Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Егишянц, Е. И. Островский, Аппроксимация случайных полей обобщенными линейными сплайнами, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 5, 690–696

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1335>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 16:23:07

УДК 519.526+517.518.8

АППРОКСИМАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ ОБОБЩЕННЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ СПЛАЙНАМИ

С. А. Егишянц, Е. И. Островский

В статье рассматривается задача о восстановлении случайного процесса или поля по известным его значениям в некоторой конечной сетке. Эта задача поставлена и решена в достаточно общей форме, причем показано, что даже в простейшем случае аппроксимации случайного процесса обобщенными линейными сплайнами нормированная должным образом погрешность приближения будет иметь экспоненциально убывающий “хвост” распределения.

Библиография: 12 названий.

В данной статье рассматривается известная и часто встречающаяся на практике задача о восстановлении случайного процесса или поля (СП) по известным его значениям в некоторой конечной сетке. Ниже эта задача будет поставлена и решена в достаточно общей форме, причем будет показано, что даже в простейшем случае аппроксимации СП обобщенными линейными сплайнами нормированная должным образом погрешность приближения будет иметь экспоненциально убывающий “хвост” распределения.

В качестве возможных применений наших результатов упомянем задачи статистического анализа СП по значениям его реализаций в конечной сетке [1], а также метод Монте-Карло [2], [3].

1. Введение. Пусть $\xi(t)$ – сепарабельное центрированное случайное поле (СП), определенное, помимо вероятностного пространства, на некотором метрическом пространстве (T, d) , $t \in T$. Предположим, что для поля $\xi(t)$ выполняется условие Крамера равномерно по $t \in T$, т.е. существует константа $\lambda_0 > 0$ такая, что

$$\sup_{\varepsilon=\pm 1, t \in T} \mathbf{E} \exp(\varepsilon \lambda \xi(t)) < \infty$$

при всех $\lambda \in (-\lambda_0, \lambda_0)$. Тогда на интервале $\lambda \in (-\lambda_0, \lambda_0)$ определена функция

$$\varphi(\lambda) = \sup_{\varepsilon=\pm 1, t \in T} \ln \mathbf{E} \exp(\varepsilon \lambda \xi(t)).$$

Легко видеть, что $\varphi(0) = 0$ и, при этом, если $\lambda_0 = \infty$, то $\varphi(\lambda)/\lambda \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Согласно [4] и [5], с помощью функции $\varphi(\lambda)$ вводится банахово пространство случайных величин η с конечной нормой

$$\|\eta\| = \sup_{\varepsilon=\pm 1, \lambda \in (-\lambda_0, \lambda_0), \lambda \neq 0} \frac{\varphi^{-1}(\ln \mathbf{E} \exp(\varepsilon \lambda \eta))}{|\lambda|},$$

где $\varphi^{-1}(x)$ – функция, обратная $\varphi(x)$.

Естественную метрику $d(t, s)$ на множестве T определим выражением $d(t, s) = \|\xi(t) - \xi(s)\|$. Преобразование Юнга–Фенхеля функции $\varphi(\lambda)$ [6] обозначим

$$\varphi^*(x) = \sup_{\lambda \in (-\lambda_0, \lambda_0)} (\lambda x - \varphi(\lambda)).$$

Положим далее $\pi(u) = 1/(\varphi^{**}(u))$.

Пусть $B(t, \delta) = \{s \in T : d(t, s) \leq \delta\}$ – d -шар радиуса δ с центром в точке $t \in T$. Наименьшее число d -шаров радиуса $\varepsilon > 0$, покрывающих некоторое подмножество S пространства T , обозначим через $N(S, d, \varepsilon)$. *Энтропией множества S* называется функция $H(S, d, \varepsilon) = \ln N(S, d, \varepsilon)$. Назовем поле $\xi(t)$ *локально однородным* на множестве T , если для любого $\varepsilon > 0$

$$h(\varepsilon) = \sup_{t \in T} \sup_{\delta > 0} H(B(t, \delta), d, \delta\varepsilon) < \infty. \quad (1)$$

Если, к примеру, T – ограниченное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^k$ и $d(t, s) \sim d_0|t - s|^\alpha$ при $t - s \rightarrow 0$, $\alpha \in (0, 1)$, d_0 – константа, то $h_0^- + (k/\alpha) \ln(1/\varepsilon) \leq h(\varepsilon) \leq h_0^+ + (k/\alpha) \ln(1/\varepsilon)$, и, следовательно, условие (1) выполнено.

