Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев, Трехчленные рекуррентные соотношения с матричными коэффициентами. Вполне неопределенный случай, *Матем. заметки*, 1998, том 63, выпуск 5, 709–716

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1337>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 18:12:37

УДК 517.984+517.929

ТРЕХЧЛЕННЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ С МАТРИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. ВПОЛНЕ НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ СЛУЧАЙ

А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев

В пространстве последовательностей векторов ℓ_p^2 рассматривается симметрический оператор L , порожденный выражением $(lu)_j := B_j u_{j+1} + A_j u_j + B_{j-1}^* u_{j-1}$, где $u_{-1} = 0$, $u_0, u_1, \dots \in \mathbb{C}^p$, A_j, B_j – матрицы порядка p с элементами из $\mathbb{C}$, причем $A_j^* = A_j$, B_j^{-1} ($j = 0, 1, \dots$) существуют. Приводится необходимое и достаточное условие, для того чтобы дефектные числа оператора L были максимальными, т.е. для выражения l имел место вполне неопределенный случай. Получены также признаки не вполне неопределенности и вполне неопределенности для выражения l в терминах коэффициентов A_j, B_j .

Библиография: 5 названий.

1. Введение. Пусть $\mathbb{C}^p$ ($p \geq 1$) – евклидово p -мерное пространство вектор-столбцов со стандартным скалярным произведением $y^* x = \sum_{j=1}^p x_j \bar{y}_j$, где x_j, y_j ($j = 1, 2, \dots, p$) – координаты векторов x и y соответственно, а звездочка означает комплексно сопряженную матрицу. Пусть далее A_j, B_j ($j = 0, 1, \dots$) – матрицы порядка p , элементы которых являются комплексными числами, причем A_j – самосопряженная матрица, а B_j^{-1} ($j = 0, 1, \dots$) существует. Рассмотрим разностное выражение второго порядка

$$(lu)_j := B_j u_{j+1} + A_j u_j + B_{j-1}^* u_{j-1}, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

где $u_{-1} := 0$, $u_0, u_1, \dots \in \mathbb{C}^p$. Символом l обозначим операцию, действующую на последовательности квадратных матриц $U_0, U_1, \dots$ размерности p с элементами из $\mathbb{C}$ так же, как и l , т.е. по формуле (1). Справедлива следующая формула Грина:

$$\sum_{j=k}^n ((lu)_j^* v_j - u_j^* (lv)_j) = [uv](s)|_{k-1}^n,$$

где

$$[uv](s)|_{k-1}^n := [uv](n) - [uv](k-1)$$

и

$$[uv](s) := u_{s+1}^* B_s^* v_s - u_s^* B_s v_{s+1}, \quad s = 0, 1, \dots$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00333.

Аналогичная формула справедлива и в случае, когда векторы u_j, v_j заменяются на матрицы U_j, V_j , а операция l на операцию l .

Обозначим через ℓ_p^2 гильбертово пространство бесконечных последовательностей векторов $u = (u_0, u_1, \dots)$, $u_j \in \mathbb{C}^p$, со скалярным произведением $(u, v) = \sum_{j=0}^{+\infty} v_j^* u_j$, и пусть L – минимальный замкнутый оператор, порожденный выражением (1) и граничным условием $u_{-1} = 0$ в пространстве ℓ_p^2 (см. [1, гл. VII, § 2, п. 5, с. 509], [2]). Хорошо известно, что оператор L симметричен, но вообще говоря, несамосопряжен, и дефектные числа n_+ и n_- этого оператора удовлетворяют неравенствам $0 \leq n_+, n_- \leq p$. Говорят, что для выражения l имеет место *вполне неопределенный случай*, если $n_+ = n_- = p$. Из наших дальнейших рассуждений (см. теорему 1 и ее доказательство) легко извлечь, что для выражения l имеет место вполне неопределенный случай тогда и только тогда, когда все решения уравнения

$$(lu)_j = zu_j, \quad j = 0, 1, \dots, \quad u_{-1} = 0, \quad (2)$$

при $z = 0$ принадлежат пространству ℓ_p^2 .

