Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Колесов, Диффузионная неустойчивость однородного цикла, бифурцирующего из петли сепаратрисы, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 5, 697–708

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1336>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 18:29:30

УДК 517.926

ДИФфуЗИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОРОДНОГО ЦИКЛА, БИФУРЦИРУЮЩЕГО ИЗ ПЕТЛИ СЕПАРАТРИСЫ

А. Ю. Колесов

Рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u, \mu), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0.$$

Здесь $u \in \mathbb{R}^2$, $D = \text{diag}\{d_1, d_2\}$, $d_1, d_2 > 0$, а гладкая по совокупности переменных вектор-функция F такова, что при $0 < \mu \ll 1$ у краевой задачи имеется однородный (не зависящий от x) цикл, бифурцирующий из петли сепаратрисы седла. Устанавливаются условия устойчивости и неустойчивости этого цикла и дается их геометрическая интерпретация.

Библиография: 8 названий.

Параболические системы типа реакция-диффузия с граничными условиями Неймана, имеющие однородный (не зависящий от пространственной переменной) цикл, встречаются во многих приложениях [1], [2]. Вопрос же об устойчивости однородного цикла актуален в связи с тем, что наряду с известной теоремой Тьюринга–Пригожина [3] он объясняет природу возникновения пространственно неоднородных структур в однородных средах. К настоящему времени этот вопрос изучен для случаев, когда однородный цикл близок к гармоническому или является релаксационным (соответствующие результаты были получены в [4] и впоследствии вошли в монографии [5], [6]). Ниже данный вопрос исследуется для нового класса систем, однородный цикл которых бифурцирует из петли сепаратрисы седла.

1. Постановка задачи. На отрезке $0 \leq x \leq \pi$ рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u, \mu), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0, \quad (1)$$

где $u \in \mathbb{R}^2$, $D = \text{diag}\{d_1, d_2\}$, $d_1, d_2 > 0$, а вектор-функция F принадлежит классу $C^\infty(\mathbb{R}^2 \times [0, \mu_0]; \mathbb{R}^2)$, $\mu_0 > 0$. В качестве фазового пространства (пространства начальных условий $u(0, x)$) краевой задачи (1) возьмем гильбертово пространство $E = W_2^1([0, \pi]; \mathbb{R}^2)$.

Дальнейшие ограничения, накладываемые на задачу (1), связаны с системой на плоскости

$$\dot{u} = F(u, \mu). \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00207.

УСЛОВИЕ 1. Считаем, что при $\mu = 0$, во-первых, система (2) имеет седловое нулевое состояние равновесия, причем собственные значения $-\lambda_-$, λ_+ матрицы $A_0 = \partial_u F(0, 0)$ таковы, что $0 < \lambda_+ < \lambda_-$; во-вторых, имеется петля сепаратрисы Γ_0 (см. рис. 1, 2).

Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

Для формулировки следующего условия фиксируем произвольную точку $A \in \Gamma_0$, $A \neq 0$, и рассмотрим отрезок нормали l_1 к кривой Γ_0 , проходящий через эту точку (см. рис. 3). В качестве параметра s на l_1 возьмем евклидово расстояние до точки A . При этом в случае петли Γ_0 , изображенной на рис. 1, указанное расстояние берется со знаком “+” по направлению внутренней нормали к области Ω (см. рис. 3), ограничиваемой кривой Γ_0 , и со знаком “−” в противоположном направлении. В случае же петли Γ_0 , показанной на рис. 2, знаки параметра s изменяются на противоположные.

При $0 < \mu \ll 1$ нулевое состояние равновесия системы (2) переходит в седловое состояние равновесия $O(\mu)$, устойчивая $L_+(\mu)$ и неустойчивая $L_-(\mu)$ сепаратрисы которого, вообще говоря, уже не образуют петлю (см. рис. 4). Обозначим через $s_+(\mu)$ и $s_-(\mu)$, $s_\pm(0) = 0$, соответственно координаты точек их пересечения с трансверсалью l_1 и положим $\varkappa(\mu) = s_+(\mu) - s_-(\mu)$.

УСЛОВИЕ 2. Предполагаем, что

$$\varkappa'_0 = \left. \frac{d\varkappa}{d\mu} \right|_{\mu=0} > 0.$$

Как известно [7], условия 1, 2 гарантируют существование у системы (2) при всех $0 < \mu \ll 1$ единственного экспоненциально орбитально устойчивого цикла (см. рис. 4)

$$\Gamma(\mu) = \{u : u = u_0(t, \mu), u_0(0, \mu) \in l_1\}, \quad (3)$$

бифурцирующего из петли Γ_0 . В дальнейшем, однако, нам потребуются более детальные его асимптотические свойства. Для их выявления рассмотрим собственные векторы e_+ и e_- матрицы A_0 , отвечающие ее собственным значениям λ_+ и $-\lambda_-$, причем считаем, что направление e_+ совпадает с движением фазовой точки по кривой Γ_0 , а направление e_- ему противоположно (см. рис. 3). Введем в рассмотрение выходящий из начала координат по направлению $e_+ + e_-$ достаточно малый отрезок l_2 (см. рис. 3) и обозначим соответственно через $-\tau_1(\mu)$ и $\tau_2(\mu)$ первые отрицательный и положительный моменты времени такие, что

$$u_0(-\tau_1(\mu), \mu) \in l_2, \quad u_0(\tau_2(\mu), \mu) \in l_2.$$

Тогда, очевидно, период $T(\mu)$ цикла (3) равен $\tau_1(\mu) + \tau_2(\mu)$.