Для решения поставленной задачи нужна оценка сверху распределения максимума случайного поля $\xi(t)$ при $t \in S \subset T$. Наиболее точные оценки приводятся в [7] и [8]:

Если $\xi(t)$ – локально однородное на множестве (S, d) СП, $\|\xi(t)\| = 1$ и сходится энтропийный ряд Дадли $\sum_n 2^{-n} h(S, d, 2^{-n})$, то

$$P\left(\sup_{t \in S} \xi(t) > u\right) \leq C_1 N(S, d, \pi(u)) e^{-\varphi^*(u)}, \quad (2)$$

где

$$C_1 = \exp\left(1 + \inf_{0 < p < 1} (1 - p) \sum_{n=1}^{\infty} p^n h(S, d, p^{n-1})\right).$$

Пусть $S(\delta)$ – некоторая конечная сетка точек t_i множества T ,

$$\delta = \sup_{t \in T} \min_{t_i \in S(\delta)} d(t, t_i).$$

В $S(\delta)$ выделим подмножества $S_t(\delta) = \{t_i \in S(\delta) : d(t, t_i) \leq C_2 \delta\}$, $C_2 > 1$. Обозначим число элементов в $S_t(\delta)$ через $m(t, \delta)$. Константу C_2 разумно определять таким образом, чтобы выполнялось соотношение $\inf_{t \in T} m(t, \delta) > 1$. Если, к примеру, $T \subset \mathbb{R}^k$ и $d(t, s) \sim d_0|t - s|$, $t - s \rightarrow 0$, то целесообразно принять $C_2 = 2\sqrt{k}$.

Обобщенным линейным сплайном для СП $\xi(t)$ назовем функцию

$$\hat{\xi}(t) = \sum_{i=1}^{m(t, \delta)} \alpha_i(t) \xi(t_i), \quad t_i \in S_t(\delta), \quad \alpha_i(t) \geq 0, \quad \forall t \in T \quad \sum_i \alpha_i(t) = 1. \quad (3)$$

Мы не будем здесь конструктивно определять коэффициенты $\alpha_i(t)$ в (3), желая подчеркнуть, что все полученные ниже результаты справедливы для любых сплайнов $\hat{\xi}(t)$, представимых в виде (3). В качестве примера можно указать на регрессионные сплайны [9], а также классические сплайны [10, с. 131–132], для которых

$$\alpha_i(t) = \frac{1}{m(t, \delta) - 1} \sum_{t_j \in S_t(\delta), t_j \neq t_i} d(t, t_j) \bigg/ \sum_{t_j \in S_t(\delta)} d(t, t_j)$$

при $m(t) > 1$. Обозначим еще

$$\omega_\xi(\delta) = \sup_{t \in T} |\xi(t) - \hat{\xi}(t)|.$$

2. Оценки погрешности сверху. Далее будут получены важные для практики оценки сверху распределения погрешности аппроксимации поля $\xi(t)$ сплайном $\hat{\xi}(t)$ типа

$$P_T(u) = P\left(\sup_{\delta \in (0, \delta_0)} \frac{\omega_\xi(\delta)}{g(\delta)} > u\right) \leq C_3 e^{-C_4 u}, \quad (4)$$

где $g(\delta)$ – некоторая неслучайная функция, $\delta_0 > 0$, постоянные C_3 и C_4 не зависят от u . Параллельно выводится оценка верхнего предела вида

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega_\xi(\delta)}{g(\delta)} \leq 1 \quad (\text{с вероятностью } 1) \quad (5)$$

Докажем сначала две небольшие леммы.

ЛЕММА 1. $\forall \gamma > 1, \forall x$ выполнено $\varphi^*(\gamma x) \geq \gamma \varphi^*(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma > 1$. Для выпуклой функции $\varphi^*(x)$ по определению при любом $\alpha \in [0, 1]$ и всех значениях x_1 и x_2 справедливо соотношение

$$\varphi^*(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha \varphi^*(x_1) + (1 - \alpha)\varphi^*(x_2).$$