Развивая эту идею, в данной работе мы приводим критерий вполне неопределенности для выражения l (теорема 2), которая является аналогом соответствующего утверждения для обыкновенных симметрических дифференциальных уравнений (см. [3]). Далее в работе средствами этого критерия доказаны признаки не вполне неопределенности (теорема 3) и вполне неопределенности (теорема 4) для выражения l уже в терминах коэффициентов этого выражения.

2. Предварительные сведения. Через $P_j(z)$ и $Q_j(z)$ ($z \in \mathbb{C}$) обозначим решения матричного уравнения

$$(lU)_j = zU_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

удовлетворяющие начальным условиям $P_0(z) := I$, $P_1(z) := B_0^{-1}(zI - A_0)$ и $Q_0(z) := O$, $Q_1(z) := B_0^{-1}$ соответственно, где O и I , как обычно, – нулевая и единичная матрица размерности p . Матриц-функции $P_j(z)$ и $Q_j(z)$ являются многочленами j -го и $(j-1)$ -го порядка от комплексного переменного z с матричными коэффициентами и называются *матричными многочленами* первого и второго рода соответственно. Эти многочлены удовлетворяют следующим соотношениям:

$$Q_{j+1}^*(z)B_j^*P_j(z) - Q_j^*(z)B_jP_{j+1}(z) = I, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

$$Q_{j+1}^*(z)B_j^*Q_j(z) - Q_j^*(z)B_jQ_{j+1}(z) = O, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

$$P_{j+1}^*(z)B_j^*P_j(z) - P_j^*(z)B_jP_{j+1}(z) = O, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

где всюду $U^*(z) = (U(\bar{z}))^*$.

Формулы (4), (5) можно извлечь, очевидно, из формулы Грина подходящим выбором матриц U_j и V_j . Разумеется, эти формулы, как и саму формулу Грина, можно доказать, манипулируя уравнением (3) и определением выражения $(lU)_j$ соответственно.

Пусть F_j ($j = 1, 2, \dots$) – произвольная последовательность матриц порядка p . Считая матрицы $P_j(z)$ и $Q_j(z)$ ($z \in \mathbb{C}$) известными, методом вариации постоянных решим уравнение

$$(lU)_j - zU_j = F_j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Положив

$$U_j(z) = P_j(z)C_j^{(1)} + Q_j(z)C_j^{(2)}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

матрицы $C_j^{(i)}$ ($i = 1, 2$) выберем так, чтобы

$$P_j(z)\Delta C_{j+1}^{(1)} + Q_j(z)\Delta C_{j+1}^{(2)} = O, \quad B_j(P_{j+1}(z)\Delta C_{j+1}^{(1)} + Q_{j+1}(z)\Delta C_{j+1}^{(2)}) = F_j, \quad (8)$$

где $\Delta C_j^{(i)} = C_j^{(i)} - C_{j-1}^{(i)}$ ($i = 1, 2$). Пусть, кроме того, $C_1^{(1)} = C_0^{(1)}$ – произвольная постоянная матрица. Непосредственно проверяется, что если матрицы $C_j^{(i)}$ ($i = 1, 2$) выбирать таким образом, то функция $U_j(z)$, определяемая равенством (7), является решением уравнения (6).

Покажем, что система (8) всегда имеет единственное решение. Действительно, умножая первое уравнение этой системы слева на $Q_{j+1}^*(z)B_j^*$, а второе уравнение также слева на $-Q_j^*(z)$ и сложив полученные равенства, имеем

$$(Q_{j+1}^*(z)B_j^*P_j(z) - Q_j^*(z)B_jP_{j+1}(z))\Delta C_{j+1}^{(1)} + (Q_{j+1}^*(z)B_j^*Q_j(z) - Q_j^*(z)B_jQ_{j+1}(z))\Delta C_{j+1}^{(2)} = -Q_j^*(z)F_j.$$

Применяя теперь формулы (4), находим, что

$$\Delta C_{j+1}^{(1)} = -Q_j^*(z)F_j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что

$$\Delta C_{j+1}^{(2)} = P_j^*(z)F_j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Из равенств (9) и (10) следует справедливость нашего утверждения.