ЛЕММА 1. *Справедливы асимптотические формулы*

$$\tau_1(\mu) = \frac{\sigma_0}{\lambda_+ + \lambda_-} \ln \frac{1}{\mu} + O(1), \quad \tau_2(\mu) = \frac{1}{\lambda_+ + \lambda_-} \ln \frac{1}{\mu} + O(1) \quad (4)$$

и равномерное по $-\tau_1(\mu) \leq t \leq \tau_2(\mu)$ асимптотическое представление

$$u_0(t, \mu) = u_0(t) + O(\mu^\gamma), \quad (5)$$

где $\sigma_0 = \lambda_-/\lambda_+$, $\gamma = \sigma_0/(\sigma_0 + 1)$, $u_0(t)$ – решение системы (2) при $\mu = 0$, отвечающее петле Γ_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проясним сначала сам факт существования цикла (3). С этой целью будем считать, что на секущей l_1 при $\mu > 0$ выбран тот же самый параметр s , но теперь значению $s = 0$ соответствует точка $l_1 \cap L_-(\mu)$. Тогда в силу условия 1 на этой секущей при $0 \leq s \leq s_0$, где $s_0 > 0$ достаточно мало, определено отображение последования Π по траекториям системы (2). Покажем, что для него имеет место представление

$$\Pi: s \rightarrow \kappa(\mu) + c(\mu)s^{\sigma(\mu)} + \varphi(s, \mu), \quad (6)$$

где $\kappa(\mu)$ – функция из условия 2; $c(\mu), \sigma(\mu)$ – некоторые функции класса C^1 такие, что $c(0) > 0$, $\sigma(0) = \sigma_0$; для непрерывно дифференцируемого по s, μ , остатка φ при $s \rightarrow +0$ равномерно по μ справедливы равенства

$$\varphi(s, \mu) = o(s^{\sigma_0}), \quad \partial_s \varphi(s, \mu) = o(s^{\sigma_0-1}). \quad (7)$$

Обоснование всех перечисленных свойств базируется на известном [8] факте о существовании замены переменных класса C^1 , приводящей в некоторой окрестности седла систему (2) к линейной нормальной форме. Для более детального описания этой замены, считая (это не ограничивает общности), что $F(0, \mu) \equiv 0$, введем в рассмотрение гладкие по μ собственные векторы $e_+(\mu), e_-(\mu)$ матрицы $\partial_u F(0, \mu)$, отвечающие ее собственным числам $\lambda_+(\mu), -\lambda_-(\mu)$ и обращающиеся при $\mu = 0$ во введенные выше собственные векторы e_+ и e_- матрицы A_0 . Тогда интересующая нас замена может быть представлена в виде

$$u = G(\mu)y + H(y, \mu), \quad y = \text{colon}(y_1, y_2), \quad (8)$$

где $G(\mu) = [e_-(\mu), e_+(\mu)]$, а непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных вектор-функция H такова, что $H(0, \mu) \equiv 0$, $\partial_u H(0, \mu) \equiv 0$. Результатом же ее применения к системе (2) служит линейная система

$$\dot{y}_1 = -\lambda_-(\mu)y_1, \quad \dot{y}_2 = \lambda_+(\mu)y_2. \quad (9)$$

Для того чтобы воспользоваться заменой (8) при анализе отображения Π , рассмотрим вспомогательные трансверсали $\Sigma_j \{ (y_1, y_2) : y_j = q \}$, $j = 1, 2$, где $q > 0$ достаточно мало. В качестве параметра s на Σ_1 и Σ_2 возьмем соответственно $s = y_1$ и $s = y_2$. Представим, далее, Π в виде $\Pi_3 \Pi_2 \Pi_1$, где отображение Π_1 действует из l_1 в Σ_1 , Π_2 – из Σ_1 в Σ_2 , Π_3 – из Σ_2 в l_1 , и проанализируем каждое из этих отображений в отдельности.

Решая систему (9), сингулярную часть отображения Π , т.е. Π_2 , находим в явном виде:

$$\Pi_2 : s \rightarrow q^{1-\sigma(\mu)} s^{\sigma(\mu)}, \quad \sigma(\mu) = \frac{\lambda_-(\mu)}{\lambda_+(\mu)}. \quad (10)$$

Отображения же

$$\Pi_1 : s \rightarrow f(s, \mu), \quad \Pi_3 : s \rightarrow g(s, \mu) \quad (11)$$

регулярны, так как время, в течение которого по траекториям системы (2) попадаем из l_1 на Σ_1 или из Σ_2 на l_1 , имеет порядок 1 (при $s, \mu \rightarrow 0$ оно стремится к соответствующему времени для траектории Γ_0). Отсюда и из общих свойств решений систем на плоскости заключаем, что функции f, g непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных и, кроме того,

$$f(0, \mu) \equiv 0, \quad \partial_s f(0, 0) > 0, \quad g(0, \mu) = \varkappa(\mu), \quad \partial_s g(0, 0) > 0. \quad (12)$$

Остается добавить, что свойства (6), (7) отображения Π вытекают из (10)–(12) очевидным образом.

