = (\lambda f(\lambda), \lambda)$. Далее, под действием $\hat{\Phi}$ каждый элемент дуги dl преобразуется в элемент

$$d\tilde{l} = |\mu_1(0) dx| = |\lambda^3 f'(x) f'(\lambda f(x)) f'(\lambda f(\lambda f(x))) dx|.$$

Последнее выражение обращается в 0 только тогда, когда равен 0 хотя бы один из сомножителей $f'(x)$, $f'(\lambda f(x))$ или $f'(\lambda f(\lambda f(x)))$. Поскольку $\hat{F}^2(\tilde{x}) = \hat{F}(\hat{x}) = q$, имеем $\mu_1(0) = 0$ при $x = \tilde{x}$ и $x = \hat{x}$. Других нулей на $[0, \hat{x}]$ у $\mu_1(0)$ нет. В самом деле, легко убедиться, что при $x < \tilde{x}$ одновременно выполняются неравенства: $x < q$, $\lambda f(x) < q$, $\lambda f(\lambda f(x)) < q$ – и, следовательно, $\mu_1(0) > 0$ на $(0, \tilde{x})$. С другой стороны, по-прежнему $x < q$ и $\lambda f(x) < q$ на $(\tilde{x}, \hat{x})$. Но $\lambda f(\lambda f(x)) > q$ и, значит, $\mu_1(0) < 0$ на $(\tilde{x}, \hat{x})$.

Пусть $P \in \hat{E}_{-1}$, $\hat{\Phi}(P) = P$, и x_P, y_P – ее координаты. Из сказанного вытекает, что P принадлежит дуге $\hat{E}_{-1}$, ограниченной точками $(\tilde{x}, \tilde{y})$ и $(\hat{x}, \hat{y})$. Покажем, что P – гиперболическая точка и максимальное инвариантное подмножество в $\hat{E}_{-1}$.

Так как $f(t)$ такая, что $S(f(t)) < 0$ на $[0, 1] \setminus \{q\}$, то такова же и $\hat{\Phi}(t) = \lambda f(\lambda f(\lambda f(t)))$. А это значит, что

$$|\hat{\Phi}'(t)| = |\lambda^3 f'(x) f'(\lambda f(x)) f'(\lambda f(\lambda f(x)))|$$

достигает минимального значения на концах интервала, где $\hat{\Phi}(t)$ имеет отрицательный шварцман. Более того, поскольку $\hat{\Phi}'(t) < 0$ на $(\tilde{x}, \hat{x})$, то $\hat{\Phi}'(t)$ имеет здесь не более одной точки перегиба и не имеет локальных максимумов. С учетом $\hat{\Phi}'(\tilde{x}) = \hat{\Phi}'(\hat{x}) = 0$ это значит, что на $(\tilde{x}, \hat{x})$ существует единственный минимум $\hat{\Phi}'(\hat{t})$. И поскольку $\hat{\Phi}([\tilde{x}, \hat{x}]) = [\lambda f(\lambda), \lambda] \sim [0, 1]$, то $\hat{\Phi}'(\hat{t}) < -1$. Из сказанного вытекает, что существует единственная пара значений $x_{\min}, x_{\max}$ таких, что $\tilde{x} < x_{\min} < x_{\max} < \hat{x}$ и $\hat{\Phi}'(x_{\min}) = \hat{\Phi}'(x_{\max}) = -1$. Очевидно, что $x_P \in (x_{\min}, x_{\max})$. Действительно, если это не так, то P принадлежит той части дуги $\hat{E}_{-1}$, где $|\mu_1(0)| < 1$. Тогда под действием $\hat{\Phi}$ образы точек P и $(\tilde{x}, \tilde{y})$ или P и $(\hat{x}, \hat{y})$ должны “сближаться”, что невозможно, так как точки $\hat{\Phi}((\tilde{x}, \tilde{y})) = (\lambda, q)$ и $\hat{\Phi}((\hat{x}, \hat{y})) = (\lambda f(\lambda), \lambda)$ не принадлежат сегменту дуги $\hat{E}_{-1}$ между точками $(\tilde{x}, \tilde{y})$ и $(\hat{x}, \hat{y})$. Таким образом, $x_P \in (x_{\min}, x_{\max})$ и $\mu_1(0)|_{x=x_P} < -1$.