В частности, если в равенствах (9) и (10) взять $F_j = I$ ($j = 1, 2, \dots$) и учесть их в (8), находим, что справедливы тождества

$$Q_j(z)P_j^*(z) - P_j(z)Q_j^*(z) = O, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (11)$$

$$Q_{j+1}(z)P_j^*(z) - P_{j+1}(z)Q_j^*(z) = B_j^{-1}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (12)$$

Тождество (12) является аналогом формулы Лиувилля–Остроградского.

Суммируя по $i = k, k+1, \dots, j-1$, из равенств (9) и (10) находим, что

$$C_j^{(1)} = C_k^{(1)} - \sum_{i=k}^{j-1} Q_i^*(z)F_i, \quad C_j^{(2)} = C_k^{(2)} + \sum_{i=k}^{j-1} P_i^*(z)F_i.$$

Поэтому в силу (7) имеем

$$U_j(z) = P_j(z)C_k^{(1)} + Q_j(z)C_k^{(2)} + \sum_{i=k}^{j-1} (Q_j(z)P_i^*(z) - P_j(z)Q_i^*(z))F_i, \quad (13)$$

$$k = 0, 1, \dots, \quad j = k+1, k+2, \dots$$

3. Критерий вполне неопределенности. Теперь докажем, что справедлива

ТЕОРЕМА 1. Если каждое решение векторного уравнения (2) для некоторого вещественного z_0 принадлежит пространству ℓ_p^2 , то для произвольного комплексного z каждое решение уравнения (2) принадлежит пространству ℓ_p^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть все решения уравнения (2) при некотором вещественном $z = z_0$ принадлежат пространству ℓ_p^2 . Тогда легко видеть, что $M_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$, где

$$M_k := \max \left\{ \left(\sum_{j=k}^{+\infty} \|P_j(z_0)\|^2 \right)^{1/2}, \left(\sum_{j=k}^{+\infty} \|Q_j(z_0)\|^2 \right)^{1/2} \right\}$$

и символом $\|\cdot\|$ обозначена произвольная матричная норма. В частности, в качестве $\|\cdot\|$ далее используем самосопряженную матричную норму, т.е. такую норму, для которой $\|U^*\| = \|U\|$, где U – произвольная матрица.

Матричное уравнение (3) запишем в виде

$$(IU)_j - z_0 U_j = (z - z_0) U_j m, \quad j = 0, 1, \dots,$$

и применим формулу (13), положив $F_j = (z - z_0) U_j(z)$ ($j = 1, 2, \dots$). Тогда

$$\begin{aligned} U_j(z) &= P_j(z_0) C_k^{(1)} + Q_j(z_0) C_k^{(2)} + (z - z_0) \sum_{i=k}^j (Q_j(z_0) P_i^*(z_0) - P_j(z_0) Q_i^*(z_0)) U_i(z), \\ j &= k, k+1, \dots \end{aligned} \quad (14)$$

С другой стороны, $\|P_j^*(z_0)\| = \|P_j(z_0)\|$ и $\|Q_j^*(z_0)\| = \|Q_j(z_0)\|$, так как число z_0 вещественное. Поэтому, применяя неравенство Коши–Буняковского и свойства матричной нормы, находим, что

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=k}^j (Q_j(z_0) P_i^*(z_0) - P_j(z_0) Q_i^*(z_0)) U_i(z) \right\| \\ & \leq \|Q_j(z_0)\| \sum_{i=k}^j \|P_i(z_0)\| \cdot \|U_i(z)\| + \|P_j(z_0)\| \sum_{i=k}^j \|Q_i(z_0)\| \cdot \|U_i(z)\| \\ & \leq M_k N_{k,j}(z) (\|Q_j(z_0)\| + \|P_j(z_0)\|), \end{aligned}$$

где

$$N_{k,j}(z) := \left(\sum_{i=k}^j \|U_i(z)\|^2 \right)^{1/2}.$$

Таким образом, из (14) находим, что

$$\|U_j(z)\| \leq (C_k + |z - z_0| M_k N_{k,j}(z)) (\|P_j(z_0)\| + \|Q_j(z_0)\|),$$