Учитывая в (6), (7) неравенства $\sigma_0 > 1$, $\varkappa(\mu) > 0$ (см. условия 1, 2), убеждаемся, что на отрезке $0 \leq s \leq s_0$ отображение Π имеет единственную экспоненциально устойчивую неподвижную точку

$$s = s_*(\mu) : s_*(\mu) = \varkappa'_0 \mu + O(\mu^r), \quad r = \min\{2, \sigma_0\}, \quad (13)$$

соответствующую циклу $\Gamma(\mu)$.

Для обоснования асимптотических равенств (4) рассмотрим участок цикла $\Gamma(\mu)$, лежащий между Σ_1 и Σ_2 и задаваемый в переменных (y_1, y_2) формулами

$$y_1 = q \exp(-\lambda_-(\mu)t), \quad y_2 = y_*(\mu) \exp(\lambda_+(\mu)t), \quad (14)$$

где $0 \leq t \leq \bar{\tau}_1(\mu)$,

$$y_*(\mu) = f(s_*(\mu), \mu) \sim \partial_s f(0, 0) \varkappa'_0 \mu, \quad \mu \rightarrow 0, \quad \bar{\tau}_1(\mu) = \frac{1}{\lambda_+(\mu)} \ln \frac{q}{y_*(\mu)}. \quad (15)$$

Заметим, далее, что хотя в переменных (y_1, y_2) отрезок l_2 искривляется, при нахождении главной асимптотики $\tau_1(\mu)$, $\tau_2(\mu)$ его можно заменить на прямую $y_1 = y_2$. Учитывая это обстоятельство, из (14) находим время

$$\bar{\tau}_2(\mu) = \frac{1}{\lambda_-(\mu) + \lambda_+(\mu)} \ln \frac{q}{y_*(\mu)}, \quad (16)$$

в течение которого, двигаясь по циклу $\Gamma(\mu)$, попадаем из Σ_1 на указанную прямую. И наконец, объединяя (15), (16) с очевидными равенствами

$$\tau_1(\mu) = \bar{\tau}_1 - \bar{\tau}_2 + O(1), \quad \tau_2(\mu) = \bar{\tau}_2 + O(1),$$

убеждаемся в справедливости формул (4).

Из равенства (13) для начального условия цикла (3) имеем

$$u_0(0, \mu) = u_0(0) + O(\mu).$$

А отсюда автоматически следует, что при любых фиксированных $t_1, t_2 > 0$ равномерно по $t \in [-t_1, t_2]$

$$u_0(t, \mu) = u_0(t) + O(\mu). \quad (17)$$

Остаток же в формуле (17) “портится” лишь в окрестностях точек $t = -\tau_1(\mu)$ и $t = \tau_2(\mu)$, когда функции (14) приобретают порядок μ^γ . Лемма 1 доказана.

Итак, при выполнении условий 1, 2 и при $0 < \mu \ll 1$ краевая задача (1) имеет пространственно однородный цикл (3), устойчивый по отношению к однородным возмущениям (т.е. в рамках системы (2)). Тем самым, возникает проблема исследования его устойчивости по отношению к произвольным возмущениям, которая и решается в данной работе.

2. Теорема об устойчивости. Условия устойчивости однородного цикла (3) допускают наглядную геометрическую интерпретацию: если при $\mu = 0$ неустойчивое многообразие нулевого седлового состояния равновесия системы (1) по-прежнему однородно, т.е. при учете диффузионных слагаемых у него не появляются дополнительные (пространственно неоднородные) неустойчивые направления, то при $\mu > 0$ устойчивым будет и цикл (3). Точнее говоря, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия 1, 2 и все собственные значения матриц

$$A_0 - k^2 D, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (18)$$

имеют отрицательные действительные части. Тогда однородный цикл (3) краевой задачи (1) орбитально экспоненциально устойчив (в метрике фазового пространства E).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно [4]–[6], за устойчивость цикла (3) по отношению к пространственно неоднородным возмущениям отвечают мультипликаторы систем

$$\dot{h} = (A(t, \mu) - k^2 D)h, \quad A(t, \mu) = \partial_u F|_{u=u_0(t, \mu)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

получающихся из (1) при линеаризации на этом цикле и последующем применении метода Фурье по функциям $\cos kx$, $k = 0, 1, \dots$.