Выберем $x_1 = 0, x_2 = \gamma x, \alpha = 1 - 1/\gamma$. Тогда, учитывая тот факт, что $\varphi^*(0) = 0$, имеем $\varphi^*(x) \leq \varphi^*(\gamma x)/\gamma$, т.е. $\varphi^*(\gamma x) \geq \gamma \varphi^*(x)$. Таким образом, лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Справедливо неравенство

$$\sup_{t \in T} \|\xi(t) - \hat{\xi}(t)\| \leq C_2 \delta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формуле (3)

$$\begin{aligned} \sup_{t \in T} \|\xi(t) - \hat{\xi}(t)\| &= \sup_{t \in T} \left\| \xi(t) - \sum_{i=1}^{m(t, \delta)} \alpha_i(t) \xi(t_i) \right\| = \sup_{t \in T} \left\| \sum_{i=1}^{m(t, \delta)} \alpha_i(t) (\xi(t) - \xi(t_i)) \right\| \\ &\leq \sup_{t \in T} \left\| \max_{t_i \in S_t(\delta)} |\xi(t) - \xi(t_i)| \sum_{i=1}^{m(t, \delta)} \alpha_i(t) \right\| \leq \sup_{t \in T} \max_{t_i \in S_t(\delta)} \|\xi(t) - \xi(t_i)\| \leq C_2 \delta, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Обозначим $g(\delta) = C_2 \delta \varphi^{*-1}(h(C_2 \delta))$, где $\varphi^{*-1}(x)$ – функция, обратная $\varphi^*(x)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть

- а) СП $\xi(t)$ локально однородно на множестве T ,
- б) $\sum_n 2^{-n} h(2^{-n}) < \infty$,
- в) $h(\pi(u)) = o(\varphi^*(u))$ при $u \rightarrow \infty$,
- г) существует последовательность $y_n \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{y_{n-1}} = 1$$

$$u \forall \varepsilon > 0 \sum_n \exp(-\varepsilon h(y_n)) < \infty.$$

Тогда справедливы неравенства (4) и (5), где C_3 и C_4 определяются ниже.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\delta_n \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Обозначим

$$P_n(u) = P\left(\sup_{\delta \in (\delta_n, \delta_{n-1})} \frac{\omega_\xi(\delta)}{g(\delta)} > u\right).$$

Оценим вероятность $P_n(u)$ сверху с помощью формулы (2):

$$P_n(u) \leq P\left(\frac{\omega_\xi(\delta_{n-1})}{C_2 \delta_n \varphi^{*-1}(h(C_2 \delta_{n-1}))} > u\right) = P\left(\frac{\omega_\xi(\delta_{n-1})}{C_2 \delta_{n-1}} > u \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \varphi^{*-1}(h(C_2 \delta_{n-1}))\right).$$

Обозначим

$$u_n = u \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \varphi^{*-1}(h(C_2 \delta_{n-1})).$$

По условию г) найдутся такие n_0 и последовательность y_n , что выбирая $\delta_n = y_n/C_2$, при всех $n \geq n_0$ будем иметь

$$\delta_n \geq \frac{1 + \varepsilon/2}{1 + \varepsilon} \delta_{n-1}.$$

Таким образом,

$$u_n \geq u \frac{1 + \varepsilon/2}{1 + \varepsilon} \varphi^{*-1}(h(C_2 \delta_{n-1})).$$

Очевидно, что $u_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Теперь

$$P_n(u) \leq C_1 N\left(T, \frac{d}{C_2 \delta_{n-1}}, \pi(u_n)\right) \exp(-\varphi^*(u_n)).$$

В силу локальной однородности СП $\xi(t)$ имеем

$$\begin{aligned} N\left(T, \frac{d}{C_2 \delta_{n-1}}, \pi(u_n)\right) &= \exp\left(H\left(T, \frac{d}{C_2 \delta_{n-1}}, \pi(u_n)\right)\right) \\ &\leq C_5 \exp(h(C_2 \delta_{n-1}) + h(\pi(u_n))), \end{aligned}$$

где $C_5 = N(T, d, 1)$. Согласно условию в) теоремы

$$h(\pi(u_n)) \leq \frac{\varepsilon/4}{1 + \varepsilon/2} \varphi^*(u_n)$$

при достаточно больших n . Поэтому

$$P_n(u) \leq C_6 \exp\left(h(C_2 \delta_{n-1}) - \frac{\varepsilon/4}{1 + \varepsilon/2} \varphi^*(u_n)\right),$$

где $C_6 = C_1 C_5$.