где $C_k = \max\{\|C_k^{(1)}\|, \|C_k^{(2)}\|\}$. Заменим в этом неравенстве переменную j на i и возведем обе части в квадрат. Суммируя затем почленно полученные неравенства по $i = k, k+1, \dots, j$, извлекая квадратный корень из обеих частей и применяя неравенство Минковского, находим, что

$$N_{k,j}(z) \leq 2C_k M_k + 2|z - z_0| M_k^2 N_{k,j}(z).$$

Если k настолько велико, что $|z - z_0| M_k^2 \leq 1/4$, то $N_{k,j}(z) \leq 4C_k M_k$. Так как правая часть этого неравенства не зависит от j , выражение $N_{k,j}(z)$ имеет предел при $j \rightarrow +\infty$. Поэтому любое решение уравнения (2) принадлежит пространству ℓ_p^2 . Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Таким образом, если все решения уравнения (2) при некотором вещественном z_0 принадлежат пространству ℓ_p^2 , то для выражения l имеет место вполне неопределенный случай. Из равенства (14) можно извлечь, что справедливо и обратное утверждение, более того, в этом случае все решения уравнения (2) при любом $z \in \mathbb{C}$ принадлежат пространству ℓ_p^2 (см. также [1, гл. VII, § 2, п. 11, с. 589]).

По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями в дальнейшем последовательность

$$Q_i P_j^* - P_i Q_j^* =: K_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \dots,$$

где $P_i := P_i(0)$ и $Q_i := Q_i(0)$, будем называть *последовательностью Коши* уравнения (6) (при $z = 0$). Отметим, что эта последовательность при фиксированном j удовлетворяет матричному уравнению (3) при $z = 0$, начальным условиям

$$K_{jj} = 0, \quad K_{j+1,j} = B_j^{-1}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (15)$$

(см. равенства (11) и (12) при $z = 0$), и соотношению

$$K_{ij}^* = -K_{ji}, \quad i, j = 0, 1, \dots \quad (16)$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы для выражения l имел место вполне неопределенный случай, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности отрезков натуральных чисел $[n_k, m_k]$ таких, что $m_k \leq n_{k+1} < m_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$), выполнялось условие

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=n_k}^{m_k} \sum_{j=n_k}^i \|K_{ij}\|^2 \right)^{1/2} < +\infty. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. В силу неравенства Коши–Буняковского находим, что

$$\|K_{ij}\|^2 \leq (\|Q_i\| \cdot \|P_j\| + \|P_i\| \cdot \|Q_j\|)^2 \leq (\|P_i\|^2 + \|Q_i\|^2)(\|P_j\|^2 + \|Q_j\|^2).$$

Следовательно,

$$\sum_{i=n_k}^{m_k} \sum_{j=n_k}^i \|K_{ij}\|^2 \leq \sum_{i=n_k}^{m_k} (\|P_i\|^2 + \|Q_i\|^2) \sum_{j=n_k}^i (\|P_j\|^2 + \|Q_j\|^2) \leq \left(\sum_{i=n_k}^{m_k} \|P_i\|^2 + \|Q_i\|^2 \right)^2.$$

Извлекая далее квадратный корень из обеих частей полученного неравенства и суммируя их по k , находим, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=n_k}^{m_k} \sum_{j=n_k}^i \|K_{ij}\|^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=n_k}^{m_k} \|P_i\|^2 + \|Q_i\|^2 \right) \leq 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (\|P_j\|^2 + \|Q_j\|^2) < +\infty.$$

Таким образом, если все решения уравнения (2) при $z = 0$ принадлежат пространству ℓ_p^2 , то условия (15) теоремы 2 выполняются.

Достаточность. Сначала покажем, что если не все решения уравнения (2) при $z = 0$ принадлежат пространству ℓ_p^2 , то для любого $l \geq 1$

$$\sum_{i=l}^{+\infty} \sum_{j=l}^{+\infty} \|K_{ij}\|^2 = +\infty. \quad (18)$$

Пусть при некотором $l = l_0$ это не так. Тогда в силу (16) находим, что

$$\sum_{i=l_0}^{+\infty} \sum_{j=l_0}^{+\infty} \|K_{ij}\|^2 = \sum_{i=l_0}^{+\infty} \sum_{j=l_0}^i \|K_{ij}\|^2 + \sum_{i=l_0}^{+\infty} \sum_{j=i}^{+\infty} \|K_{ij}\|^2 = 2 \sum_{i=l_0}^{+\infty} \sum_{j=l_0}^i \|K_{ij}\|^2 < +\infty.$$