При $\mu = 0$ системы (19) переходят в системы

$$\dot{h} = (A(t) - k^2 D)h, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

в которых при $t \rightarrow -\infty$ и при $t \rightarrow +\infty$ соответственно

$$A(t) - A_0 = O(\exp(\lambda_+ t)), \quad A(t) - A_0 = O(\exp(-\lambda_- t)). \quad (21)$$

Поэтому (см. [8]) главная асимптотика при $t \rightarrow \pm\infty$ решений этих систем определяется из уравнений

$$\dot{h} = (A_0 - k^2 D)h, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда и из гурвицевости матриц (18) для операторов Коши $U_k(t, s)$, $U(s, s) = I$ систем (20) следует оценка

$$\|U_k(t, s)\| \leq M \exp(-\delta(t - s)), \quad t \geq s. \quad (22)$$

Здесь $\|\cdot\|$ – фиксированная матричная норма, $\delta \in (0, \delta_0)$, где

$$\delta_0 = \min_{k \geq 1, j=1,2} \{-\operatorname{Re} \lambda_k^j\} > 0,$$

а λ_k^1, λ_k^2 – собственные числа матриц (18). Символами M, M_1 и т.д. здесь и ниже обозначаем различные, не зависящие от t, s, μ, k , положительные постоянные, точные значения которых несущественны.

При $\mu > 0$, используя вытекающее из (5) асимптотическое представление

$$A(t, \mu) = A(t) + \mu^\gamma \Delta(t, \mu), \quad \max_{-\tau_1(\mu) \leq t \leq \tau_2(\mu)} \|\Delta(t, \mu)\| \leq M, \quad (23)$$

для матриц Коши $U_k(t, s, \mu)$ систем (19) приходим к интегральным уравнениям

$$U_k(t, s, \mu) = U_k(t, s) + \mu^\gamma \int_s^t U_k(t, \tau) \Delta(\tau, \mu) U_k(\tau, s, \mu) d\tau. \quad (24)$$

Учитывая, далее, в (24) оценки (22), (23), для

$$v_k(t, s, \mu) = \|U_k(t, s, \mu)\| \exp \delta(t - s)$$

получаем неравенство

$$v_k(t, s, \mu) \leq M_1 + M_2 \mu^\gamma \int_s^t v_k(\tau, s, \mu) d\tau,$$

из которого, в свою очередь, с помощью леммы Гронвулла выводим оценку

$$v_k(t, s, \mu) \leq M_3, \quad -\tau_1(\mu) \leq s \leq t \leq \tau_2(\mu). \quad (25)$$

Для завершения доказательства рассмотрим матрицы монодромии

$$V_k(\mu) = U_k(\tau_2(\mu), -\tau_1(\mu), \mu)$$

систем (19). Из неравенств (25) и асимптотических формул (4) следует, что

$$\|V_k(\mu)\| \leq M \mu^{\delta/\lambda_+},$$

а значит, при $\mu \rightarrow 0$ равномерно по $k \geq 1$ модули всех мультипликаторов этих систем стремятся к 0. Теорема 1 доказана.

3. Две теоремы о неустойчивости. Перед формулировкой следующей теоремы пределаем ряд вспомогательных построений. Рассмотрим систему

$$\dot{h} = (A(t) + B(\alpha))h, \quad (26)$$

где $B(\alpha) = \operatorname{diag}\{\alpha, -\alpha\}$, а параметр α принадлежит множеству

$$\Lambda = \{\alpha \in \mathbb{R} : \det(A_0 + B(\alpha)) < 0\}. \quad (27)$$

Обратим внимание, что множество (27) либо совпадает с $\mathbb{R}$, либо получается из $\mathbb{R}$ при выбрасывании некоторого отрезка конечной длины. Рассмотрим, далее, собственные значения $-\lambda_-(\alpha), \lambda_+(\alpha), 0 < \lambda_+(\alpha) < \lambda_-(\alpha)$ матрицы $A_0 + B(\alpha)$ и отвечающие им собственные векторы $e_-(\alpha), e_+(\alpha)$, которые выбираем аналитически зависящими от $\alpha \in \Lambda$ и имеющими единичную евклидову норму.

ЛЕММА 2. Система (26) имеет аналитически зависящие от $\alpha \in \Lambda$ решения $h = h_{\pm}(t, \alpha)$ с асимптотикой

$$h_{\pm}(t, \alpha) = (e_{\pm}(\alpha) + o(1)) \exp(\pm \lambda_{\pm}(\alpha)t), \quad t \rightarrow -\infty. \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для построения $h_{+}(t, \alpha)$ выполним в (26) последовательно замены

$$h = e_{+}(\alpha)y_1 + e_{-}(\alpha)y_2, \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R}, \quad y_1 = (1 + v_1) \exp(\lambda_{+}(\alpha)t), \quad y_2 = v_2 \exp(\lambda_{+}(\alpha)t).$$

В результате получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= b_{11}(t, \alpha)(1 + v_1) + b_{12}(t, \alpha)v_2, \\ \dot{v}_2 &= b_{21}(t, \alpha)(1 + v_1) + (b_{22}(t, \alpha) - \lambda_{-}(\alpha) - \lambda_{+}(\alpha))v_2, \end{aligned}$$