Покажем, что $P = \hat{E}$. Обозначим через E^* множество

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \hat{\Phi}^n([x_{\min}, x_{\max}]).$$

Если $E^* = \hat{E}$, то утверждение очевидно. Допустим, что $\hat{E} \setminus E^* \neq \emptyset$. Тогда, с одной стороны, $\hat{E} \setminus E^*$ – инвариантное (по построению) множество, с другой стороны, на $\hat{E} \setminus E^*$ модуль якобиана $\|D\Phi\| < 1$ и, следовательно, $\hat{\Phi}(\hat{E} \setminus E^*) \neq \hat{E} \setminus E^*$, что невозможно.

Общий случай вытекает из рассмотренного выше, т.е. при $s = 0$, вследствие существования непрерывной зависимости координат периодических гиперболических точек, а также их локальных устойчивых и неустойчивых многообразий от отображения.

ЛЕММА 4. Если $S(f(t)) < 0$ на $[0, 1] \setminus \{q\}$, то существуют $\bar{\lambda} < 1$, $\bar{s} > 0$ такие, что при $\bar{\lambda} < \lambda < 1$ и $0 < s < \bar{s}$ в E_{-1} есть еще по крайней мере одна отличная от $\tilde{E}$ дуга $W^u(\Gamma(E))$ отображения Φ , которая принадлежит классу $\mathcal{L}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $U_\varepsilon(C)$ ε -окрестность точки C . Как было показано, $\Phi(C) \rightarrow (0, 0)$ при $\lambda \rightarrow 1$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $\bar{\lambda} = \lambda < 1$ такое, что $\Phi(U_\varepsilon(C)) \subset M_1$ при $\bar{\lambda} < \lambda < 1$. Следовательно, для произвольной точки $C^* \in U_\varepsilon(C)$ точки $\Phi(C^*), F(C^*) \in M_1$ при $\bar{\lambda} < \lambda < 1$. Зафиксируем $\bar{s} = s(\varepsilon) > 0$ так, чтобы при $0 < s < \bar{s}$ точка $\hat{C} = W_{\text{loc}}^u(\Gamma(E)) \cap F(K)$ – ближайшая к C точка $W_{\text{loc}}^u(\Gamma(E)) \cap \Gamma(R)$ – принадлежала $U_\varepsilon(C)$. В силу непрерывной зависимости координат $\hat{C}$ от s это можно сделать.