Из этого, в частности, следует, что

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \|K_{i,l_0}\|^2 < +\infty, \quad \sum_{i=1}^{+\infty} \|K_{i,l_0+1}\|^2 < +\infty.$$

С другой стороны, применяя тождества (4), (5), легко установить, что

$$P_i = K_{i,l_0} B_{l_0} P_{l_0+1} - K_{i,l_0+1} B_{l_0}^* P_{l_0}, \quad Q_i = K_{i,l_0} B_{l_0} Q_{l_0+1} - K_{i,l_0+1} B_{l_0}^* Q_{l_0}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Исходя из этих тождеств, стандартными рассуждениями можно показать, что

$$\sum_{i=1}^{+\infty} (\|P_i\|^2 + \|Q_i\|^2) \leq C \sum_{i=1}^{+\infty} (\|K_{i,l_0}\|^2 + \|K_{i,l_0+1}\|^2),$$

где C – некоторая положительная постоянная. Это неравенство противоречит предположению о том, что не все решения уравнения (2) принадлежат пространству ℓ_p^2 . Теперь предположим, что для любой последовательности отрезков натуральных чисел $[n_k, m_k]$ условие (17) выполнено, но не все решения уравнения (2) при $z = 0$ принадлежат пространству ℓ_p^2 . Используя соотношения (18), легко заметить, что тогда существует, например, последовательность непересекающихся отрезков натуральных чисел $[n_k, m_k]$ ($k = 1, 2, \dots$) таких, что

$$\sum_{i=n_k}^{m_k} \sum_{j=n_k}^i \|K_{ij}\|^2 \geq 1.$$

Это противоречит нашему предположению. Теорема 2 доказана.

Теорема 2 является аналогом соответствующего утверждения (см. [3]) для обыкновенных симметрических дифференциальных уравнений.

4. Признаки вполне неопределенности. Справедливо следующее предложение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняется какое-либо из следующих условий:

- а) $\sum_{k=1}^{+\infty} \|B_k^{-1}\| = +\infty,$
- б) $\sum_{k=1}^{+\infty} \|B_{k+1}^{-1} A_{k+1} B_k^{-1}\| = +\infty,$
- в) $\sum_{k=1}^{+\infty} \|B_{k+2}^{-1} (A_{k+2} B_{k+1}^{-1} A_{k+1} - B_{k+1}^*) B_k^{-1}\| = +\infty.$

Тогда для выражения l не имеет места вполне неопределенный случай.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $[n_k^{(s)}, m_k^{(s)}]$ ($k = 1, 2, \dots, s = 1, 2, \dots, N$) – конечное число непересекающихся при каждом s последовательностей отрезков натуральных чисел таких, что каждое из слагаемых вида $\|K_{n+i, i}\|^2$ встречается хотя бы в одной сумме вида

$$\sum_{i=n_k^{(s)}}^{m_k^{(s)}} \sum_{j=n_k^{(s)}}^i \|K_{ij}\|^2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad s = 1, 2, \dots, N.$$

Очевидно, такие последовательности отрезков можно построить при любом фиксированном i . Таким образом, в силу неравенства

$$\sum_{s=1}^N \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=n_k^{(s)}}^{m_k^{(s)}} \sum_{j=n_k^{(s)}}^i \|K_{ij}\|^2 \right)^{1/2} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \|K_{n+i, i}\|$$

каждый раз, когда ряд в правой части последнего неравенства расходится, расходится и один из рядов

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=n_k^{(s)}}^{m_k^{(s)}} \sum_{j=n_k^{(s)}}^i \|K_{ij}\|^2 \right)^{1/2}, \quad s = 1, 2, \dots, N.$$

Применяя теперь теорему 2, находим, что если указанный ряд расходится при некотором фиксированном i , то уравнение (2) при $z = 0$ имеет решение, не принадлежащее пространству ℓ_p^2 . Остается заметить, что

$$\begin{aligned} K_{n+1, n} &= B_n^{-1}, \quad K_{n+2, n} = -B_{n+1}^{-1} A_{n+1} B_n^{-1}, \\ K_{n+3, n} &= B_{n+2}^{-1} (A_{n+2} B_{n+1}^{-1} A_{n+1} - B_{n+1}^*) B_n^{-1} \end{aligned}$$

в силу уравнения (3) при $z = 0$. Теорема 3 доказана.