для коэффициентов $b_{ij}(t, \alpha)$, $i, j = 1, 2$, которой в силу (21) имеем

$$b_{ij} = O(\exp(\pm \lambda_{\pm}t)), \quad t \rightarrow \mp \infty. \quad (29)$$

Задача же о нахождении решений этой системы, стремящихся к 0 при $t \rightarrow -\infty$, эквивалентна разрешимости системы

$$v_1 = \int_{-\infty}^t (b_{11}(s, \alpha) + b_{12}(s, \alpha)v_2(s)) \exp\left(\int_s^t b_{11}(\tau, \alpha) d\tau\right) ds, \quad (30)$$

$$v_2 = \int_{-\infty}^t (1 + v_1(s)) b_{21}(s, \alpha) \exp\left(\int_s^t (b_{22}(\tau, \alpha) - \lambda_{-}(\alpha) - \lambda_{+}(\alpha)) d\tau\right) ds. \quad (31)$$

Рассмотрим оператор Π , порожденный правыми частями уравнений (30), (31), в пространстве $V(t_0)$ непрерывных и ограниченных при $-\infty < t \leq -t_0$, $t_0 > 0$, вектор-функций $v(t) = \text{col}(v_1, v_2)$ с нормой

$$\|v\| = \sup_{-\infty < t \leq -t_0} (|v_1(t)| + |v_2(t)|).$$

Учитывая в (30), (31) асимптотические равенства (29), убеждаемся, что для любых двух функций $v(t), w(t) \in V(t_0)$

$$\|\Pi v - \Pi w\| \leq M \exp(-\lambda_{+}t_0) \|v - w\|.$$

Поэтому при достаточно большом t_0 к оператору Π применим в пространстве $V(t_0)$ принцип сжимающих отображений, а его единственная неподвижная точка $v(t, \alpha)$ удовлетворяет равенству (также вытекающему из (29))

$$v(t, \alpha) = O(\exp(\lambda_{+}t)), \quad t \rightarrow -\infty.$$

Аналитичность $v(t, \alpha)$ непосредственно следует из аналитичности по α правых частей уравнений (30), (31).

Существование $h_{-}(t, \alpha)$ устанавливается аналогично. Отметим лишь, что в отличие от $h_{+}(t, \alpha)$ это решение определяется неоднозначно, так как наряду с $h_{-}(t, \alpha)$ условиям леммы будет удовлетворять, например, и функция $h_{-} + h_{+}$. Лемма 2 доказана.

Перед формулировкой следующего утверждения рассмотрим функцию

$$c(\alpha) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} (b_{11}(s, \alpha) + b_{12}(s, \alpha)v_2(s, \alpha)) \exp\left(\int_s^{\infty} b_{11}(\tau, \alpha) d\tau\right) ds. \quad (32)$$

Здесь $v_2(t, \alpha)$ – компонента решения системы (30), (31), которая, как будет показано ниже, при $t \rightarrow +\infty$ стремится к 0 с экспоненциальной скоростью.

ЛЕММА 3. При $t \rightarrow +\infty$ справедливы равенства

$$h_+(c(\alpha)e_+(\alpha) + o(1)) \exp(\lambda_+(\alpha)t), \quad h_- = O(\exp(\lambda_+(\alpha)t)). \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая в системе (30), (31) асимптотические формулы (29), без труда убеждаемся, что для компонент $v_1(t, \alpha)$, $v_2(t, \alpha)$ ее решения справедливы оценки

$$\begin{aligned} \max_{-\infty < \tau \leq t} |v_1(\tau, \alpha)| &\leq M_1 \max_{-\infty < \tau \leq t} |v_2(\tau, \alpha)| + M_2, \\ |v_2(t, \alpha)| &\leq M_3 \left(1 + \max_{-\infty < \tau \leq t} |v_1(\tau, \alpha)|\right) \omega(t, \alpha), \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$\omega(t, \alpha) = \int_{-\infty}^t |b_{21}(s, \alpha)| \exp(-(\lambda_-(\alpha) + \lambda_+(\alpha))(t-s)) ds, \quad (35)$$

а постоянные M_j , $j = 1, 2, 3$, не зависят от $t \in \mathbb{R}$. Далее, снова привлекая равенства (29), заключаем, что при $t \rightarrow +\infty$

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} O(\exp(-r(\alpha)t)), & \lambda_-(\alpha) + \lambda_+(\alpha) \neq \lambda_-, \\ O(t \exp(-\lambda_-t)), & \lambda_-(\alpha) + \lambda_+(\alpha) = \lambda_-, \end{cases} \quad (36)$$

где $r(\alpha) = \min\{\lambda_-, \lambda_-(\alpha) + \lambda_+(\alpha)\}$. И наконец, объединяя (34)–(36), приходим к выводу, что при $t \rightarrow +\infty$ функция $v_2(t, \alpha)$ стремится к 0 с той же скоростью, что и $\omega(t, \alpha)$.