Пусть $V > 2$ – минимальное целое такое, что набор дуг $(R \cap F^{-j}(K))_{j=0}^V$ так делит R на подмножества, что элемент разбиения, содержащий точки $C = (\lambda f(\lambda), \lambda)$ и $\hat{C} = \tilde{E} \cap F(K) \cap E_{-1}$, не содержит точку $\Gamma(E)$ такую, что $\Phi(\Gamma(E)) = \Gamma(E)$. Покажем, что такое V существует. Действительно, так как при $s = 0$ $A = B$ и $\hat{\Phi}(B) = C$, то в силу непрерывной зависимости координат точек и отображения от параметров существует $\hat{s} > 0$ такое, что при $s < \hat{s}$ точки $\Phi(A)$ и $\Phi(B)$, а с ними и вся дуга $\Phi(AB)$ принадлежат $U_\varepsilon(C)$. Поскольку точка $\hat{C}$ по построению является образом некоторой точки на дуге AB , это значит, что $\hat{C} \in U_\varepsilon(C)$ при $s < \hat{s}$. Так как для $\lambda = 1$ $\Phi(C) = (0, 0)$ и при $\lambda = 1$ и $s = 0$ прообразы $F^{-L}(F^{-2}(K) \cap M_1 \cap R)$ множества $F^{-2}(K) \cap M_1 \cap R$ сходятся к $\{(0, 0)\}$ при $L \rightarrow \infty$, ясно, что такое V существует. Рассмотрим односвязный сегмент множества $W_{\text{loc}}^u(\Gamma(E))$ между $\hat{C}$ и $\hat{D}$, где $\hat{D} \in F^{-V}(K) \cap W_{\text{loc}}^u(\Gamma(E))$. Если $V = 3$, то, как нетрудно проверить, $\Phi(F(\hat{C}\hat{D})) \cap E_{-1} = \emptyset$. При этом можно выбрать $\bar{s} > 0$ такое, что для любого $s < \bar{s}$ $F(K \cap R) \subset U_\varepsilon(C)$. Но $\Phi(\hat{D}) \in F(K \cap R)$. Следовательно, $F^4(\hat{D}) = \Phi(F(\hat{D})) \in U_\varepsilon(C)$. Таким образом, в E_{-1} существует отличная от $\tilde{E}$ дуга $W^u(\Gamma(E))$, делящая E_{-1} надвое так же, как и $\tilde{E}$. Рассуждения, аналогичные изложенным выше при изучении свойств функций из класса $\mathcal{L}$, показывают, что эта дуга принадлежит $\mathcal{L}$ на E_{-1} . Случай $V > 3$ не отличается от рассмотренного, но при его исследовании следует иметь в виду, что для $i = \overline{1, V-2}$ дуги $F^i(\hat{C}\hat{D}) \subset M_1$, а точки $F^i(\hat{D}) \in F^{-V+i}(K) \cap M_1$. Выбором значений параметров s и λ можно, как и выше, добиться того, что $\Phi(F^{V-2}(\hat{C}\hat{D})) \cap E_{-1} = \emptyset$, а $\Phi(F^{V-2}(\hat{D})) \in U_\varepsilon(C)$, но при этом $F^{V+1}(\hat{C}) \in M_1$. Рассматривая производные, можно показать, что они удовлетворяют оценкам, входящим в определение класса функций $\mathcal{L}$, и т.д.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – матрица якобиана DF^j . Вычисления показывают, что

$$\lim_{s \rightarrow 0} a_{i1}(s) = a_{i1}(0) \neq 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0} a_{i2}(s) = a_{i2}(0) = 0.$$

Поэтому собственные числа и собственные направления оператора $D\Phi$ в точке $\Gamma(E)$, непрерывно зависящие от s , сходятся при $s \rightarrow 0$ к собственным числам и собственным на-

правлениям оператора $D\hat{\Phi}$. При $s = 0$ собственное направление, соответствующее собственному числу $\lambda = a_{11}$ ($|a_{11}| > 1$ для $D\Phi$), определяется соотношением $a_{21}x = a_{11}y$, а $\lambda = 0$ – уравнением $x = 0$. Следовательно, при $s = 0$ локальное устойчивое многообразие касается прямой $x = 0$ в неподвижной точке. В силу непрерывной зависимости от s при малых s угол наклона этого многообразия в окрестности этой точки по модулю не будет превышать $\tilde{n}/2$ и, таким образом, данное многообразие трансверсально пересекает графики кривых из класса $\mathcal{L}$. Зафиксируем λ и s , гарантирующие выполнение лемм 3 и 4. В этом случае

- 1) единственное инвариантное подмножество в E_{-1} – неподвижная гиперболическая (типа “седло”) точка отображения Φ ;
- 2) в E_{-1} есть отличные от $\tilde{E}$ дуги $W^u(\Gamma(E))$, которые на $E_{-1}(\Gamma(E))$ трансверсально пересекаются с $W_{\text{loc}}^s(\Gamma(E))$.