Докажем сначала (5). Для этого оценим $P_n(1 + \varepsilon)$, используя лемму 1: $P_n(1 + \varepsilon) \leq C_6 \exp(-(\varepsilon/4)h(C_2 \delta_{n-1}))$. В силу выбора δ_n и согласно условию г) теоремы

$$\sum_n P_n(1 + \varepsilon) \leq C_6 \sum_n \exp\left(-\frac{\varepsilon}{4} h(y_n)\right) < \infty,$$

так что (5) следует из леммы Бореля–Кантелли. Теперь докажем (4). Очевидно, что $P_T(u) \leq \sum_n P_n(u)$. Поэтому при всех $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, обозначая

$$C_7 = \frac{1 + \varepsilon_0/4}{1 + \varepsilon_0},$$

получим

$$\begin{aligned} P_T(u) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-(C_7 u - 1)h(y_{n-1})) \\ &= \exp(-(C_7 u - 1)h(y_1)) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-(C_7 u - 1)h(y_{n-1}) - h(y_1)) \right). \end{aligned}$$

Последний ряд по условию г) сходится при любом $u \geq u_0 > 1/C_7$. Обозначив произведение величины, стоящей в фигурных скобках, на $\exp(h(y_1))$ через C_3 , а $C_7 h(y_1)$ – через C_4 , получим (4). Теорема 1 полностью доказана.

Рассмотрим теперь нецентрированное поле $\tau(t) = \xi(t) + a(t)$, где $a(t)$ – некоторая неслучайная функция.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, существует некоторая константа C_8 такая, что для любых $t, s \in T$ выполнено соотношение

$$|a(t) - a(s)| \leq C_8 d(t, s). \quad (6)$$

Тогда с вероятностью 1

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega_{\tau}(\delta)}{g(\delta)} \leq 1 \quad (7)$$

и при этом

$$P_T(u) = P\left(\sup_{\delta \in (0, \delta_0)} \frac{\omega_{\tau}(\delta)}{g(\delta)} > u\right) \leq C_3 e^{-C_9 u}. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию теоремы $\omega_a(\delta) \leq C_8 d(t, s)$. Как следует из теоремы 1, $\omega_{\xi}(\delta) \leq \eta C_2 \delta \varphi^{*-1}(h(C_2 \delta))$, где

$$\eta = \sup_{\delta \in (0, \delta_0)} \frac{\omega_{\xi}(\delta)}{C_2 \delta \varphi^{*-1}(h(C_2 \delta))}$$

– случайная величина с экспоненциально убывающим “хвостом” распределения. Поэтому

$$\omega_{\tau}(\delta) \leq \omega_{\xi}(\delta) + \omega_a(\delta) \leq C_2 \delta (\eta \varphi^{*-1}(h(C_2 \delta)) + C_8) \leq \eta C_2 \delta \varphi^{*-1}(h(C_2 \delta)) (1 + \beta(\delta)),$$

где $\beta(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Согласно (4) $P_T(u) \leq C_3 \exp(-C_4 u / (1 + \beta(\delta_0)))$. Обозначая теперь через C_9 величину $C_4 u / (1 + \beta(\delta_0))$, приходим к (8). Соотношение (7) сразу же вытекает из теоремы 1. Итак, теорема 2 доказана.

3. Примеры.

ПРИМЕР 1. Пусть $h(\varepsilon) \leq h_0 + \varkappa \ln(1/\varepsilon)$, тогда если $\ln \varphi^{*'}(u) = o(\varphi^*(u))$ при $u \rightarrow \infty$ и выполнено условие (6), то

$$P\left(\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega_\tau(\delta)}{\delta \varphi^{*-1}(\varkappa \ln(1/\delta))} \leq C_2\right) = 1$$

и при этом

$$P\left(\sup_{\delta \in (0, \delta_0)} \frac{\omega_\tau(\delta)}{C_2 \delta \varphi^{*-1}(\varkappa \ln(1/(C_2 \delta)))} > u\right) \leq C_3 e^{-C_9 u}.$$

ПРИМЕР 2. Пусть $h(\varepsilon) \leq C_{10} \varepsilon^{-\beta}$, $\beta \in (0, 1)$ и при $u \rightarrow \infty$ $u^\beta \varphi^{*'\beta}(u) = o(\varphi^*(u))$. Тогда если выполнено условие (6), то для $g(\delta) = C_2 \delta \varphi^{*-1}(C_{10} (C_2 \delta)^{-\beta})$ справедливы формулы (4) и (5).

4. Нижняя оценка. Покажем на примере, что логарифмический множитель в $g(\delta)$ существенен, т.е. что $g(\delta)$ дает точную по порядку асимптотику (в смысле верхнего предела) функции $\omega_\tau(\delta)$.

Пусть $\xi(t)$ – центрированный гауссовский стационарный процесс с ковариационной функцией $r(t) = e^{-|t|^\alpha}$, $\alpha \in (0, 2]$, $t \in [0, 1]$. Рассмотрим классический сплайн первого порядка: t_i – минимальная δ -сеть отрезка $[0, 1]$ в метрике d , $i = 1, \dots, n$. Тогда

$$\hat{\xi}(t) = \xi(t_i) + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \xi(t_{i+1}) \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

При этом $d(t, s) = \sqrt{D(\xi(t) - \xi(s))} \sim \sqrt{2}|t - s|^{\alpha/2}$, $t - s \rightarrow 0$, $h(\varepsilon) \leq h_0 + (2/\alpha) \ln(1/\varepsilon)$, $n \leq \varepsilon^{-2/\alpha}$.