Установленные свойства $v_2(t, \alpha)$ позволяют перейти в (30) к пределу при $t \rightarrow +\infty$ и убедиться в справедливости равенства

$$\lim v_1(t, \alpha) = c(\alpha) - 1,$$

эквивалентного первому равенству (33). Второе равенство (33) очевидно, так как норма любого решения системы (26) не может при $t \rightarrow +\infty$ расти быстрее, чем $\exp(\lambda_+(\alpha)t)$. Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Справедливы предельные равенства

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} c(\alpha) = \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} a_{11}(t) dt\right), \quad \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} c(\alpha) = \exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} a_{22}(t) dt\right), \quad (37)$$

где $a_{11}(t)$, $a_{22}(t)$ – диагональные элементы матрицы $A(t) - A_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из структуры матрицы $A_0 + B(\alpha)$ вытекает, что при $\alpha \rightarrow +\infty$, во-первых, $\lambda_-(\alpha)$, $\lambda_+(\alpha) \sim \alpha$; во-вторых, ее собственные векторы $e_+(\alpha)$, $e_-(\alpha)$ стремятся соответственно к $\sigma_1 e_1$, $\sigma_2 e_2$, где

$$e_1 = \text{colon}(1, 0), \quad e_2 = \text{colon}(0, 1), \quad \sigma_j = \pm 1, \quad j = 1, 2.$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что коэффициенты $b_{ij}(t, \alpha)$ системы (30), (31) равномерно по $t \in \mathbb{R}$ стремятся к коэффициентам $a_{ij}(t)$ матрицы $A(t) - A_0$, взятым со знаком “+” или “–”; в частности,

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} b_{11}(t, \alpha) = a_{11}(t). \quad (38)$$

Из перечисленных выше фактов следует, что постоянные $M_j, j = 1, 2, 3$, в (34) можно выбрать не зависящими от α . Отсюда и из неравенства

$$\max_{t \in \mathbb{R}} \omega(t, \alpha) \leq \frac{M}{\alpha},$$

справедливого при всех достаточно больших α и вытекающего из явного вида (35) для $\omega(t, \alpha)$, заключаем, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \max_{t \in \mathbb{R}} |v_2(t, \alpha)| = 0. \quad (39)$$

И наконец, используя (38), (39) в формуле (32), убеждаемся в справедливости первого из равенств (37). Второе же из них устанавливается аналогично. Лемма 4 доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что при некотором натуральном k_0 матрица (18) имеет собственное число с положительной действительной частью и*

$$c(\alpha_0) \neq 0, \quad (40)$$

где $\alpha_0 = k_0^2(d_2 - d_1)/2$. Тогда однородный цикл (3) краевой задачи (1) экспоненциально неустойчив.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обоснование теоремы сводится, очевидно, к анализу расположения мультипликаторов системы

$$\dot{h} = (A(t, \mu) + B(\alpha_0))h, \quad (41)$$

получающейся из (19) при $k = k_0$ после замены

$$h \exp\left(\frac{k_0^2(d_1 + d_2)t}{2}\right) \rightarrow h. \quad (42)$$

Отметим, что так как след каждой из матриц (18) отрицателен, то при условиях теоремы матрица $A_0 - k^2 D$ имеет вещественные собственные числа $\lambda_1, -\lambda_2, 0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Поэтому вещественными будут и собственные значения матрицы

$$A_0 + B(\alpha_0) = A_0 - k_0^2 D + \frac{k_0^2(d_1 + d_2)}{2} I, \quad (43)$$

а значит, $\alpha_0 \in \Lambda$.

Как и при доказательстве теоремы 1, изучим сначала систему (41) при $\mu = 0$. С этой целью рассмотрим ее матрицу Коши $U(t, s)$ и положим $V(\mu) = U(\tau_2(\mu), -\tau_1(\mu))$. Так как $\alpha_0 \in \Lambda$, привлекая введенные выше специальные решения $h_{\pm}(t, \alpha)$, матрицу $V(\mu)$ можно представить в виде

$$V(\mu) = W(\tau_2(\mu), \mu) W^{-1}(-\tau_1(\mu), \mu), \quad (44)$$

где

$$W(t, \mu) = [h_+(t, \alpha_0) \exp(\lambda_+(\alpha_0)\tau_1(\mu)), h_-(t, \alpha_0) \exp(-\lambda_-(\alpha_0)\tau_1(\mu))]. \quad (45)$$

Несложные вычисления с использованием асимптотических формул (4), (28), (33) и представления (44) показывают, что

$$V(\mu) = \left(\begin{pmatrix} c(\alpha_0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + o(1) \right) \exp(\lambda_+(\alpha_0)T(\mu)), \quad (46)$$

где, напомним, $T(\mu)$ – период цикла (3). Отсюда и из неравенства (40) следует, что для ведущего (наибольшего по модулю) собственного числа $\lambda_{\max}(\mu)$ матрицы $V(\mu)$ имеет место асимптотическое равенство

$$\lambda_{\max}(\mu) = (c(\alpha_0) + o(1)) \exp(\lambda_+(\alpha_0)T(\mu)) = O(\mu^{-\lambda_+(\alpha_0)/\lambda_+}). \quad (47)$$