В заключение докажем еще одно утверждение геометрической природы. Его полезность особенно заметна, когда значения параметра s нельзя считать заведомо малыми. Так, в семействах отображений вида (1) $(x, y) \mapsto (16\lambda x(1-x)y(1-y), x)$ и $(x, y) \mapsto (\lambda \sin(\pi x) \sin(\pi y), x)$ $s = 1$ и потому сформулированная выше теорема к ним не применима. Однако (это можно проверить вычислением), существуют значения $\lambda < 1$ такие, что для них выполняются условия (а значит, и выводы) данного утверждения.

Пусть $\bar{\lambda}, \bar{s}, \bar{s} > 0$ такие, что при $\bar{\lambda} < \lambda < \bar{\lambda}$ и $\bar{s} < s < \bar{s}$ множество $\tilde{E}$ гомеоморфно отрезку прямой.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если существуют $\lambda', \lambda'', s', s''$ такие, что $\bar{\lambda} < \lambda' < \lambda'' < \bar{\lambda}$, $\bar{s} < s' < s'' < \bar{s}$ и при $s' < s < s''$, $\lambda' < \lambda < \lambda''$ множество $\Gamma(E)$ гиперболическое, а также справедливы соотношения: $W_{\text{loc}}^s(\Gamma(E)) \cap AB = \emptyset$, $W_{\text{loc}}^s(\Gamma(E)) \cap \Phi(AB) = \emptyset$, $W_{\text{loc}}^s(\Gamma(E)) \cap \Phi(A)C = \emptyset$, $\Phi^2(AB) \cap M_4 = \emptyset$, $\Phi^3(AB) \cap M_4 = \emptyset$, то существует точка $\bar{P}$ такая, что $\bar{P} \cap \Gamma(E) = \emptyset$, в которой $W_{\text{loc}}^s(\Gamma(E))$ и $W^u(\Gamma(E))$ пересекаются неустранимым образом.

Каждая трансверсальная гомоклиническая точка является неустранимой. Обратное неверно. Но в каждой C^1 -малой окрестности динамической системы с неустранимой гомоклинической точкой найдется система, у которой в окрестности данной точки есть трансверсальная гомоклиническая точка. И значит, в силу [7] справедливо

СЛЕДСТВИЕ. Если выполняются условия утверждения, тогда для любого $\zeta > 0$ существует ζ -близкое (в C^1 -топологии) к F отображение $\tilde{F}$, имеющее (в фазовом пространстве) области с хаотическим в смысле Ли-Йорка поведением траекторий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ. Учитывая то, что доказательства, когда $\Gamma(E)$ – точка или пара точек, аналогичны, что видно даже из однотипности рис. 1 и 2, иллюстрирующих их, мы ограничимся изложением его для случая, когда $\Gamma(E)$ – точка.

Так как $\Gamma(E)$ – гиперболическая неподвижная точка, то $\tilde{E}$ – локальное неустойчивое многообразие Φ в $\Gamma(E)$. Следовательно, $W^u(\Gamma(E)) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Phi^n(\tilde{E})$.

Покажем, что существуют отличные от $\tilde{E}$ дуги $W^u(\Gamma(E))$, делящие E_{-1} на две части таким же образом, что и $\tilde{E}$. Пусть $Q = \Phi(\tilde{E}) \cap \{(x, y) : x = q, y > q\}$. Тогда дуга $\Phi(Q\Gamma(E))$ может быть представлена в виде объединения дуг $\Gamma(E)\tilde{T}$ и $\tilde{T}Q$, где $T = AB \cap \Phi(\tilde{E})$, $\tilde{T} = \Phi(T)$, $\tilde{Q} = \Phi(Q)$.

Поскольку $\Phi(\Gamma(E)T) = \Gamma(E)\tilde{T}$, а $\Phi(\tilde{T}) \cap M_4 = \emptyset$, то $\Phi(\Gamma(E)\tilde{T}) \subset \Gamma(E)Q$.