Обозначим

$$\eta_\delta(k) = \left(\xi\left(\frac{k+0.5}{n}\right) - 0.5 \left(\xi\left(\frac{k}{n}\right) + \xi\left(\frac{k+1}{n}\right) \right) \right) \frac{n^{\alpha/2}}{\sqrt{2}}.$$

Прямым вычислением легко показать, что коэффициент корреляции

$$\rho(k) = \rho(\eta_\delta(0), \eta_\delta(k)) \leq \frac{C_{11}}{k^{\alpha/2}}, \quad D\eta_\delta(k) \sim 1, \quad \delta \rightarrow 0.$$

Очевидно, что

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega_\xi(\delta)}{\delta \sqrt{(4/\alpha) \ln(1/\delta)}} \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{1 \leq k \leq n} \eta_\delta(k)}{\sqrt{2 \ln n}}.$$

Согласно [11], последний предел с вероятностью 1 равен 1. В то же время, из (7) вытекает неравенство

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega_\xi(\delta)}{\delta \sqrt{(4/\alpha) \ln(1/\delta)}} \leq 1 \quad (\text{с вероятностью } 1).$$

Таким образом, построен пример, в котором

$$P\left(\overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega_\xi(\delta)}{g(\delta)} = 1\right) = 1.$$

Покажем на том же примере, что оценка (8) вероятности $P_T(u)$ не улучшаема по порядку показателя экспоненты:

$$\begin{aligned} P_T(u) &\geq \mathbf{P}\left(\sup_{n \geq n_0} \frac{\max_{1 \leq k \leq n} \eta_\delta(k)}{\sqrt{2 \ln n}} > u\right) \\ &\geq \sup_{n \geq n_0} \mathbf{P}\left(\frac{\max_{1 \leq k \leq n} \eta_\delta(k)}{\sqrt{2 \ln n}} > u\right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{\max_{1 \leq k \leq n} \eta_\delta(k)}{\sqrt{2 \ln n}} > u\right). \end{aligned}$$

Согласно [12, с. 100], последний предел равен $1 - \exp(-\exp(-u))$, что при $u \rightarrow \infty$ эквивалентно $\exp(-u)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Беляев Ю. К., Симонян А. Х., Красавкина В. А. Квантование по времени реализаций недифференцируемых гауссовских процессов // Изв. АН СССР. Сер. техн. киберн. 1976. № 4. С. 139–147.
- [2] Фролов А. С., Ченцов Н. Н. О вычислении методом Монте-Карло определенных интегралов, зависящих от параметра // ЖВМиМФ. 1962. Т. 2. № 4. С. 714–717.
- [3] Дмитриевский В. А., Островский Е. И. Оценка погрешности метода зависимых испытаний // ЖВМиМФ. 1976. Т. 16. № 5. С. 1312–1316.
- [4] Островский Е. И. Обобщение нормы Булдыгина–Козаченко и центральная предельная теорема в банаховом пространстве // Теор. вероятн. и ее примен. 1982. Т. 27. № 3. С. 618.
- [5] Козаченко Ю. В., Островский Е. И. Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских // Теор. вероятн. и матем. статистика. № 32. Киев: КГУ, 1985. С. 42–53.
- [6] Рокафеллар В. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1969.
- [7] Островский Е. И. Двусторонние экспоненциальные оценки для распределения максимума случайных полей // УМН. 1992. Т. 47. № 5. С. 225–226.
- [8] Ostrovskii E. I. Two-sides exponential inequality for the distribution of the norm of Banach space valued random variables // New Trends in Probability and Statistics. V. 1. Utrecht–Tokyo: Mokslas, 1993. P. 246–254.
- [9] Островский Е. И. Регрессионные сплайны // Исследование нелинейных моделей матем. физики. Обнинск: ИАТЭ, 1990. С. 103–110.
- [10] Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976.
- [11] Berman S. M. Limit theorem for the maximum term in stationary sequences // Ann. Math. Stat. 1964. V. 35. P. 502–516.
- [12] Лидбеттер М., Ротсен Х., Линдгрэн Т. Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.

Обнинский институт атомной энергетики

Поступило

09.11.95

Исправленный вариант

28.07.97