При $\mu > 0$ вместо (41) рассмотрим вспомогательную систему

$$\dot{h} = (A_{bc}(t, \mu) + B(\alpha_0))h, \quad (48)$$

где

$$A_{bc}(t, \mu) = \begin{cases} A(t, \mu), & t \in [-\tau_1(\mu), \tau_2(\mu)], \\ A(t), & t \in \mathbb{R} \setminus [-\tau_1(\mu), \tau_2(\mu)], \end{cases} \quad (49)$$

и остановимся на некоторых свойствах ее коэффициентов. Отметим, во-первых, что для $A_{bc}(t, \mu) - A_0$ равномерно по μ сохраняются асимптотические равенства (21). Действительно, при всех $t \geq 0$, например, используя асимптотические представления (4), (21), (23), приходим к цепочке неравенств

$$\begin{aligned} \|A_{bc}(t, \mu) - A_0\| \exp(\lambda_- t) &\leq \|A(t) - A_0\| \exp(\lambda_- t) \\ &\quad + \mu^\gamma \max_{0 \leq t \leq \tau_2(\mu)} \|\Delta(t, \mu)\| \exp(\lambda_- \tau_2(\mu)) \leq M \end{aligned}$$

(при $t \leq 0$ ситуация аналогичная). Во-вторых, из (4), (23) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|A_{bc}(t, \mu) - A(t)\| \leq M \mu^\gamma \ln \frac{1}{\mu}.$$

Из перечисленных свойств матрицы (49) вытекает, что для системы (48) сохраняют силу леммы 2,3: у нее существуют решения $h_\pm(t, \alpha_0, \mu)$ с равномерной по μ асимптотикой (28) при $t \rightarrow -\infty$ и (33) при $t \rightarrow +\infty$, причем в последнем случае $c(\alpha)$ заменяется на

$$c(\alpha_0, \mu) = c(\alpha_0) + O\left(\mu^\gamma \ln \frac{1}{\mu}\right).$$

Отсюда следует, что для этой системы сохраняются и формулы (44)–(47) (с заменой $h_\pm(t, \alpha_0)$ на $h_\pm(t, \alpha_0, \mu)$).

Итак, для ведущего мультипликатора системы (41) справедлива асимптотическая формула (47). Обращая теперь замену (42) и учитывая, что (см. (43))

$$\lambda_+(\alpha_0) = \lambda_1 + \frac{k_0^2(d_1 + d_2)}{2},$$

для ведущего мультипликатора исходной системы (19) (при $k = k_0$) из (47) выводим формулу

$$\lambda_{\max}(\mu) = (c(\alpha_0) + o(1)) \exp(\lambda_1 T(\mu)) = O(\mu^{-\lambda_1/\lambda_+}). \quad (50)$$

Модуль другого ее мультипликатора в силу теоремы Лиувилля имеет порядок $\mu^{\lambda_2/\lambda_+}$. Теорема 2 доказана.

Будем говорить, что однородный цикл (3) *неустойчив на моде* $\cos kx$ с номером k , если соответствующая система (19) имеет мультипликатор, модуль которого больше 1.

ТЕОРЕМА 3. Пусть однородный цикл (3) неустойчив на моде с номером k_0 , $k_0 \geq 2$, и

$$c(\alpha_k) \neq 0, \quad k = 1, \dots, k_0 - 1, \quad (51)$$

где $\alpha_k = k^2(d_2 - d_1)/2$. Тогда он будет неустойчивым и на всех модах с номерами $k \leq k_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2 проблема сводится к доказательству неравенств

$$\det(A_0 - k^2 D) < 0, \quad k < k_0. \quad (52)$$

Для их обоснования отметим сначала неравенство

$$\det(A_0 - k_0^2 D) \leq 0, \quad (53)$$

вытекающее из неустойчивости цикла (3) на моде с номером k_0 (в противном случае, что ясно из доказательства теоремы 1, при $k = k_0$ была бы устойчивость). Рассмотрим, далее, квадратный трехчлен $P(z) = \det(A_0 - zD)$, обладающий свойствами: $P(0) < 0$, $P''(z) > 0$ – и имеющий вследствие этого единственный положительный корень z_0 . Так как (см. (53)) $z_0 \geq k_0^2$, неравенства (52) вытекают автоматически. Теорема 3 доказана.

В дополнение к теоремам 2, 3 остановимся на ряде интересных моментов. Отметим, во-первых, что функция (32) может иметь лишь изолированные нули, так как она аналитична по $\alpha \in \Lambda$ и не равна 0 тождественно (см. (37)). Поэтому неравенства (40), (51) означают некоторую общность положения, связанную с коэффициентами диффузии.