Отметим, что в случае $p = 1$ условие а) теоремы 3 совпадает с известным признаком Карлемана (см. например, [1, гл. VII, § 1, теорема 1.3, с. 509]), а условие б) этой теоремы – с признаком Денниса и Уолла (см. [4, гл. I, дополнения и задачи, 2, с. 37]).

Справедлива также

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\|A_k\| \leq C$ ($k = 0, 1, \dots$) и

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{s=0}^{+\infty} \|B_j^{*-1} B_{j+1} B_{j+2}^{*-1} \cdots B_{j+2s-1} B_{j+2s}^{*-1}\| < +\infty.$$

Тогда для выражения l имеет место вполне неопределенный случай.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\|A_k\| \leq C$, то оператор $u_k \rightarrow A_k u_k$ ($k = 0, 1, \dots$), очевидно, является ограниченным самосопряженным оператором в пространстве ℓ_p^2 . Поэтому согласно известной теореме (см., например, [5, гл. IV, § 14, п. 7, теорема 6, с. 165]) дефектные числа оператора L и оператора, порожденного выражением

$$(l_1 u)_j = B_j u_{j+1} + B_{j-1}^* u_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

совпадают. Далее следует применить теорему 2 к выражению l_1 , учитывая, что

$$K_{j+2s,j} = 0, \quad K_{j+2s+1,j} = (-1)^s B_{j+2s}^{-1} B_{j+2s-1}^* B_{j+2s-2}^{-1} \cdots B_{j+1}^* B_j^{-1}, \quad s, j = 0, 1, \dots,$$

так как последовательность Коши K_{ij} удовлетворяет матричному уравнению

$$B_i K_{i+1,j} + B_{i-1}^* K_{i-1,j} = 0$$

при фиксированном j и начальным условиям (15). Теорема 4 доказана.

Теорема 4 является аналогом одной теоремы Березанского для случая $p = 1$ (см., например, [1, гл. VII, § 1, теорема 1.5, с. 513]).

Остановимся на одном следствии теоремы 4.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\|A_k\| \leq C$ и $\|B_{k+1}^{-1} B_k^*\| \leq q$ ($k = 0, 1, \dots$), где $C > 0$ и $0 < q < 1$ – постоянные. Тогда для выражения l имеет место вполне неопределенный случай.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя свойства самосопряженной матричной нормы, находим, что

$$\begin{aligned} \|B_j^{*-1} B_{j+1} B_{j+2}^{*-1} \cdots B_{j+2s-1} B_{j+2s}^{*-1}\| &\leq \|B_j^{*-1}\| \cdot \|B_{j+1} B_{j+2}^{*-1}\| \cdots \|B_{j+2s-1} B_{j+2s}^{*-1}\| \\ &\leq \|B_j^{-1}\| q^s, \quad i, s = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

и

$$\|B_j^{-1}\| = \|B_j^{-1} B_{j-1}^* B_{j-1}^{*-1}\| \leq q \|B_{j-1}^{-1}\|.$$

Поэтому

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{s=0}^{+\infty} \|B_j^{-1}\| q^s = \frac{1}{1-q} \sum_{j=0}^{+\infty} \|B_j^{-1}\| < +\infty.$$

Таким образом, все условия теоремы 4 выполняются. Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Все результаты данной работы без существенных изменений переносятся на случай, когда пространство $\mathbb{C}^p$ заменяется на сепарабельное гильбертово пространство H , а матрицы A_j, B_j ($j = 0, 1, \dots$) – на линейные ограниченные операторы в нем.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.
- [2] Крейн М. Г. Бесконечные J матрицы и матричная проблема моментов // Докл. АН СССР. 1949. Т. 69. №3. С. 125–128.
- [3] Мирзоев К. А. Функция Коши и L_w^p свойства решений квазидифференциальных уравнений // УМН. 1991. Т. 46. №4(280). С. 161–162.
- [4] Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов. М.: Физматлит, 1961.
- [5] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
 Московский авиационный технологический институт
 им. К. Э. Циолковского
 E-mail: karakhan@am.mati.ru

Поступило
 15.11.96
 Исправленный вариант
 29.12.97