Во-вторых, $c(0) = 0$. Действительно, при $\alpha = 0$ система (26) представляет собой линеаризацию системы (2) при $\mu = 0$ на решении $u_0(t)$. Поэтому она имеет решение du_0/dt , причем (см. условие 1)

$$\frac{du_0}{dt} = O(\exp(\lambda_+ t)), \quad t \rightarrow -\infty, \quad \frac{du_0}{dt} = O(\exp(-\lambda_- t)), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Так как, очевидно, $h_+(t, 0)$ совпадает с du_0/dt с точностью до сдвига по времени, отсюда и следует требуемый факт. Заметим также, что у функции (32) могут быть и другие нули. Например, если предположить, что $c'(0) \neq 0$, $\Lambda = \mathbb{R}$, то в силу (37) у уравнения $c(\alpha) = 0$ будет хотя бы один корень $\alpha_* \neq 0$.

В-третьих, теоремы 2, 3 также допускают наглядную геометрическую интерпретацию, подобную той, что изложена в п. 2.

И наконец, в-четвертых, область неустойчивости цикла (3) в плоскости параметров (d_1, d_2) всегда не пуста: неустойчивость имеет место, например, при достаточно малых d_1, d_2 таких, что $(d_1 - d_2)/2$ не является нулем функции (32). Последнее обстоятельство характерно именно для однородного цикла, бифурцирующего из петли сепаратрисы, так как в рассмотренных в [4]–[6] случаях область может быть и пустой.

4. О синхронизмах. Будем говорить о *синхронизме*, если однородный цикл (3) устойчив и в то же время

$$\det(A_0 - k^2 D) < 0, \quad k = 1, \dots, k_0,$$

при некотором натуральном k_0 . Из теорем 2, 3 следует, что в этом случае величины $c(\alpha_k)$, $k = 1, \dots, k_0$, асимптотически малы. Тем самым, синхронизмы возможны лишь

при значениях d_1, d_2 , лежащих на плоскости (d_1, d_2) в асимптотически малых окрестностях прямых $d_2 - d_1 = 2\alpha_*/k^2$, где $k \geq 1$, α_* – произвольный нуль функции (32). В частности, всегда имеется тривиальный синхронизм $d_1 = d_2$, так как в этом случае однородный цикл (3), очевидно, будет устойчивым. Возможность же реализации нетривиального синхронизма в простейшей ситуации иллюстрирует следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть при некоторых $d_1^0, d_2^0 > 0$, $d_1^0 \neq d_2^0$,

$$\det(A_0 - D_0) < 0, \quad \det(A_0 - k^2 D_0) > 0, \quad k \geq 2, \quad (54)$$

$$c(\alpha_0) = 0, \quad c'(\alpha_0) \neq 0, \quad (55)$$

где $D_0 = \text{diag}\{d_1^0, d_2^0\}$, $\alpha_0 = (d_2^0 - d_1^0)/2$. Тогда найдутся непрерывные функции $d_j(\mu)$, $d_j(0) = d_j^0$, $j = 1, 2$, такие, что при $d_j = d_j(\mu)$, $j = 1, 2$, однородный цикл (3) краевой задачи (1) экспоненциально орбитально устойчив.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в (1) $d_1 = d_1^0$, $d_2 = d_2^0 + s$, где $|s| \ll 1$, и будем менять параметр s так, чтобы знаки определителей (54) сохранялись, а величина $c(\alpha_0)$ меняла знак. Тогда из формулы (50) следует, что ведущий мультипликатор системы (19) при $k = 1$ также меняет знак, а значит, существует такое значение $s = s_0(\mu)$, $s_0(0) = 0$, параметра s , при котором мультипликаторы этой системы становятся комплексными. Остается отметить, что в силу теоремы Лиувилля их модули при $s = s_0(\mu)$ приобретают порядок $\mu^{(\lambda_2 - \lambda_1)/(2\lambda_+)}$, где $\lambda_1, -\lambda_2$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, – собственные числа матрицы $A_0 - D_0$. Теорема 4 доказана.

В заключение остановимся на геометрическом смысле описанного синхронизма. Можно показать, что при условиях (54), (55) и при $\mu = 0$ в достаточно малой окрестности петли Γ_0 у системы (1) существует двумерное многообразие решений, стремящихся к нулевому состоянию равновесия при $t \rightarrow \pm\infty$. Таким образом, в этом случае наблюдается определенная “возвращаемость” траекторий к седлу, которая несмотря на наличие у последнего пространственно неоднородного неустойчивого направления гарантирует устойчивость цикла (3). Если же $c(\alpha_0) \neq 0$, то подобной возвращаемости нет и цикл (3) оказывается неустойчивым.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Иваницкий Г. Р., Кринский В. И., Сельков Е. Е. Математическая биофизика клетки. М.: Наука, 1978.
- [2] Колесов Ю. С. Проблема адекватности экологических уравнений // Деп. ВИНТИ №1901-85. М.: ВИНТИ 1985.
- [3] Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973.
- [4] Колесов А. Ю. Устойчивость однородного цикла в системах с диффузией. Дисс. ... к. ф.-м. н. М.: МИАН, 1987.
- [5] Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. М.: Физматлит, 1995.
- [6] Mishchenko E. F., Kolesov Yu. S., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh. Asymptotic Methods in Singularly Perturbed Systems. New York-London: Plenum, 1994.
- [7] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967.
- [8] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.